



EXERCICES • C1. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Trente exercices, du calcul de routine au corps qu'on ne peut pas ordonner

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Le calcul dans $\mathbb{C}$	Ex. 1–7	★ à ★★★	■	cours C1, § 4
II. Le second degré, et ce qu'il cache	Ex. 8–12	★ à ★★★	■ ♦ ★	cours C1, § 5.2
III. Polynômes et racines	Ex. 13–18	★★ à ★★★★★	■ ♦ ★	cours C1, § 5.3
IV. La construction, remise en cause	Ex. 19–23	★★★★ à ★★★★★★	♦ ★	cours C1, § 3–4
V. Sur les traces de Cardan	Ex. 24–27	★★★★ à ★★★★★★	■ ♦ ★	cours C1, § 2
VI. Histoires et belles mathématiques	Ex. 28–30	★★★★★ à ★★★★★★	♦ ★	cours C1, § 3.5

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul Maths Expertes : fiches 1 et 2 (Calcul algébrique complexe I et II) en échauffement de la partie I, en laissant de côté les calculs 1.10 à 1.12 et 2.13, qui portent sur le module et attendent le chapitre C2; fiche 3 (Équations de degré 2) avant la partie II. Cahier complet et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. LE CALCUL DANS $\mathbb{C}$

↔ s'appuie sur COURS C1, § 4 · forme algébrique, conjugué, inverse et quotient

EXERCICE 1 · APL-C1-01

★ ■ ⌚

Six formes algébriques

Mettre chacun des nombres suivants sous forme algébrique.

1. $(3 - 2i) + (-1 + 5i)$

3. $(3 + i)^2$

5. i^{2026}

2. $(2 + i)(3 - 4i)$

4. $(2 - 3i)^2$

6. $(1 - i)(1 + i)$

EXERCICE 2 · APL-C1-02



Le conjugué au travail

On pose $z = 2 - 5i$ et $z' = -1 + 3i$.

1. Calculer séparément $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$, puis $\overline{z z'}$ et $\overline{z} \overline{z'}$, enfin $\overline{z^3}$ et $(\overline{z})^3$. Que constate-t-on ?
2. Vérifier sur z et sur z' l'égalité $w \overline{w} = a^2 + b^2$ établie en cours, où $w = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
3. Sans aucun calcul supplémentaire, donner le conjugué de z^5 , puis celui de $z z'^2$.

EXERCICE 3 · APL-C1-03



La quantité conjuguée

Mettre chacun des quotients suivants sous forme algébrique.

1. $\frac{1}{2+i}$

3. $\frac{1+i}{1-i}$

5. $\frac{2+3i}{i}$

2. $\frac{3-i}{1+2i}$

4. $\frac{5}{3-4i}$

6. $\frac{(1-i)^2}{1+i}$

EXERCICE 4 · APL-C1-04



Réel, ou imaginaire pur ?

1. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre $z + \overline{z}$ est réel et que $z - \overline{z}$ est imaginaire pur.
2. En déduire que $\frac{z - \overline{z}}{i}$ est réel pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que z^2 soit réel.
4. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que z^2 soit imaginaire pur.

EXERCICE 5 · APL-C1-05



Les puissances de $1 + i$

1. Vérifier que $(1+i)^2 = 2i$, puis calculer $(1+i)^4$ et $(1+i)^8$.
2. Exprimer $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en distinguant les quatre restes possibles de n dans la division euclidienne par 4.
3. En déduire la forme algébrique de $(1+i)^{2026}$.

EXERCICE 6 · APL-C1-06

★★ ■ ⌚

Systèmes en z et $\bar{z}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, en posant $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. $2z + i\bar{z} = 3 + i$

2. $z + 2\bar{z} = 6 - 3i$

3. $iz - \bar{z} = 1 + i$

L'une des trois n'a pas de solution : dire laquelle, et dire pourquoi.

EXERCICE 7 · APL-C1-07

★★ ■ ⌚

Chaînes de calcul

Mettre sous forme algébrique.

1. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

2. $\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2$

3. $\frac{1}{1 + \frac{1}{1+i}}$

II. LE SECOND DEGRÉ, ET CE QU'IL CACHE

$\leftrightarrow$ s'appuie sur COURS C1, § 5.2 · équations du second degré, et racines carrées dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 8 · APL-C1-08

★ ■ ⌚

 $\Delta < 0$ en série

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les six équations suivantes, à coefficients réels.

