



C1. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

D'où vient le nombre i , et pourquoi il fallait bien qu'il vienne

TABLE DES MATIÈRES

1. UNE HISTOIRE D'ÉLARGISSEMENTS	2	4. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES	12
1.1. Quatre crises déjà traversées	2	4.1. Pourquoi des couples, et non un symbole de plus	12
1.2. La leçon : rencontre, usage, fondation	3	4.2. Définition	13
2. LE SCANDALE DE CARDAN	4	4.3. $\mathbb{C}$ est un corps commutatif	13
2.1. Un secret, un serment, un procès	4	4.4. $\mathbb{R}$ vit dans $\mathbb{C}$: ce que « identifier » veut dire	14
2.2. La formule	5	4.5. Forme algébrique	15
2.3. Trois régimes, et un seul qui pose problème	6	4.6. Le conjugué.	16
2.4. Le scandale	7	4.7. Inverse, quotient, et le mot « corps ».	17
2.5. La pensée sauvage de Bombelli	8	4.8. Ce que l'on perd	18
2.6. ★ Ce détour, peut-on l'éviter?	8	4.9. ★ Un seul objet, quatre portes	19
3. LE QUART DE TOUR	9	5. RÉSOUDRE DANS $\mathbb{C}$	21
3.1. La question de Wessel	9	5.1. Le piège d'entrée : le symbole $\sqrt{}$	21
3.2. Le chaînon d'or : la droite le fait déjà	10	5.2. Le second degré à coefficients réels.	21
3.3. Deux exigences, et i apparaît.	10	5.3. Factoriser	22
3.4. Le produit n'est pas choisi : il est forcé. . . .	11	6. LÀ OÙ L'ESCALIER S'ARRÊTE	24
3.5. Un écho vieux de quinze siècles	12	6.1. Le miracle.	24
		6.2. ★ Et si l'on continuait quand même?	24
		6.3. Le dernier mot revient à Gauss	25

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Si l'on avait appelé $+1$, -1 et $\sqrt{-1}$ unités directe, inverse et latérale, au lieu de positive, négative et imaginaire, il n'aurait guère pu être question d'une telle obscurité. »

Carl Friedrich Gauss, 1831

Vers 1797, à l'École centrale de Grenoble, un élève de quatorze ans nommé Henri Beyle se passionne pour les mathématiques. Il y voit, écrira-t-il, le seul domaine où l'hypocrisie n'a pas cours. Puis il bute. Non pas sur un théorème difficile, mais sur la règle des signes : pourquoi le produit de deux nombres négatifs est-il positif ? Ses professeurs lui répondent par des exemples de dettes. Il ne cède pas. Si les quantités négatives sont les dettes d'un homme, demande-t-il, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs cet homme pourrait-il posséder une fortune de cinq millions ? Personne ne sait lui répondre. Il en conclut que ses maîtres se moquent de lui, et il gardera cette blessure quarante ans, jusqu'à la raconter dans un livre.

L'élève avait tort sur le fond et raison sur la forme. Tort, parce que la règle des signes est parfaitement légitime. Raison, parce qu'on ne la lui avait pas justifiée : on la lui avait *imposée*. Or un nombre négatif n'a rien d'évident, et le refus de Stendhal n'est pas une faiblesse d'écolier. C'est la position tenue, pendant des siècles, par les plus grands mathématiciens d'Europe. Ce chapitre vous demande d'admettre quelque chose de bien plus scandaleux qu'un nombre négatif : un nombre dont le carré vaut -1 . Vous avez le droit de résister. Vous avez même le devoir de demander d'où il sort. La réponse n'est pas « on l'a décidé », et elle n'est pas non plus « pour résoudre $x^2 + 1 = 0$ », qui ne convaincrait personne : rien n'oblige cette équation à avoir une solution. La véritable réponse est plus étrange, et beaucoup plus contraignante. Elle tient dans une équation du **troisième** degré dont une solution est un nombre entier, et que la seule méthode *générale* connue au XVI^e siècle ne sait atteindre qu'en passant par l'impossible.

*Henri Beyle est passé à la postérité sous le nom de **Stendhal**. L'épisode est raconté dans *Vie de Henry Brulard*, écrit en 1835 et publié bien après sa mort.*

Grenoble, vers 1797

1. UNE HISTOIRE D'ÉLARGISSEMENTS

Avant de fabriquer un nombre neuf, il faut savoir que ce n'est pas la première fois. Vous en avez déjà vu fabriquer quatre, et vous les manipulez sans y penser.

1.1. Quatre crises déjà traversées

À chaque fois, le scénario est le même. Une équation toute simple n'a pas de solution dans le monde de nombres où l'on vit. On refuse d'abord. On finit par élargir le monde. Et l'objet neuf reçoit, en cours de route, un nom méprisant qui lui restera.

OBJECTIFS

Comprendre que l'invention d'un nouveau nombre est un geste ordinaire des mathématiques, et qu'il obéit toujours au même ordre : rencontre, usage, fondation.

L'ÉQUATION	INSOLUBLE DANS	L'ENSEMBLE NEUF	LE MOT DE MÉPRIS
$x + 2 = 0$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	« racines fausses », « moindres que rien »
$2x = 1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	(pas de crise : voir la marge)
$3x = 1$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	« nombres rompus »
$x^2 = 2$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	alogos, « sans raison » ; puis surdus, « sourd »
$x^2 = -1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	« imaginaire », « sophistiqué »

Les deux premières lignes vous paraissent anodines. Elles ne l'étaient pas. Descartes, en 1637, appelle **racines fausses** les solutions négatives d'une équation, et les dit « moindres que rien » ; il oriente d'ailleurs ses axes de façon à ne jamais avoir à écrire une coordonnée négative. Près de deux siècles plus tard, en 1831, le mathématicien Augustus De Morgan écrit encore que $3 - 8$ est une impossibilité, et qu'une telle expression, si elle apparaissait comme réponse à un problème, signalerait une absurdité dans le problème lui-même ou dans sa mise en équation. Ces hommes ne sont pas des médiocres : ce sont les meilleurs de leur temps.

La quatrième ligne est la plus violente. Découvrir que la diagonale d'un carré de côté 1 n'est le rapport d'aucun couple d'entiers, c'est découvrir qu'il existe des longueurs que le nombre, tel qu'on le concevait, ne sait pas dire. Les Grecs les appellent *alogos* : sans rapport, et par glissement, sans raison. Les traducteurs arabes en font *ašamm*, le sourd, que le latin rend par *surdus* : c'est de là que vient le « nombre sourd » des algébristes de la Renaissance. Nous disons encore « irrationnel », et le mot porte toujours sa charge.

1.2. La leçon : rencontre, usage, fondation

Regardez maintenant *quand* ces objets ont été fondés, c'est-à-dire construits pour de bon, à partir d'objets plus simples, avec une définition qui ne demande rien à l'intuition.

	RENCONTRE	FONDATION	DÉLAI
$\sqrt{2}$	vers -450	1872 (Dedekind, Cantor)	environ 2 300 ans
i	1545 (Cardan)	1837 (Hamilton)	292 ans

Lisez bien ce tableau, parce qu'il dit deux choses inattendues.

La première : les élèves ont manipulé $\sqrt{2}$ pendant vingt-trois siècles avant que quiconque sache dire proprement ce qu'est un nombre réel. Vingt-trois siècles d'usage parfaitement fiable, sans fondation. La seconde : le nombre i , le suspect, le scandaleux, a été fondé **rente-cinq ans avant** $\sqrt{2}$. Il a été légitimé huit fois plus vite.

imaginaire : Le mot est de **René Descartes**, dans le Livre III de *La Géométrie* (1637) : « ni les vraies ni les fausses racines ne sont toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires ». Il voulait dire : qui n'existe que dans l'imagination. Le mot est resté, le mépris aussi. Gauss proposera « complexe » en 1831.

Deux marches sur cinq ne sont pas des crises. Les lignes 1, 4 et 5 sont des ruptures historiques, datées et documentées. Les lignes 2 et 3 ne le sont pas : ce sont des marches scolaires. Historiquement, les fractions précèdent les décimaux de plusieurs millénaires, et l'écriture décimale ne s'impose qu'avec Simon Stevin en 1585. L'escalier ci-après range les ensembles par inclusion, pas par ordre d'apparition.

