



A1. NOMBRES ET CALCUL

Des entiers aux réels : ce que l'on peut écrire, et ce que l'on ne pourra jamais

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES		2.3. Deux premières démonstrations	8
		3. PARTAGER	9
		3.1. Un même nombre, plusieurs écritures	9
1. CALCULER	2	3.2. Les décimaux, et ceux qui n'en sont pas . . .	10
1.1. Développer, factoriser	2	3.3. Pourquoi toute fraction finit par se répéter .	12
1.2. Puissances et racines carrées	4	4. MESURER	12
2. COMPTER	6	4.1. La droite, et les trous qu'elle n'a pas	12
2.1. Deux ensembles, trois symboles	6	4.2. La démonstration du chapitre	13
2.2. Multiples, diviseurs, parité	7	4.3. La chaîne des ensembles.	14

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

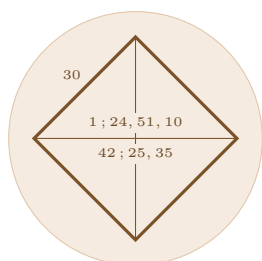
◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Dieu a fait les nombres entiers ; tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Leopold Kronecker (1823–1891)

Quelque part dans le sud de la Mésopotamie, entre 1800 et 1600 avant notre ère, un élève scribe presse dans l'argile fraîche un carré et ses deux diagonales. Sur un côté, il inscrit le nombre 30. Le long de la diagonale, il en grave deux autres, en base soixante. La tablette est ronde et tient dans la paume ; elle porte aujourd'hui le numéro 7289 dans la collection babylonienne de l'université Yale.



ce que porte la tablette

Entrée dans la collection babylonienne de Yale avant 1944. Son auteur est vraisemblablement un élève : c'est un exercice, pas un traité.

Tablette YBC 7289

Traduisons son premier nombre dans notre écriture. En base soixante, 1 ; 24, 51, 10 signifie

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1,414212\,962\,962\,962\ldots$$

Demandez maintenant $\sqrt{2}$ à votre calculatrice : elle affiche 1,414213562. Les cinq premières décimales coïncident, et l'écart entre les deux nombres est inférieur à un millionième. C'est la plus grande précision de calcul connue du monde antique pour une racine carrée.

Avait-il donc écrit $\sqrt{2}$? La réponse est *non*, et pas parce qu'il lui manquait des décimales : aucune écriture de cette sorte, la sienne, la vôtre, celle d'une machine mille fois plus puissante, ne peut donner $\sqrt{2}$ exactement. Nous allons construire, étage par étage, les familles de nombres qui permettent de dire pourquoi.

1. CALCULER

Avant de monter les étages, on vérifie les outils. Tout ce paragraphe vient du collège : il est là parce que tout le reste du chapitre s'en sert, et on y va vite, à dessein. **L'entraînement ne se fait pas ici** mais au Cahier de calcul, où chaque règle a sa fiche et ses corrigés. Ce paragraphe vous dit *quoi* ; le cahier vous fait *faire*.

OBJECTIFS

- ▷ Développer et factoriser
- ▷ Manipuler puissances et racines
- ▷ Démontrer $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiches 18 à 24 (développements, factorisations, identités remarquables) et fiches 10 à 13 (puissances).

1.1. Développer, factoriser

Une même expression admet plusieurs écritures, et l'on choisit celle qui répond à la question posée. **Développer**, c'est transformer un produit en somme ; **factoriser**, c'est l'inverse. Factoriser est presque toujours le geste utile : c'est lui qui donne les solutions d'une équation et le signe d'une

expression.

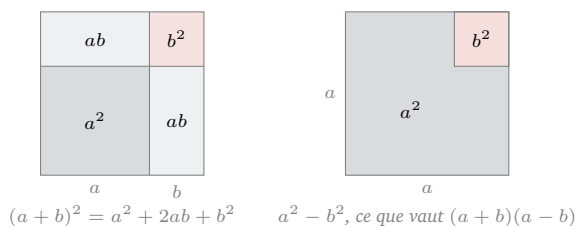
PROPRIÉTÉ – LES TROIS IDENTITÉS REMARQUABLES

Quels que soient les réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Les deux premières se lisent directement sur des aires ; la troisième se voit comme un carré privé d'un coin. C'est ainsi qu'on les retient.