1. $z^2 + z + 1 = 0$

3. $2z^2 + 2z + 5 = 0$

5. $3z^2 - 6z + 7 = 0$

2. $z^2 - 4z + 13 = 0$

4. $z^2 + 9 = 0$

6. $z^2 + 4z + 5 = 0$

EXERCICE 9 · APL-C1-09

★★ ■ ⌚

Somme et produit

- Déterminer une équation du second degré à **coefficients réels** dont $3 - 2i$ est solution. Est-elle unique à un facteur près ?
- Factoriser $z^2 + 2z + 5$ en produit de deux facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}$.
- Déterminer deux nombres complexes de somme 4 et de produit 13.

EXERCICE 10 · THE-C1-10



Racines carrées, algébriquement

On cherche les $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, tels que $z^2 = 3 + 4i$.

1. Montrer que le problème équivaut au système $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$.
2. Tirer b de la seconde équation, reporter dans la première, et résoudre l'équation bicarrée obtenue en a . Conclure.
3. Reprendre la méthode pour $z^2 = -5 + 12i$, puis pour $z^2 = -i$.

Aucun module n'intervient ici : il fera son entrée au chapitre C2, et la méthode s'en trouvera raccourcie. Celle-ci, purement algébrique, marche déjà.

EXERCICE 11 · THE-C1-11



Le second degré à coefficients complexes

Le cours n'a traité que le cas des coefficients *réels*. On étend ici la méthode, et rien ne résiste.

1. Soit l'équation $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$. Calculer son discriminant $\Delta = (3 + i)^2 - 4(2 + 2i)$.
2. À l'aide de la méthode de l'exercice 10, déterminer un complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$.
3. Vérifier que les nombres $\frac{(3 + i) \pm \delta}{2}$ sont solutions, puis contrôler le résultat par la somme et le produit des racines.
4. Résoudre de même $z^2 - (5 - i)z + (8 - i) = 0$.

EXERCICE 12 · THE-C1-12



Un paramètre réel

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E_m) : z^2 - 2mz + m^2 + 1 = 0$.

1. Calculer le discriminant de (E_m) . Que remarque-t-on ?
2. Résoudre (E_m) pour tout $m \in \mathbb{R}$.
3. Placer dans le plan les points de coordonnées $(\operatorname{Re}(z); \operatorname{Im}(z))$ pour les solutions z obtenues avec $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Sur quelles **deux droites** se trouvent-ils tous ?
4. Pour quelles valeurs de m l'équation $z^2 - 2mz + 5 = 0$ a-t-elle deux solutions non réelles ?

III. POLYNÔMES ET RACINES

↔ s'appuie sur COURS C1, § 5.3 · factorisation par $z - a$ et majoration du nombre de racines

EXERCICE 13 · THE-C1-13

★★ ■ ⌚

Factoriser par $z - a$

1. Soit P le polynôme défini, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$. Vérifier que $P(1) = 0$, factoriser P par $z - 1$, puis résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. Reprendre la démarche avec Q défini, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $Q(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$, dont 2 est racine.

EXERCICE 14 · THE-C1-14

★★ ■ ♦ ⌚

La somme géométrique

1. Le cours a démontré, pour tout $a \in \mathbb{C}$, tout $z \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \geq 1$, l'identité

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-1}).$$

En choisissant convenablement a , en déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$,

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

2. Calculer $1 + i + i^2 + \dots + i^{2026}$ de deux façons : par la formule, puis en regroupant les termes quatre par quatre. Les deux résultats coïncident-ils ?

EXERCICE 15 · THE-C1-15

★★★★ ■ ♦ ⌚

Les racines vont par paires

Soit P un polynôme à coefficients réels et soit $a \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $P(a) = 0$, alors $P(\bar{a}) = 0$. On conjuguera l'égalité entière, en utilisant que les coefficients sont leurs propres conjugués.
2. Soit R le polynôme défini, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $R(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$. Vérifier que $1 + 2i$ est racine de R .
3. En déduire une deuxième racine, puis la troisième, et factoriser R dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 16 · THE-C1-16



Le degré impair

On admet le théorème de d'Alembert-Gauss : un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité. On rappelle qu'un complexe a est racine de P **de multiplicité** m lorsque $(z - a)^m$ divise P sans que $(z - a)^{m+1}$ le divise, c'est-à-dire lorsque $P(z) = (z - a)^m Q(z)$ pour un polynôme Q vérifiant $Q(a) \neq 0$.

Pour un polynôme $R(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ à coefficients complexes, on note $\overline{R}$ le polynôme $\sum_{k=0}^n \overline{c_k} z^k$.

1. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{R(z)} = \overline{R}(\overline{z})$. Que devient cette égalité lorsque R est à coefficients réels ?
2. Soit P à coefficients réels et a une racine *non réelle* de P , de multiplicité m . En écrivant $P(z) = (z - a)^m Q(z)$ avec $Q(a) \neq 0$ et en conjuguant cette identité de polynômes, démontrer que $\overline{a}$ est racine de P **de la même multiplicité** m .
3. En déduire que le nombre de racines non réelles de P , comptées avec leur multiplicité, est **pair**.
4. Conclure : tout polynôme à coefficients réels de degré **impair** possède au moins une racine réelle.
5. Donner un polynôme à coefficients réels de degré 4 n'ayant aucune racine réelle.

EXERCICE 17 · SYN-C1-17



Trop de racines

Dans tout l'exercice, $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré au plus n , admettant $n + 1$ racines deux à deux distinctes. Démontrer que P est le polynôme nul. *On raisonne par l'absurde à partir du théorème de majoration du cours.*
2. Soient P et Q deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en $n + 1$ points deux à deux distincts. Démontrer que $P = Q$.
3. En déduire qu'il existe **au plus un** polynôme de degré au plus 2 dont la courbe passe par trois points d'abscisses distinctes données.

EXERCICE 18 · SYN-C1-18



La factorisation réelle

On admet le théorème de d'Alembert-Gauss.

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ non réel et $\overline{a}$ son conjugué. Développer $(z - a)(z - \overline{a})$ et vérifier que le résultat est un polynôme **à coefficients réels** de degré 2, sans racine réelle.
2. En vous appuyant sur l'exercice 15, démontrer que tout polynôme non constant à coefficients réels se factorise en un produit de facteurs à coefficients réels, tous de degré 1 ou 2. *On raisonne par récurrence sur le degré, en distinguant selon qu'une racine est réelle ou non, et l'on prendra garde à justifier qu'après division le quotient est encore à coefficients réels.*

3. Application : factoriser $z^4 + 1$ dans $\mathbb{R}$. On pourra écrire $z^4 + 1 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2$.

IV. LA CONSTRUCTION, REMISE EN CAUSE

↔ s'appuie sur COURS C1, § 3 ET 4 · la loi de $\mathbb{C}$, et ce qui se passe quand on la change

EXERCICE 19 · THE-C1-19

★★★★ ♦ ☆ ⌚

L'identité de Diophante, retournée

1. Démontrer que, pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

2. Retrouver ce résultat en une ligne, en calculant $(z\bar{z})(w\bar{w})$ pour $z = a + ib$ et $w = c + id$.

3. On a $5 = 1^2 + 2^2$ et $13 = 2^2 + 3^2$. Appliquer l'identité et obtenir une écriture de 65 comme somme de deux carrés d'entiers naturels.

4. Recommencer en écrivant cette fois $5 = 2^2 + 1^2$, c'est-à-dire en **échangeant** a et b . On obtient une *seconde* écriture de 65. Attention : échanger les deux facteurs ne servirait à rien, l'identité étant commutative. C'est bien à l'intérieur d'une somme qu'il faut permuter.

EXERCICE 20 · THE-C1-20

★★★★ ♦ ☆ ⌚

La conjugaison, seule symétrie de $\mathbb{C}$

On note c l'application définie sur $\mathbb{C}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $c(z) = \bar{z}$. Le cours a établi qu'elle respecte la somme et le produit, et que ses points fixes sont exactement les réels : on l'utilisera librement.

1. Démontrer que c est **involutive**, c'est-à-dire que $c \circ c$ est l'identité de $\mathbb{C}$. En déduire que c est bijective.
2. Soit maintenant f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui respecte elle aussi les deux opérations, et qui vérifie $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En calculant $f(i)^2$ de deux façons, démontrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
3. Démontrer que, pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $f(a + ib) = a + f(i)b$. En déduire que f est soit l'identité, soit la conjugaison.
4. Combien $\mathbb{C}$ possède-t-il de telles symétries au-dessus de $\mathbb{R}$? Et $\mathbb{R}$ au-dessus de lui-même ?

Autrement dit : au-dessus de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{C}$ ne possède que deux symétries, et vous les connaissez toutes les deux.

EXERCICE 21 · APR-C1-21



Les nombres déployés

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle et du produit défini, pour tous réels a, b, c, d , par

$$(a; b) \odot (c; d) = (ac + bd; ad + bc).$$

Un seul signe change par rapport au produit de $\mathbb{C}$.