Le refus des négatifs n'est pas universel. Les mathématiciens chinois les manipulent dès l'Antiquité au moyen de baguettes de deux couleurs, et Brahmagupta donne en 628 les règles complètes du calcul sur les dettes. C'est l'Europe qui a résisté le plus longtemps, et c'est en Europe que le vocabulaire du mépris s'est fixé.

JALON

C'est ici la thèse du chapitre. Tout ce qui suit en découle.

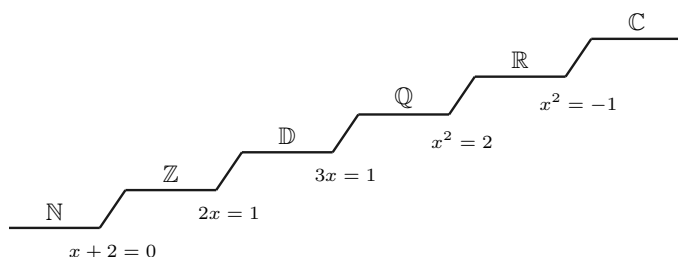
Précision d'honnêteté : Hamilton construit $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$, qu'il prend comme donné. Ce qui est arrivé en second, ce n'est pas la construction de $\mathbb{C}$, c'est la réduction de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Q}$. L'ordre des deux dates n'en est pas moins réel, et la leçon non plus.

Remarque – L'ordre des choses

En mathématiques, un objet est presque toujours **rencontré** avant d'être **fondé**. On le croise en calculant, on s'en sert parce qu'il marche, et la théorie qui lui donne un sens arrive en dernier, parfois des siècles plus tard.

Ce n'est pas un accident de l'histoire, c'est le mode de fonctionnement normal de la discipline. Attendre d'avoir la théorie pour oser le calcul, c'est n'inventer jamais rien.

C'est exactement le trajet que ce chapitre va refaire, dans cet ordre : le **besoin** (section 2), l'**objet** (section 3), la **théorie** (section 4). Vous rencontrerez i avant qu'on vous le définisse, et vous le définirez avant de savoir qu'il est unique.



*chaque marche naît d'une équation
que la précédente ne sait pas résoudre*

Attention – Ce que ce chapitre ne dira pas

Vous lirez parfois que les nombres complexes ont été inventés « pour résoudre $x^2 + 1 = 0$ ». C'est faux, et c'est un mauvais argument. Rien n'oblige une équation à avoir une solution : $x + 2 = 0$ n'en a pas dans $\mathbb{N}$, et personne n'en fait un drame. Si $x^2 + 1 = 0$ avait été le seul motif, on aurait haussé les épaules pendant trois siècles de plus.

Ce qui a forcé la main des mathématiciens est tout autre, et c'est l'objet de la section suivante.

2. LE SCANDALE DE CARDAN

2.1. Un secret, un serment, un procès

CONTEXTE HISTORIQUE – BOLOGNE, VENISE, MILAN, 1515-1548

Vers 1515, à Bologne, **Scipione del Ferro** découvre comment résoudre les équations de la forme $x^3 + px = q$ à coefficients positifs. Il n'en publie rien. À cette époque, les mathématiciens italiens s'affrontent en défis publics devant témoins, et les postes universitaires se gagnent ainsi : une méthode que l'on est seul à connaître est un capital. Sur son lit de mort, del Ferro transmet le secret à son élève **Antonio Maria Fior**.

En 1535, Fior défie **Niccolò Tartaglia**, qui a retrouvé la méthode par lui-même. Fior est écrasé : il ne sait résoudre qu'un seul type d'équations, Tartaglia les résout toutes.

OBJECTIFS

Établir la formule de résolution du troisième degré, et constater qu'elle impose un passage par des racines carrées de nombres négatifs pour atteindre des solutions parfaitement réelles.

En 1539, **Jérôme Cardan** obtient de Tartaglia la méthode, sous serment de ne jamais la publier. Six ans plus tard, ayant découvert que del Ferro l'avait trouvée le premier, Cardan s'estime délié et publie tout dans l'*Ars Magna* (1545), en citant ses deux prédécesseurs. Tartaglia crie à la trahison. Le conflit se règle en 1548 par un défi public à Milan, où Tartaglia affronte non pas Cardan, mais son élève **Ludovico Ferrari**, qui a de son côté résolu le quatrième degré. Tartaglia y perd sa réputation.

L'Ars Magna est le premier livre à publier la résolution des équations de degré 3 et 4. C'est aussi le premier à écrire, sans y croire, des racines carrées de nombres négatifs.

Cardan, 1545

2.2. La formule

L'idée de del Ferro tient en une phrase : ne pas chercher x , mais chercher deux nombres dont x est la somme. Deux inconnues au lieu d'une, c'est une liberté de plus, et c'est elle qui débloque tout.

THÉORÈME – FORMULE DE DEL FERRO-CARDAN

Soient $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. Si le nombre $\Delta_C = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ est positif ou nul, alors le réel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta_C}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta_C}}$$

est solution de l'équation $x^3 = px + q$.

← PRÉREQUIS

1^{re} spé · Somme et produit des racines

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $T^2 - ST + P = 0$. C'est le pivot de toute la démonstration.

Démonstration.

Posons $x = u + v$, où $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$ sont à déterminer. Pour tous $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$, le développement du cube donne

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3,$$

c'est-à-dire $x^3 = 3uv \cdot x + (u^3 + v^3)$.

Il suffit donc, pour que $x = u + v$ soit solution de $x^3 = px + q$, que le couple $(u; v)$ vérifie les **deux** conditions

$$3uv = p \quad \text{et} \quad u^3 + v^3 = q.$$

La première donne $uv = \frac{p}{3}$, donc $u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Les deux nombres u^3 et v^3 ont ainsi une somme et un produit connus : ce sont les racines de

$$T^2 - qT + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4\Delta_C$. Il est donc du signe de Δ_C , et lorsque $\Delta_C \geq 0$ les racines sont $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta_C}$.

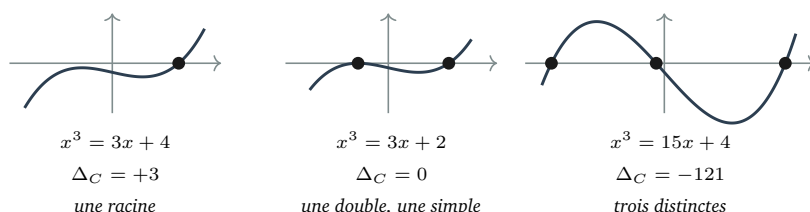
En prenant pour u et v les racines cubiques réelles de ces deux nombres, on obtient bien $u^3 + v^3 = q$; et comme le cube est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, l'égalité $u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ entraîne $uv = \frac{p}{3}$, donc $3uv = p$. Les

deux conditions sont vérifiées, et $x = u + v$ est solution. ■

La condition $3uv = p$ n'est pas décorative : elle est ce qui autorise à conclure. Un couple qui ne vérifierait que $u^3 + v^3 = q$ ne dirait rien de l'équation.

2.3. Trois régimes, et un seul qui pose problème

Tout est suspendu au signe de Δ_C . Voici les trois cas, sur trois équations qui ne diffèrent que par leurs coefficients.



Le signe de Δ_C commande donc la méthode. Mais il commande aussi, et c'est beaucoup moins attendu, la *nature des solutions*. C'est un théorème, et il se démontre entièrement avec les outils de terminale.

THÉORÈME – LE CRITÈRE, ET CE QU'IL MESURE VRAIMENT

Soient $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. Pour l'équation $x^3 = px + q$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

- $\Delta_C = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$;
- l'équation possède **trois racines réelles distinctes**.

Or Δ_C est exactement la quantité placée sous le radical dans la formule de del Ferro-Cardan : **la méthode exige une racine carrée de nombre négatif précisément quand les trois solutions sont réelles et distinctes**.

Démonstration.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - px - q$. Les racines de l'équation sont exactement les zéros de f . La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - p$.

Premier cas : $p \leq 0$. Alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et f' ne s'annule qu'au plus en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle a donc au plus un zéro, et l'équation n'a pas trois racines distinctes. Par ailleurs $-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$, donc $\Delta_C \geq 0$. Les deux énoncés sont faux simultanément : l'équivalence est vérifiée.

Second cas : $p > 0$. Posons $c = \sqrt{\frac{p}{3}}$, de sorte que $c > 0$ et $p = 3c^2$. Alors $f'(x) = 3(x^2 - c^2)$: la fonction f est croissante sur $]-\infty; -c[$, décroissante sur $[-c; c]$, puis croissante sur $]c; +\infty[$. Elle admet donc un maximum local en $-c$ et un minimum local en c .

Comme f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie sur chaque intervalle donnent : f possède trois zéros distincts si et seulement si $f(-c) > 0$ et $f(c) < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $f(-c)f(c) < 0$.

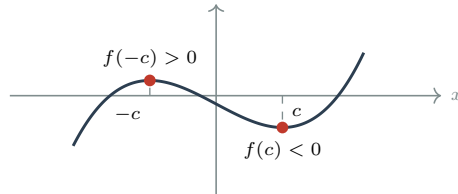
Calculons ce produit. En remplaçant p par $3c^2$,

$$f(c) = c^3 - 3c^2c - q = -2c^3 - q, \quad f(-c) = -c^3 + 3c^2c - q = 2c^3 - q,$$

d'où

$$f(-c)f(c) = (2c^3 - q)(-2c^3 - q) = q^2 - 4c^6 = q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4\Delta_C.$$

Conclusion. $f(-c)f(c) < 0$ équivaut à $4\Delta_C < 0$, donc à $\Delta_C < 0$.
L'équivalence est établie dans les deux cas. ■



le maximum local au-dessus de l'axe, le minimum local en dessous :
trois zéros, et $f(-c)f(c) = 4\Delta_C < 0$

Attention – Le mot « distinctes » n'est pas une précaution de style

Il est indispensable. L'équation $x^3 = 3x + 2$ a pour critère $1 - 1 = 0$ et se factorise en $(x+1)^2(x-2)$: elle a bien trois racines réelles *comptées avec leur multiplicité*, et pourtant la formule ne réclame aucune racine carrée de nombre négatif, puisque $\sqrt{0} = 0$. C'est le cas du milieu de la planche des trois régimes, en tête de ce paragraphe : le maximum local y touche l'axe au lieu de le franchir, et $f(-c)f(c) = 0$.

2.4. Le scandale

Prenons donc le troisième cas, celui de l'*Ars Magna* :

$$(F) : x^3 = 15x + 4.$$

Cette équation n'a rien de mystérieux. Sa courbe coupe l'axe des abscisses trois fois. Ses trois racines sont réelles : 4, $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$, comme le montre la factorisation $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$. Et la plus visible des trois est l'entier 4, que l'on trouve de tête.

Appliquons-lui pourtant la formule. Ici $p = 15$ et $q = 4$, donc

$$\Delta_C = 2^2 - 5^3 = 4 - 125 = -121,$$

et la formule réclame $\sqrt{-121}$.

Remarque – Ce qui est proprement scandaleux

Il ne s'agit pas d'une équation sans solution à laquelle on répondrait par un objet imaginaire. Il s'agit d'une équation dont **toutes** les solutions sont réelles, dont l'une est entière, et que la seule méthode *générale* dont on

♦ Pour qui connaît le discriminant d'une cubique : en écrivant l'équation sous la forme $x^3 + Px + Q = 0$ avec $P = -p$ et $Q = -q$, on a $\Delta = -4P^3 - 27Q^2$, et un calcul direct donne $\Delta_C = -\frac{\Delta}{108}$. La condition $\Delta_C < 0$ équivaut donc à $\Delta > 0$, qui est la condition classique de trois racines réelles distinctes.

disposait au XVI^e siècle ne sait atteindre qu'en passant par une racine carrée de nombre négatif.

L'impossible n'est pas la destination : c'est le passage.

Soyons précis, car le point est délicat. Sur cette équation-ci, on peut se passer de la formule : 4 se lit à l'œil, et la section 2.6 le dira sans détour. Ce qui est scandaleux, c'est qu'une méthode *universelle*, la seule connue, exige l'impossible là où la réponse est un entier. Et la section 2.6 montrera qu'il existe des équations, d'apparence identique, où l'on ne peut plus tricher.

2.5. La pensée sauvage de Bombelli

Vingt-cinq ans après Cardan, Bombelli fait ce que personne n'avait osé : il accepte de calculer avec ces quantités interdites, en supposant qu'elles obéissent aux règles ordinaires et que le carré de $\sqrt{-1}$ vaut -1 . Beaucoup, écrira-t-il, tiendront cela pour une pensée sauvage, et lui-même en a longtemps jugé ainsi, avant de chercher jusqu'à trouver la preuve.

Rafael Bombelli, ingénieur hydraulicien, mène ces calculs dans les années 1550 pendant une interruption du chantier d'assèchement de la Val di Chiana. Son Algebra ne paraîtra qu'en 1572.

Bombelli

Exemple – Le calcul qui a tout changé

On cherche les deux racines cubiques qu'exige la formule sous la forme $a \pm b\sqrt{-1}$. En développant, on trouve

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

Or $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$. Vérifions alors les **deux** conditions de la méthode pour le couple $(u; v) = (2 + \sqrt{-1}; 2 - \sqrt{-1})$. La première, celle qui porte sur le produit :

$$uv = (2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1}) = 4 - (-1) = 5, \quad \text{donc} \quad 3uv = 15 = p.$$

La seconde, celle qui porte sur la somme des cubes :

$$u^3 + v^3 = (2 + 11\sqrt{-1}) + (2 - 11\sqrt{-1}) = 4 = q.$$

Les deux conditions étant satisfaites, la formule s'applique et donne

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = \boxed{4}.$$

Les deux quantités interdites se sont annulées. On est parti du réel, on a traversé l'impossible, et on est revenu dans le réel avec la bonne réponse, celle qu'on voyait dès le départ. C'est ce trajet, et lui seul, qui a fini par imposer les nombres complexes.

2.6. ★ Ce détour, peut-on l'éviter ?

La question est légitime, et la réponse demande de la précision.

Sur l'équation (F) , **oui**. Son polynôme se factorise sur $\mathbb{Q}$, la racine 4 est rationnelle et se lit à l'œil : nul besoin de la formule. Il serait malhonnête de prétendre le contraire.

PORTAIL ACT

ACT-C1 · Phases 1–4 ★

Le secret de del Ferro rejoué à la maison : une méthode qui marche sur la première équation, se brise sur la seconde, se sauve par une quantité interdite, et le critère qui départage les deux cas. ■

Mais changeons à peine l'équation.

THÉORÈME – CAS IRRÉDUCTIBLE, DÉMONTRÉ PAR WANTZEL EN 1843

Soit une équation du troisième degré à coefficients rationnels, **irréductible sur $\mathbb{Q}$** , possédant **trois racines réelles**. Alors aucune de ses racines ne peut s'écrire au moyen d'un nombre fini de radicaux portant sur des nombres réels.

Prenons $x^3 = 6x + 2$, c'est-à-dire $x^3 - 6x - 2 = 0$. Rien ne la distingue, à l'œil, de celle de Cardan.

Trois racines réelles. Son critère vaut $\Delta_C = 1^2 - 2^3 = -7 < 0$: par le théorème du § 2.3, elle possède trois racines réelles distinctes.

Irréductible sur $\mathbb{Q}$. Si ce polynôme unitaire à coefficients entiers avait une racine rationnelle, celle-ci serait un entier divisant le terme constant -2 , donc l'un des quatre nombres $1, -1, 2, -2$. Or

$$f(1) = -7, \quad f(-1) = 3, \quad f(2) = -6, \quad f(-2) = 2,$$

et aucun n'est nul. Le polynôme n'a donc pas de racine rationnelle ; comme il est de **degré 3**, une factorisation non triviale sur $\mathbb{Q}$ ferait nécessairement apparaître un facteur de degré 1, donc une racine rationnelle. Il est irréductible.

Les deux hypothèses sont réunies. Pour cette équation-là, le détournement par l'impossible n'est pas un manque d'astuce : il est **démontrablement inévitable**.

Attention – Ce que le théorème ne dit pas

Il interdit d'écrire les racines *avec des radicaux réels*. Il n'interdit pas de les atteindre par des moyens réels : François Viète a donné, dès la fin du XVI^e siècle, une solution de ces équations au moyen du cosinus et de l'arc cosinus, qui ne fait intervenir aucune racine carrée de nombre négatif. Ce n'est pas une formule à radicaux, c'est tout.