1. Vérifier que $\odot$ est commutatif, associatif, et que $(1; 0)$ en est l'élément neutre.
2. On pose $j = (0; 1)$. Calculer $j \odot j$.
3. Calculer $(1; 1) \odot (1; -1)$.
4. Conclure : cet ensemble possède-t-il des **diviseurs de zéro** ? Est-ce un corps ? Justifier.

EXERCICE 22 · APR-C1-22



Les nombres duaux, et la conclusion

On munit maintenant $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle et du produit défini, pour tous $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$, par

$$(a; b) \otimes (c; d) = (ac; ad + bc).$$

1. Vérifier que $\otimes$ est commutatif, associatif, et que $(1; 0)$ en est l'élément neutre.
2. On pose $\varepsilon = (0; 1)$. Calculer $\varepsilon \otimes \varepsilon$.
3. Démontrer que ε n'est pas nul et n'est pas inversible.
4. **Synthèse.** On peut démontrer que les produits de $\mathbb{C}$, $\odot$ et $\otimes$ sont, à isomorphisme près, les **seuls** produits qui soient à la fois commutatifs, associatifs, **distributifs sur l'addition** et admettant $(1; 0)$ pour élément neutre, tout en prolongeant le produit de $\mathbb{R}$ sur l'axe des premières coordonnées. Que dire alors du produit choisi au chapitre C1 ? *Les quatre hypothèses comptent : le produit $(a; b) * (c; d) = (ac; 0)$ est commutatif, associatif et distributif, mais il n'a pas d'élément neutre, et il n'est aucun des trois.*

EXERCICE 23 · APR-C1-23



Le corps $\mathbb{Q}(i)$

On note $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{Q}(i)$ est stable par addition, par soustraction et par multiplication.
2. Soit $z \in \mathbb{Q}(i)$ non nul. Démontrer que $\frac{1}{z}$ appartient encore à $\mathbb{Q}(i)$. On écrira l'inverse à l'aide du conjugué et l'on regardera de quelle nature sont les deux coordonnées obtenues.
3. On dit alors que $\mathbb{Q}(i)$ est un **sous-corps** de $\mathbb{C}$. Démontrer que tout sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}$ et i contient $\mathbb{Q}(i)$: c'est donc le plus petit d'entre eux.
4. **La question qui compte.** Démontrer que $\sqrt{2}$ **n'appartient pas** à $\mathbb{Q}(i)$. On supposera $\sqrt{2} = a + ib$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, on élèvera au carré, et l'on utilisera l'unicité de la forme algébrique. On invoquera au passage l'irrationalité de $\sqrt{2}$, démontrée en seconde.

Il existe donc des corps strictement compris entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$, et il y en a une infinité. C'est le point de départ de la théorie qui, un siècle après Cardan, expliquera pourquoi certaines équations résistent aux radicaux.

V. SUR LES TRACES DE CARDAN

↔ s'appuie sur COURS C1, § 2 · la formule de del Ferro-Cardan et le signe de Δ_C

EXERCICE 24 · SYN-C1-24

★★★★ ◆ ⌚

Cardan sans détour

On considère l'équation $(H) : x^3 = 9x + 28$.

1. Calculer $\Delta_C = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Le théorème du cours permet-il d'affirmer que (H) a trois racines réelles distinctes ? Qu'affirme-t-il exactement ici ?
2. Appliquer la méthode du cours : déterminer u^3 et v^3 , puis une solution réelle de (H) . Vérifier.
3. Factoriser $x^3 - 9x - 28$ par $x - 4$, puis déterminer les deux autres racines dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 25 · SYN-C1-25

★★★★★ ◆ ⌚

Cardan avec détour

On considère l'équation $(K) : x^3 = 30x + 36$.

1. Calculer Δ_C et vérifier qu'il vaut -676 . Que peut-on prévoir sur les racines ?
2. Écrire les deux racines cubiques que réclame la formule, en convenant que $\sqrt{-676} = 26i$.
3. Vérifier que $(3 + i)^3 = 18 + 26i$, puis que le couple $(3 + i; 3 - i)$ satisfait **les deux** conditions de la méthode. En déduire une racine réelle de (K) .
4. Factoriser $x^3 - 30x - 36$ et déterminer les deux autres racines. Sont-elles réelles ?

EXERCICE 26 · SYN-C1-26

★★★★★★★ ☆ ⌚

La solution de Viète

Lorsque $\Delta_C < 0$, on a nécessairement $p > 0$. On pose alors $c = \sqrt{\frac{p}{3}}$ et l'on cherche les solutions de $x^3 = px + q$ sous la forme $x = 2c \cos \theta$.