On dit casus irreducibilis. Ne l'appellez pas « théorème de Wantzel » tout court : en France, ce nom désigne son autre résultat, le critère de constructibilité à la règle et au compas (1837), que nous croiserons en C3 à propos du pentagone régulier.

ÉCHO EXO

EXO-C1 · Ex. 24–27 ★★★★★

Sur les traces de Cardan : deux cubiques jumelles dont une seule impose le détour, la solution trigonométrique de Viète qui l'évite sans radical imaginaire, et le quatrième degré de Ferrari ramené au troisième. ◆ ♦ ★

3. LE QUART DE TOUR

Bombelli a montré qu'on pouvait *calculer* avec $\sqrt{-1}$. Il n'a pas dit ce que c'était. Pendant deux siècles et demi, personne ne le dira. Puis, en 1797, un arpenteur norvégien nommé **Caspar Wessel** prend le problème par l'autre bout.

3.1. La question de Wessel

Sa question n'est pas « qu'est-ce que $\sqrt{-1}$? ». Elle est : *peut-on faire des points du plan des nombres ?*

OBJECTIFS

Fabriquer l'objet lui-même. Non pas décréter qu'il existe un nombre de carré -1 , mais chercher à multiplier les points du plan et découvrir que le quart de tour en est un.

Additionner deux points du plan, on sait déjà le faire : c'est l'addition des vecteurs, et elle ne pose aucun problème. Toute la difficulté est ailleurs. Elle tient en un mot : comment **multiplier** deux points du plan ?

3.2. Le chaînon d'or : la droite le fait déjà

Avant d'inventer quoi que ce soit, regardons ce que la multiplication fait sur la droite des réels, c'est-à-dire dans le monde que nous connaissons. Multiplier par 2, c'est dilater d'un facteur 2. Multiplier par $\frac{1}{3}$, c'est contracter. Et multiplier par -1 ? Cela envoie 1 sur -1 , 5 sur -5 : cela retourne la droite. Autrement dit, **multiplier par -1 , c'est faire un demi-tour**.

Remarque – La multiplication est déjà une affaire de longueur et d'angle

Sur la droite réelle, multiplier par un réel **non nul** k revient toujours à composer deux gestes : un changement de longueur (le facteur $|k|$) et une rotation (l'identité si $k > 0$, le demi-tour si $k < 0$).

Si l'on ne voit pas cela d'ordinaire, c'est qu'avec un seul axe, il n'existe que **deux** angles disponibles : 0° et 180° . Le plan, lui, en offre une infinité.

Le cas $k = 0$ est à part, et le restera : multiplier par 0 écrase tout sur l'origine, et l'origine n'a pas d'angle. C'est pourquoi tout ce qui suit parle de points **distincts de l'origine**.

C'est le point de bascule de tout le chapitre. On ne va rien demander de neuf au plan : on va lui demander exactement ce que la droite fait déjà, en profitant du fait qu'il a plus de place.

3.3. Deux exigences, et i apparaît

Imposons donc à notre multiplication les deux propriétés que la droite possède déjà.

DÉFINITION – LES DEUX EXIGENCES DE WESSEL

On cherche à définir un produit de points du plan tel que, pour deux points quelconques **distincts de l'origine** :

- les **longueurs se multiplient** : la distance à l'origine du produit est le produit des distances à l'origine ;
- les **angles s'ajoutent** : l'angle du produit avec l'axe horizontal est la somme des angles.

Voyons ce que ces deux exigences entraînent. Notons ε le point situé à la distance 1 de l'origine, sur l'axe vertical, c'est-à-dire à l'angle 90° .

THÉORÈME – LE QUART DE TOUR EST UNE RACINE CARRÉE DE -1

Sous les deux exigences ci-dessus, le point ε vérifie

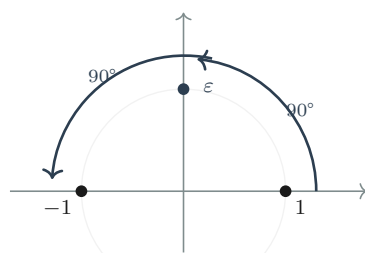
$$\varepsilon^2 = -1.$$

Un point du plan distinct de l'origine est entièrement déterminé par le couple formé de sa distance à l'origine et de son angle, celui-ci n'étant défini qu'à un tour près. C'est ce repérage polaire qui rend la démonstration ci-dessous concluante : sans lui, on saurait quelle distance et quel angle a le produit, mais pas de quel point il s'agit.

Démonstration.

Le produit $\varepsilon \times \varepsilon$ a pour distance à l'origine $1 \times 1 = 1$, et pour angle $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Or il n'existe qu'un seul point à la distance 1 de l'origine et à l'angle 180° : c'est le point d'abscisse -1 sur l'axe horizontal, c'est-à-dire le réel -1 . Donc $\varepsilon^2 = -1$. ■



deux quarts de tour font un demi-tour : $\varepsilon \times \varepsilon = -1$

Remarque – Ce qui vient de se passer

Nous n'avons pas décrété l'existence d'un nombre de carré -1 . Nous avons demandé au plan de se comporter comme la droite, et nous avons **trouvé** un tel nombre : le quart de tour.

Et l'égalité $i^2 = -1$, qui semblait un défi au bon sens, se lit désormais : *deux quarts de tour font un demi-tour*. Un élève de sixième comprend cet énoncé.

i : La lettre est d'**Euler** (1777, publiée en 1794), pour imaginarius. Wessel écrivait ε , Bombelli disait più di meno, « plus de moins ».

3.4. Le produit n'est pas choisi : il est forcé

Une fois i acquis, tout point du plan s'écrit $a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont ses deux coordonnées. Reste à savoir comment multiplier deux telles écritures. Or il n'y a plus rien à choisir : les règles ordinaires du calcul décident seules.

MÉTHODE – LE PRODUIT, OBTENU EN TROIS LIGNES

Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bd i^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc) i.\end{aligned}$$

Remarque – Sur la prétendue bizarrerie de cette formule

On présente souvent la loi qui, à deux couples $(a ; b)$ et $(c ; d)$ de réels, associe le couple $(ac - bd ; ad + bc)$, comme une définition étrange, tombée du ciel, qu'il faudrait admettre.

Elle n'est ni étrange ni arbitraire. Trois règles, et trois seulement, ont été employées au calcul ci-dessus : la **distributivité** (pour développer), l'**associativité** et la **commutativité** de la multiplication (pour regrouper $bi \times di$ en $bd i^2$). Une fois ces trois règles exigées et $i^2 = -1$ posé, **aucun autre produit n'est possible**.

Retenez la liste : ce sont exactement les trois règles auxquelles il faudra renoncer, en partie, pour franchir la dimension 4 à la section 6.

3.5. Un écho vieux de quinze siècles

Le plus troublant reste à dire. Cette formule n'était pas neuve en 1797. Elle traînait dans les mathématiques depuis l'Antiquité, sous un tout autre déguisement.

CONTEXTE HISTORIQUE – DIOPHANTE, *Arithmétique* III.19, VERS 250

Diophante d'Alexandrie observe que le produit de deux sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés, et il l'exploite sur $65 = 5 \times 13$. C'est Brahmagupta, puis Fibonacci, qui en donneront la forme générale : pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Brahmagupta la donne en 628, Fibonacci l'introduit en Europe en 1225. Aucun des trois n'a la moindre idée des nombres complexes.

CIBLE DA

DM-C1.1 · Prologue et parties I–IV
★★★

Le théorème de Noël : l'identité qui suit devient un anneau, $\mathbb{Z}[i]$ y hérite d'une division euclidienne, Bézout et le lemme d'Euclide lui survivent, et Fermat obtient enfin sa preuve. ♦

Regardez les deux membres de droite : $ac - bd$ et $ad + bc$ sont exactement les deux coordonnées du produit obtenu plus haut. Cette identité arithmétique est, sans que personne l'ait su pendant quinze siècles, la loi de multiplication du plan complexe. Elle dira bientôt que le module d'un produit est le produit des modules, mais cela sera l'affaire du chapitre C2.

SUITE →

C2 · Module et argument

L'identité de Diophante y devient la multiplicativité du module ; les deux exigences de Wessel y deviennent la forme trigonométrique.

OBJECTIFS

Poser la théorie : définir $\mathbb{C}$ proprement, établir les règles de calcul, le conjugué, l'inverse, et dire honnêtement ce que l'on gagne et ce que l'on perd.

Pourquoi des couples plutôt qu'autre chose ? Parce que la section 3 a déjà répondu : c'est le plan qu'il fallait munir d'un produit, et un point du plan n'est rien d'autre qu'un couple de réels. La construction qui suit ne fait que mettre en formules ce que Wessel avait dessiné.

4. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

La section précédente a trouvé l'objet. Il reste à le fonder, c'est-à-dire à le définir sans rien demander à l'intuition. C'est ce qu'a fait **William Rowan Hamilton** en 1837, dans un mémoire dont le but affiché était de débarrasser $\sqrt{-1}$ de ce qu'il appelait ses pierres d'achoppement métaphysiques.

4.1. Pourquoi des couples, et non un symbole de plus

Avant la définition, une mise au point, car c'est ici que la plupart des exposés trichent.

La tentation est d'écrire : on ajoute à $\mathbb{R}$ un symbole i vérifiant $i^2 = -1$, et on calcule. Cette phrase ne définit rien. Elle **postule** l'existence d'un objet et sa bonne conduite, sans dire dans quel ensemble il vit, ni pourquoi les règles de calcul lui survivraient. C'est le procédé qu'on reprocherait à un élève.

La méthode d'Hamilton fait exactement l'inverse. On ne postule rien : on **construit** un ensemble dont on connaît déjà tous les éléments, à savoir les couples de réels ; on y définit deux opérations par des formules explicites qui ne parlent que de réels ; et l'on *démontre* ensuite que le résultat contient une copie fidèle de $\mathbb{R}$ et un élément de carré -1 . Aucun objet mystérieux n'entre en jeu : les nombres complexes sont des couples de nombres que vous manipulez depuis la seconde.

4.2. Définition

DÉFINITION – L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$

On appelle **ensemble des nombres complexes**, et l'on note $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des couples de réels, muni des deux opérations suivantes : pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$,

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d),$$
$$(a; b) \times (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$$

Tout est dit dans ces deux lignes, et tout y est vérifiable : elles ne font intervenir que des sommes et des produits de réels.

La seconde ligne n'est pas une invention d'Hamilton : c'est la formule obtenue en § 3.4 par les trois règles ordinaires du calcul, et c'est l'identité de Diophante. On ne fait ici que la prendre comme définition au lieu de la déduire, pour n'avoir plus rien à supposer.

4.3. $\mathbb{C}$ est un corps commutatif

THÉORÈME – STRUCTURE DE $\mathbb{C}$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{C}$ est un **corps commutatif**. Autrement dit : l'addition est associative, commutative, admet $(0; 0)$ pour élément neutre et tout élément admet un opposé ; la multiplication est associative, commutative, admet $(1; 0)$ pour élément neutre et **tout élément non nul est inversible** ; enfin la multiplication est distributive sur l'addition.

Démonstration.

Les propriétés de l'addition sont immédiates : elle se fait coordonnée par coordonnée et hérite donc de celles de l'addition dans $\mathbb{R}$, l'opposé de $(a; b)$ étant $(-a; -b)$.

***Commutativité du produit.** La formule $(ac - bd; ad + bc)$ est inchangée quand on échange les deux couples, puisque $ca - db = ac - bd$ et $cb + da = ad + bc$.*

***Élément neutre.** Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,*

$$(a; b) \times (1; 0) = (a \times 1 - b \times 0; a \times 0 + b \times 1) = (a; b).$$

***Distributivité.** Pour tous réels a, b, c, d, e, f :*

$$(a; b) \times [(c; d) + (e; f)] = (a; b) \times (c + e; d + f),$$

qui vaut, par définition du produit,

$$(a(c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)).$$

En développant chaque coordonnée, puis en regroupant les termes deux par deux, ce couple s'écrit

$$((ac - bd) + (ae - bf); (ad + bc) + (af + be)),$$

c'est-à-dire exactement $(a; b)(c; d) + (a; b)(e; f)$.

Associativité du produit. Le même calcul, mené des deux côtés, donne pour $[(a; b)(c; d)](e; f)$ comme pour $(a; b)[(c; d)(e; f)]$ le couple

$$(ace - adf - bcf - bde; acf + ade + bce - bdf).$$

Inversibilité. C'est le seul point qui demande une idée, et il fait l'objet du § 4.7 : le conjugué en fournira la formule. ■

4.4. $\mathbb{R}$ vit dans $\mathbb{C}$: ce que « identifier » veut dire

On veut dire que $\mathbb{R}$ est « contenu » dans $\mathbb{C}$. Or c'est faux au sens strict : un réel n'est pas un couple. Ce que l'on peut affirmer, et démontrer, est à la fois plus subtil et plus fort.

THÉORÈME – PLONGEMENT DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{C}$

L'application φ qui à tout réel a associe le couple $(a; 0)$ est **injective** et respecte les deux opérations : pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{et} \quad \varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b).$$

Démonstration.

Injectivité. Si $\varphi(a) = \varphi(b)$, alors $(a; 0) = (b; 0)$, donc $a = b$ par égalité des couples.

Somme. $\varphi(a) + \varphi(b) = (a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0) = \varphi(a + b)$.

Produit. En appliquant la définition,

$$\varphi(a) \varphi(b) = (a; 0)(b; 0) = (ab - 0 \times 0; a \times 0 + 0 \times b) = (ab; 0) = \varphi(ab).$$

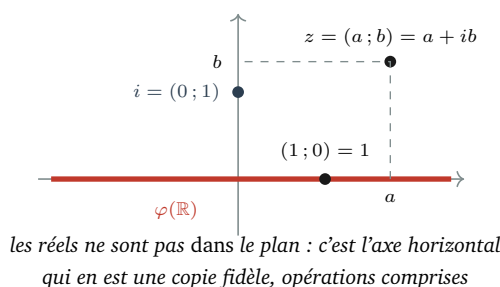
← PRÉREQUIS

Vocabulaire des structures

Une application entre deux ensembles munis d'opérations, et qui *respecte* ces opérations, s'appelle un **morphisme**. Si elle est de plus injective, on parle de **plongement** : le premier ensemble se retrouve à l'identique, opérations comprises, à l'intérieur du second.

Remarque – Ce que l'identification veut dire, exactement

L'ensemble $\varphi(\mathbb{R})$ des couples de la forme $(a; 0)$ est une **copie exacte** de $\mathbb{R}$ à l'intérieur de $\mathbb{C}$: mêmes éléments à un renommage près, et surtout mêmes résultats pour les deux opérations. Additionner deux réels puis les plonger, ou les plonger puis les additionner dans $\mathbb{C}$, donne le même couple. C'est cela, et rien d'autre, qu'on veut dire en « identifiant » le couple $(a; 0)$ au réel a , et en écrivant $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. La vérification faite, on s'autorise l'abus de notation et l'on écrit a au lieu de $(a; 0)$.



4.5. Forme algébrique

La construction a fait son travail : nous disposons d'un ensemble, de deux opérations, et d'une copie fidèle de $\mathbb{R}$ à l'intérieur. Il reste à produire celui pour qui tout ce chapitre a été écrit. Ne cherchez pas loin : il est sous vos yeux depuis la définition du § 4.2, et c'est le couple le plus simple qu'on puisse écrire après $(1; 0)$.

DÉFINITION – LE NOMBRE i

On pose $i = (0; 1)$.

PROPRIÉTÉ – FORME ALGÈBRE

Le nombre i vérifie $i^2 = -1$, et tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

Le réel a est la **partie réelle** de z , notée $\operatorname{Re}(z)$; le réel b est sa **partie imaginaire**, notée $\operatorname{Im}(z)$. C'est un réel, pas un complexe.

Démonstration.

D'abord, en appliquant la définition du produit,

$$i^2 = (0; 1) \times (0; 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1; 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1; 0) = \varphi(-1),$$

*c'est-à-dire -1 après identification. L'objet dont on postulait naguère l'existence est donc **exhibé** : c'est le couple $(0; 1)$, et rien de plus mystérieux.*

Existence de l'écriture. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$a + ib = (a; 0) + (0; 1)(b; 0) = (a; 0) + (0; b) = (a; b),$$

donc tout couple, c'est-à-dire tout complexe, s'écrit bien sous cette forme.