1. Rappeler, ou redémontrer, l'identité : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.
2. En remplaçant x par $2c \cos \theta$ et p par $3c^2$, démontrer que l'équation équivaut à

$$2c^3 \cos(3\theta) = q.$$

3. Démontrer que la condition $\Delta_C < 0$ garantit $\left|\frac{q}{2c^3}\right| < 1$, donc que θ existe.
4. Appliquer à $(K) : x^3 = 30x + 36$ et retrouver, à 10^{-3} près, la racine de l'exercice 25.

5. **La question qui compte.** Cette méthode fait-elle intervenir une seule racine carrée de nombre négatif? Que devient alors l'affirmation « le détour est inévitable »?

EXERCICE 27 · APR-C1-27

★★★★★ ★ ⏳

Ferrari et le quatrième degré

Ludovico Ferrari, élève de Cardan, résout le quatrième degré en le ramenant au troisième. On applique sa méthode à $(G) : x^4 + 4x - 1 = 0$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifier que (G) équivaut à

$$(x^2 + \lambda)^2 = 2\lambda x^2 - 4x + (1 + \lambda^2).$$

2. Le membre de droite est un trinôme en x . Écrire la condition sur λ pour que son discriminant soit nul, c'est-à-dire pour qu'il soit un carré parfait. Montrer qu'elle s'écrit $\lambda^3 + \lambda - 2 = 0$: c'est la **résolvante**.
3. Trouver une racine évidente de la résolvante, et en déduire que (G) équivaut à $(x^2 + 1)^2 = 2(x - 1)^2$.
4. Conclure : résoudre (G) dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur COURS C1, § 3.5 · l'identité de Diophante, et ce qu'elle annonce

EXERCICE 28 · APR-C1-28

★★★★★ ★ ⏳

Les entiers de Gauss

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, et pour tout $z = a + ib$ de $\mathbb{Z}[i]$ on pose $N(z) = z\bar{z} = a^2 + b^2$, appelé sa **norme**.

- Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est stable par addition et par multiplication.
- Démontrer que $N(z z') = N(z) N(z')$ pour tous z et z' de $\mathbb{Z}[i]$. Quel résultat de l'exercice 19 retrouvez-vous?
- Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ inversible dans $\mathbb{Z}[i]$. Démontrer que $N(z) = 1$.
- En déduire que les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont $1, -1, i$ et $-i$.

Cet anneau possède une division euclidienne, comme $\mathbb{Z}$, et c'est en son sein que se démontrent les plus beaux résultats sur les sommes de deux carrés. Il n'est au programme d'aucun chapitre de l'année : vous le retrouverez sur le compagne numérique, et peut-être dans un devoir.

La suite $z_{n+1} = az_n + b$

Soient $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$, $b \in \mathbb{C}$, et (z_n) la suite de nombres complexes définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = az_n + b$.

1. Démontrer qu'il existe un unique $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega = a\omega + b$, et l'exprimer en fonction de a et b .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n - \omega = a^n(z_0 - \omega)$.
3. Application : $a = i$, $b = 1$ et $z_0 = 0$. Calculer ω , puis z_1 , z_2 , z_3 et z_4 .
4. Que constate-t-on ? Placer les points obtenus dans le plan et décrire la figure.

Un produit étonnamment réel

1. Calculer $(1+i)(1+2i)(1+3i)$. Le résultat surprend : commenter.
2. Calculer de même $(2+i)(3+i)$ et vérifier que le résultat est un multiple réel de $1+i$.
3. **On admet le résultat suivant**, qui sera démontré au chapitre C2. À tout complexe $a+ib$ avec $a > 0$ et $b > 0$ on associe l'unique réel $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan \theta = \frac{b}{a}$, appelé son **angle** et noté $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Alors l'angle d'un produit est la **somme** des angles des facteurs, à un tour près.
Déterminer les angles de $1+i$, $1+2i$ et $1+3i$, puis traduire le résultat de la question 1 en une égalité portant sur ces trois angles. *On observera que le produit est un réel strictement négatif, donc d'angle π .*
4. Traduire de même le résultat de la question 2, et en déduire sans calculatrice la valeur de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, les prolongements des exercices 21 et 22 sur les autres façons de multiplier le plan, et le récit complet du duel de 1548 : sur le compagnon numérique du chapitre. Deux constructions de $\mathbb{C}$ ne sont pas travaillées ici faute d'outils : le modèle matriciel vous attend au chapitre M1, et le quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ au chapitre A1.