Unicité. Supposons $a + ib = a' + ib'$ avec a, b, a', b' réels. D'après le calcul précédent, cela s'écrit $(a; b) = (a'; b')$, donc $a = a'$ et $b = b'$ par égalité des couples. ■

Remarque – Le renversement à retenir

Dans l'exposé paresseux, i est une *hypothèse* : on suppose qu'il existe. Ici, i est une *conclusion* : on l'a construit, on peut le désigner du doigt sur la figure ci-dessus, et son carré se calcule en trois multiplications de réels.

C'est toute la différence entre postuler et fonder. Et c'est aussi ce qui autorise, à partir d'ici, à oublier les couples : ils ont fait leur office, la notation $a + ib$ prend le relais.

Attention – Deux fautes qui coûtent cher

$\text{Im}(3 - 5i) = -5$, et non $-5i$: la partie imaginaire est un **réel**.

Et l'unicité de l'écriture n'a de sens que si a, b sont réels. L'égalité $z = a + ib$ ne permet d'identifier les parties réelle et imaginaire que sous cette condition, à vérifier avant d'écrire quoi que ce soit.

4.6. Le conjugué

Il manque encore une chose à $\mathbb{C}$ pour mériter son nom de corps. Vous savez y additionner, soustraire et multiplier ; vous ne savez pas encore y *diviser*. L'outil qui va tout débloquent se définit en une ligne, et vous l'avez déjà rencontré sans le nommer : c'est le symétrique par rapport à l'axe des réels.

DÉFINITION – CONJUGUÉ

Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le **conjugué** de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

PROPRIÉTÉ – PROPRIÉTÉS DU CONJUGUÉ

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'}, \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n.$$

De plus $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$, et z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Démonstration.

Posons $z = a + ib$ et $z' = c + id$, avec a, b, c, d réels.

Somme. Comme $z + z' = (a + c) + i(b + d)$, on obtient

$$\overline{z + z'} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \bar{z} + \bar{z'}.$$

Produit. D'une part, le produit vaut $zz' = (ac - bd) + i(ad + bc)$, d'où

$$\overline{zz'} = (ac - bd) - i(ad + bc).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \bar{z} \bar{z'} &= (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc + i^2 bd \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc). \end{aligned}$$

Les deux expressions coïncident.

Puissance. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation en $n = 0$ est immédiate, les deux membres valant 1. Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$. Alors, en appliquant la propriété du produit à z^n et z ,

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \bar{z}^n \times \bar{z} = (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Caractérisations. $\bar{z} = z$ équivaut à $a - ib = a + ib$, donc à $2ib = 0$, donc à $b = 0$, c'est-à-dire à $z \in \mathbb{R}$. Le cas imaginaire pur est analogue, avec $a = 0$. ■

4.7. Inverse, quotient, et le mot « corps »

Voici l'usage annoncé, et c'est le dernier axiome qui manque à $\mathbb{C}$.

PROPRIÉTÉ – LE PRODUIT D'UN COMPLEXE PAR SON CONJUGUÉ

Pour tout $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$z \bar{z} = a^2 + b^2.$$

C'est un réel positif, nul si et seulement si $z = 0$.

Démonstration.

$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2 = a^2 + b^2$. Somme de deux carrés de réels, cette quantité est positive, et elle est nulle si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z = 0$. ■

THÉORÈME – INVERSE D'UN COMPLEXE NON NUL

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors z admet un inverse dans $\mathbb{C}$, donné par

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

C'est le dernier axiome qui manquait : $\mathbb{C}$ est bien un corps commutatif.

Démonstration.

Comme $z \neq 0$, la propriété précédente donne $z \bar{z} = a^2 + b^2 \neq 0$: c'est un réel strictement positif, donc inversible dans $\mathbb{R}$. Le nombre complexe $w = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$ est ainsi bien défini, et

$$z w = \frac{z \bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

La dernière écriture s'obtient en remplaçant $\bar{z}$ par $a - ib$. ■

← PRÉREQUIS

Spé A0 · Raisonnement par récurrence

La propriété du conjugué d'une puissance en est la première application du chapitre. Elle ne s'obtient pas autrement.

ÉCHO EXO

EXO-C1 · Ex. 1-7 ★★

Le calcul dans $\mathbb{C}$ en gammes : formes algébriques, conjugué mis à l'épreuve, quantité conjuguée pour diviser, puissances de $1 + i$ classées par restes, et trois systèmes en z et $\bar{z}$ dont l'un n'a pas de solution. ■

PROPRIÉTÉ – CONJUGUÉ D'UN INVERSE ET D'UN QUOTIENT

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul et tout $z' \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}.$$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. D'abord $\bar{z} \neq 0$: sinon $z\bar{z} = 0$, donc $z = 0$. Les deux membres ont donc un sens.

Partons de $z \times \frac{1}{z} = 1$ et appliquons la conjugaison. Le conjugué d'un produit étant le produit des conjugués, et $\bar{1} = 1$ puisque 1 est réel, il vient

$$\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1.$$

Ainsi $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ est l'inverse de $\bar{z}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\bar{z}}$.

Pour le quotient, on écrit $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ et l'on applique successivement la règle du produit puis celle de l'inverse :

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \bar{z}' \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{z}' \times \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}.$$

■

MÉTHODE – METTRE UN QUOTIENT SOUS FORME ALGÈBRIQUE

- ▷ 1. Multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.
- ▷ 2. Développer : le dénominateur devient un réel.
- ▷ 3. Séparer partie réelle et partie imaginaire.

Retenez le procédé plutôt que la formule : **on conjugue une égalité entière**. C'est le geste qui donne, en trois lignes et sans aucun calcul de coordonnées, toutes les règles de conjugaison qui manquent.

Exemple – Un quotient

$$\frac{3+2i}{1-4i} = \frac{(3+2i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{3+12i+2i+8i^2}{1^2+4^2} = \frac{-5+14i}{17},$$

soit

$$\frac{3+2i}{1-4i} = \boxed{-\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i}.$$

4.8. Ce que l'on perd

Un élargissement se paie. Il faut dire quoi, faute de quoi on ne mérite pas d'être cru sur ce que l'on gagne.

Le geste est exactement celui de la quantité conjuguée rencontrée en seconde pour rendre rationnel un dénominateur du type $1 + \sqrt{2}$. Même astuce, même identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$, autre terrain.

THÉORÈME – $\mathbb{C}$ N'EST PAS UN CORPS TOTALEMENT ORDONNÉ

Il n'existe sur $\mathbb{C}$ aucune relation d'ordre **total** qui prolonge celle de $\mathbb{R}$ et soit compatible avec les opérations, c'est-à-dire telle que, pour tous $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$:

- si $z \leq z'$, alors $z + w \leq z' + w$ (compatibilité avec l'addition) ;
- si $0 \leq z$ et $0 \leq z'$, alors $0 \leq z z'$ (compatibilité avec la multiplication).

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel ordre existe. Comme il est **total** et que $i \neq 0$, on a nécessairement $i > 0$ ou $i < 0$.

Premier cas : $i > 0$. La compatibilité avec la multiplication donne $i \times i \geq 0$, c'est-à-dire $-1 \geq 0$, ce qui contredit l'ordre de $\mathbb{R}$ que cette relation est censée prolonger.

Second cas : $i < 0$. La compatibilité avec l'addition, appliquée avec $w = -i$, transforme $i < 0$ en $0 < -i$. Le premier cas s'applique alors à $-i$: on obtient $(-i) \times (-i) \geq 0$, c'est-à-dire $i^2 \geq 0$, donc encore $-1 \geq 0$. Même contradiction.

Les deux cas étant impossibles, un tel ordre n'existe pas. ■

Les deux hypothèses servent, et chacune une fois : la seconde au premier cas, la première au second. C'est pourquoi elles figurent toutes deux à l'énoncé. Quant à la totalité, elle est ce qui autorise à écrire « soit $i > 0$, soit $i < 0$ » : un ordre partiel laisserait une troisième possibilité, celle où i et 0 ne sont pas comparables.

Attention – Une inégalité entre complexes n'a aucun sens

On n'écrit **jamais** $z \leq z'$ ni $z > 0$ pour des nombres complexes. C'est l'erreur la plus fréquente et la plus coûteuse du chapitre, parce qu'elle passe souvent inaperçue au milieu d'un calcul juste.

Les seules inégalités licites portent sur des *réels* construits à partir de complexes, comme $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, ou le module qui viendra en C2.

4.9. ★ Un seul objet, quatre portes

Nous avons construit $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples de réels. Wessel l'avait construit comme le plan muni d'une rotation. On peut aussi le construire comme un ensemble de matrices, ou comme un quotient de polynômes. Quatre constructions, quatre objets ?

Non. Un seul, et c'est un théorème.

THÉORÈME – UNICITÉ DE $\mathbb{C}$

Soit K un corps **commutatif** contenant $\mathbb{R}$, qui soit de plus un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, les deux structures étant compatibles au sens où le produit d'un réel et d'un élément de K coïncide avec le produit dans K .

Alors K est **isomorphe** à $\mathbb{C}$. Autrement dit, à un renommage près, il n'existe qu'un seul tel corps, et nous venons de le construire.

ÉCHO EXO

EXO-C1 · Ex. 19–23, 28–30 ★★★★★

La construction remise en cause, puis les belles histoires : l'identité de Diophante retournée, la conjugaison seule symétrie de $\mathbb{C}$, deux autres façons de multiplier le plan qui échouent chacune à sa manière, le corps $\mathbb{Q}(i)$ où la racine de 2 n'entre pas, et les entiers de Gauss. ♦ ★

Démonstration.

Soit K un tel corps. Nous allons y fabriquer un élément de carré -1 , puis construire l'isomorphisme.

Étape 1 : la famille $(1; j)$ est une base, pour tout $j \in K \setminus \mathbb{R}$. Comme K est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ y est de dimension 1, l'inclusion $\mathbb{R} \subset K$ est stricte : il existe $j \in K$ qui n'est pas réel. Montrons que la famille $(1; j)$ est libre. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda + \mu j = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors $j = -\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}$, ce qui est exclu; donc $\mu = 0$, puis $\lambda = 0$. La famille est libre, et comme $\dim_{\mathbb{R}} K = 2$, c'est une base.

Étape 2 : K contient un élément de carré -1 . L'élément j^2 se décompose dans cette base : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $j^2 = \alpha + \beta j$. Posons $u = j - \frac{\beta}{2}$. En développant,

$$u^2 = j^2 - \beta j + \frac{\beta^2}{4} = \alpha + \frac{\beta^2}{4},$$

qui est un réel, notons-le r . Si $r \geq 0$, alors $u^2 - r = 0$, donc $(u - \sqrt{r})(u + \sqrt{r}) = 0$; comme K est un corps, il n'a pas de diviseur de zéro, donc $u = \pm\sqrt{r} \in \mathbb{R}$, d'où $j \in \mathbb{R}$: exclu. Ainsi $r < 0$, et l'élément $i_K = \frac{u}{\sqrt{-r}}$ vérifie $i_K^2 = \frac{r}{-r} = -1$.

Étape 3 : l'isomorphisme. Par l'étape 1 appliquée à $j = i_K$, la famille $(1; i_K)$ est une base de K sur $\mathbb{R}$.

Soit alors f l'unique application $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{C}$ dans K telle que $f(1) = 1$ et $f(i) = i_K$. Elle envoie une base sur une base : elle est donc bijective. Et elle respecte le produit, car pour tous réels a, b, c, d :

$$\begin{aligned} f((a+bi)(c+di)) &= f((ac-bd) + (ad+bc)i) \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i_K \\ &= (a+bi_K)(c+di_K) \\ &= f(a+bi)f(c+di), \end{aligned}$$

la troisième égalité se développant exactement comme la première, puisqu'elle ne repose que sur $i^2 = i_K^2 = -1$ et sur la commutativité. C'est donc un isomorphisme de corps. ■

Deux remarques sur l'énoncé.

D'abord, l'existence n'est pas à démontrer : c'est tout le travail des paragraphes 4.1 à 4.4, et c'est $\mathbb{C}$ lui-même. Seule l'unicité reste. Ensuite, il est inutile d'exiger en plus l'existence d'un élément de carré -1 : le théorème montre qu'elle est automatique dès qu'on est en dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Remarque – La vraie réponse à « d'où vient i ? »

De nulle part en particulier, et c'est précisément ce qui le légitime. Chacune des constructions produit le même objet, à isomorphisme près. Il n'y a qu'un seul endroit d'où i puisse venir.

CONTEXTE HISTORIQUE – CAUCHY, 1847 : LA QUATRIÈME PORTE

Dans un mémoire de 1847, Cauchy propose de construire $\mathbb{C}$ autrement : on calcule sur les polynômes à coefficients réels, modulo $X^2 + 1$. Autrement dit, on décrète que $X^2 + 1 = 0$ et l'on regarde ce qui survit. Comme tout polynôme se réduit, par division euclidienne, à un reste de degré au plus 1, il ne subsiste que les écritures $a + bX$: on retrouve $\mathbb{C}$.

L'intérêt de cette porte est qu'elle ne suppose rien. On ne décrète pas l'existence de i : on quotiente, et i apparaît comme la classe de X .

Quatre portes, un seul objet. Retenez surtout que deux d'entre elles vous attendent ailleurs dans l'année, l'une en A1 et l'autre en M1 : vous les franchirez sans savoir, sur le moment, que vous revenez ici. Le travail de fondation, lui, s'arrête à cette page.

5. RÉSOUDRE DANS $\mathbb{C}$

Vous savez maintenant ce qu'est un nombre complexe, et vous savez calculer avec. Il est temps de s'en servir. Cette section est celle que le programme attend, et c'est aussi celle où le chapitre tient sa promesse : l'équation que Cardan jugeait subtile et inutile va enfin recevoir sa réponse, trois siècles après lui.

Mais avant de résoudre quoi que ce soit, il faut désamorcer un piège. Il est d'autant plus redoutable qu'il ne ressemble pas à une erreur : il ressemble à une habitude.

5.1. Le piège d'entrée : le symbole $\sqrt{}$

Attention – Ne jamais écrire $\sqrt{}$ devant un nombre négatif

La règle $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ n'est valable que pour des réels **positifs**. L'appliquer ailleurs donne

$$-1 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1,$$

ce qui est faux. **Convention de la maison** : on écrit $i\sqrt{5}$, jamais $\sqrt{-5}$.

5.2. Le second degré à coefficients réels

Voici le théorème vers lequel tout converge depuis la section 2. Lisez-le sans vous presser : il ne dit pas que l'équation possède des solutions *compliquées*, il dit qu'elle en possède **exactement deux**, et que la conjugaison du paragraphe précédent suffit à passer de l'une à l'autre.

THÉORÈME – ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ, CAS $\Delta < 0$

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ exactement deux

SUITE $\longrightarrow$

A1 · Divisibilité et congruences

Le mécanisme du quotient de Cauchy est *exactement* celui des congruences : $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ est à $\mathbb{R}[X]$ ce que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est à $\mathbb{Z}$. Vous le retrouverez, sur les entiers, au chapitre A1.

SUITE $\longrightarrow$

M1 · Matrices

La troisième porte : l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est une copie de $\mathbb{C}$, où le produit « tordu » n'est autre que le produit matriciel, et où i est la matrice du quart de tour. Nous y reviendrons en M1.

OBJECTIFS

Résoudre les équations du second degré à coefficients réels, factoriser les polynômes, et majorer leur nombre de racines.

L'erreur n'est pas une faute d'élève : Euler lui-même l'a commise dans un manuel, en écrivant $\sqrt{-2} \sqrt{-3} = \sqrt{6}$ au lieu de $-\sqrt{6}$.

Euler

solutions, conjuguées l'une de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration.

La forme canonique s'écrit, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Comme $\Delta < 0$, le réel $-\Delta$ est strictement positif et $\sqrt{-\Delta}$ existe. On a alors $\Delta = -(-\Delta) = i^2 (\sqrt{-\Delta})^2$, donc

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right],$$

puis, par différence de deux carrés,

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right).$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un d'eux l'est, ce qui donne les deux solutions annoncées. Elles sont distinctes car $\sqrt{-\Delta} \neq 0$, et conjuguées puisque a , b et $\sqrt{-\Delta}$ sont réels. ■

Exemple – Une équation, et le problème de Cardan de 1545

Réolvons $z^2 - 10z + 40 = 0$. Ici $\Delta = 100 - 160 = -60 < 0$, et $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$, d'où

$$z = \frac{10 \pm 2i\sqrt{15}}{2} = \boxed{5 \pm i\sqrt{15}}.$$

Cette équation n'est pas choisie au hasard : c'est le problème du chapitre XXXVII de l'*Ars Magna*, « partager 10 en deux parties dont le produit vaut 40 », et c'est le premier endroit de l'histoire où un mathématicien calcule avec des racines carrées de nombres négatifs. Cardan trouve ces deux nombres, vérifie que leur produit vaut bien $25 - (-15) = 40$, et conclut que le résultat est aussi subtil qu'inutile. Il aura fallu trois siècles pour lui donner tort.

5.3. Factoriser

Les trois résultats qui suivent forment un bloc, et il vaut mieux savoir où il mène avant d'y entrer : ils préparent la section 6, où l'on comptera les racines d'un polynôme quelconque. Le premier est un lemme de calcul, sans mystère ; le deuxième transforme une racine en facteur ; le troisième en tire la majoration annoncée. Chacun sert au suivant, et le dernier sert

L'activité de découverte avait déjà interdit cette règle, sans l'expliquer. Voici la raison : le symbole $\sqrt{}$ désigne, chez les réels positifs, l'unique racine positive. Hors de $\mathbb{R}^+$, « la » racine carrée n'existe pas : il y en a deux, et rien ne permet de les distinguer, puisque $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

ÉCHO EXO

EXO-C1 · Ex. 8–18 ★★★

Résoudre et factoriser : le second degré à $\Delta < 0$ en série, les racines carrées d'un complexe obtenues algébriquement, un paramètre qui bascule, les racines changées en facteurs, et le polynôme qui en a trop. ■ ♦ ★

au théorème qui clôt le chapitre.

PROPRIÉTÉ – FACTORISATION DE $z^n - a^n$

Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \geq 1$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^n - a^n &= (z - a) (z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \cdots + a^{n-1}) \\ &= (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Démonstration.

Développons le produit de droite. Il vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} z^{n-1-k}.$$

Dans la seconde somme, posons $j = k + 1$, de sorte qu'elle devient $\sum_{j=1}^n a^j z^{n-j}$. Les deux sommes portent alors sur les mêmes termes $a^j z^{n-j}$, la première pour j variant de 0 à $n - 1$, la seconde de 1 à n . Tous les termes intermédiaires se détruisent, et il ne reste que le terme $j = 0$ de la première, soit z^n , moins le terme $j = n$ de la seconde, soit a^n . ■

THÉORÈME – RACINE ET FACTORISATION

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Si $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) Q(z)$.

Démonstration.

Écrivons $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$. Comme $P(a) = 0$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{k=0}^n c_k (z^k - a^k).$$

Le terme $k = 0$ est nul. Pour chaque $k \geq 1$, la propriété précédente factorise $z^k - a^k$ par $z - a$. En mettant $z - a$ en facteur dans toute la somme, on obtient $P(z) = (z - a) Q(z)$, où Q est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $c_n z^{n-1}$: il est bien de degré $n - 1$, puisque $c_n \neq 0$. ■

THÉORÈME – MAJORATION DU NOMBRE DE RACINES

Un polynôme non nul de degré n à coefficients complexes admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Un polynôme de degré 0 est une constante non nulle : il n'a aucune racine, donc au plus 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que tout polynôme non nul de degré n ait au plus n racines distinctes. Soit P un polynôme de degré $n + 1$. S'il n'a aucune racine, la conclusion est acquise. Sinon, soit a une racine de P : le théorème précédent donne $P(z) = (z - a)Q(z)$ avec Q de degré n . Si b est une racine de P distincte de a , alors $(b - a)Q(b) = 0$ avec $b - a \neq 0$, donc $Q(b) = 0$ puisque $\mathbb{C}$ est un corps et n'a donc pas de diviseur de zéro. Toute racine de P autre que a est ainsi racine de Q , qui en a au plus n par hypothèse de récurrence. P a donc au plus $n + 1$ racines distinctes.

Conclusion. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

L'argument décisif est que $\mathbb{C}$ est un **corps** : c'est là que sert la section 4. Dans un ensemble où un produit de facteurs non nuls pourrait être nul, la majoration tombe en défaut, et il existe de tels ensembles.

6. LÀ OÙ L'ESCALIER S'ARRÊTE

6.1. Le miracle

Nous avons ajouté une racine, celle de $X^2 + 1$. On pouvait craindre d'avoir à recommencer : une nouvelle équation sans solution, un nouvel élargissement, et ainsi de suite sans fin. Il n'en est rien.

THÉORÈME – THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS, ADMIS

Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Par factorisations successives, il en admet donc exactement n , comptées avec leur multiplicité.

Remarque – Ce que cela veut dire

On a ajouté une seule racine, et on les a **toutes**. L'escalier de la section 1 ne monte pas plus haut : aucune équation polynomiale ne réclamera jamais de nombres au-delà de $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.

Rien ne garantissait un tel dénouement. La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, par comparaison, ne s'obtient pas en ajoutant un nombre fini de racines : il en faut une infinité.

OBJECTIFS

Comprendre pourquoi la suite des élargissements s'interrompt à $\mathbb{C}$, et pourquoi il n'y a rien entre le plan et la dimension 4.

6.2. ★ Et si l'on continuait quand même ?

Une question demeure. Nous sommes passés de la droite au plan. Pourquoi s'arrêter là ? Pourquoi ne pas multiplier les points de l'espace ?

Hamilton s'est posé exactement cette question, et il y a consacré **treize ans**. Ses enfants, raconte-t-il, lui demandaient chaque matin au petit déjeuner s'il savait enfin multiplier les triplets, et chaque matin il devait répondre non.

Le nom est doublement injuste : d'Alembert en donne en 1746 une preuve incomplète, et Gauss, qui la critique en 1799, en propose une qui n'est pas non plus entièrement rigoureuse selon nos critères. Aucune démonstration purement algébrique n'est possible : toutes utilisent, à un endroit ou à un autre, un argument d'analyse.

CONTEXTE HISTORIQUE – DUBLIN, 16 OCTOBRE 1843

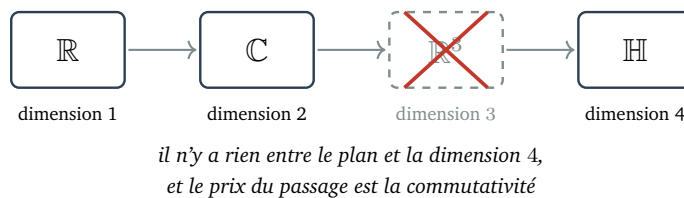
En traversant le Broom Bridge, Hamilton comprend soudain que le problème est insoluble en dimension 3, et qu'il faut passer à la dimension 4 en abandonnant la commutativité. Il grave sur la pierre du pont la relation

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

et vient de créer les **quaternions**. Une plaque commémore aujourd'hui ce graffiti.

THÉORÈME – FROBENIUS, 1877, ADMIS

Les seules algèbres à division associatives de dimension finie sur $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ (dimension 1), $\mathbb{C}$ (dimension 2) et le corps non commutatif $\mathbb{H}$ des quaternions (dimension 4).



Les quaternions ne sont pas une curiosité. Ils sont aujourd'hui le format standard de représentation des rotations en trois dimensions, en robotique, en imagerie médicale et dans tous les moteurs de jeu vidéo, parce qu'ils évitent un défaut des angles d'Euler appelé blocage de cardan. Le nom vient du même Cardan que la section 2.

6.3. Le dernier mot revient à Gauss

Reprenons la phrase de la page de garde. En 1831, Gauss propose d'appeler $+1$, -1 et i les unités **directe**, **inverse** et **latérale**, et il ajoute que si l'on avait fait ainsi dès le début, il n'aurait guère pu être question d'une telle obscurité.

Il a raison, et c'est le bilan de ce chapitre. Le seul obstacle sérieux n'était pas mathématique : il était *lexical*. On avait appelé ces nombres impossibles, sophistiqués, imaginaires, et l'on s'était interdit d'y penser. Il aura suffi de les regarder pour ce qu'ils sont, un quart de tour dans le plan, pour que trois siècles de brouillard se dissipent.