MÉTHODE – FACTORISER UNE EXPRESSION

- ▷ 1. Chercher un facteur commun aux termes, et le mettre en évidence.
- ▷ 2. S'il n'y en a pas, reconnaître une identité remarquable, en repérant les carrés.
- ▷ 3. Écrire le produit obtenu.
- ▷ 4. Vérifier en développant mentalement.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Factoriser $A = (2x + 1)(x - 3) + (2x + 1)^2$, pour tout réel x .

Les deux termes contiennent le facteur $2x + 1$: on le met en évidence.

$$A = (2x + 1)[(x - 3) + (2x + 1)] = (2x + 1)(3x - 2).$$

Vérification, en développant les deux écritures :

$$(2x^2 - 5x - 3) + (4x^2 + 4x + 1) = 6x^2 - x - 2 \quad \text{et} \quad (2x + 1)(3x - 2) = 6x^2 - x - 2.$$

Les deux donnent la même chose, donc

$$A = (2x + 1)(3x - 2) \text{ pour tout réel } x$$

Exemple – La seconde voie, entièrement déroulée

Factoriser $16x^2 - 81$, pour tout réel x .

Aucun facteur commun ici : on cherche donc une identité remarquable, en repérant les carrés. Le coefficient fait partie du carré, et c'est là qu'on se trompe : $16x^2 = (4x)^2$, et $81 = 9^2$. L'expression est

une différence de deux carrés :

$$16x^2 - 81 = (4x)^2 - 9^2 = (4x - 9)(4x + 9).$$

Vérification, en développant : $(4x - 9)(4x + 9) = 16x^2 + 36x - 36x - 81 = 16x^2 - 81$.

Donc $16x^2 - 81 = (4x - 9)(4x + 9)$ pour tout réel x

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Factoriser $B = (x - 4)(3x + 2) - (x - 4)$, pour tout réel x . Le facteur commun est mis en évidence, et le produit est écrit : $B = (x - 4)[(3x + 2) - 1] = (x - 4)(3x + 1)$. **À vous la dernière étape, la vérification, puis la conclusion quantifiée.**

(b) Factoriser $C = 9x^2 - 25$, pour tout réel x . Les deux premières étapes : les deux termes n'ont aucun facteur commun, et ce sont tous deux des carrés, car $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$; donc $C = (3x)^2 - 5^2$. **À vous les deux dernières étapes.**

ÉCHO EXO

EXO-A1 · Ex. 1-6 ★★

Développer, factoriser, et les identités remarquables : la partie I de l'Atelier reprend ce paragraphe. ■ ♦ ★

1.2. Puissances et racines carrées

PROPRIÉTÉ – RÈGLES DE CALCUL

Quels que soient le réel non nul x et les entiers relatifs m et n :

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x^m)^n = x^{mn} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Quels que soient les réels **positifs** a et b , avec b non nul pour le quotient :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Exemple – Développer avec une identité remarquable

Quel que soit le réel x :

$$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4.$$

Le piège classique est d'oublier le double produit et d'écrire $9x^2 + 4$: c'est exactement ce que la figure des aires interdit.

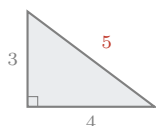
Exemple – Simplifier une expression avec des puissances

$$\frac{5^4 \times 5^{-6}}{5^{-3}} = \frac{5^{4+(-6)}}{5^{-3}} = \frac{5^{-2}}{5^{-3}} = 5^{-2-(-3)} = 5^1 = 5.$$

On **additionne** les exposants pour un produit (première égalité), on les **soustrait** pour un quotient (troisième) : jamais l'inverse.

Attention – La racine n'est pas linéaire

Il n'existe **aucune** règle donnant $\sqrt{a+b}$ à partir de $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Un contre-exemple suffit : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. C'est l'erreur la plus coûteuse du chapitre, et elle se voit sur une figure : 5 est l'hypoténuse, 3 + 4 est le chemin qui la contourne.



La première de ces règles est au programme, et elle se démontre.

Démonstration.

Commençons par justifier l'outil : deux réels positifs qui ont le même carré sont égaux. En effet, si $x^2 = y^2$, alors $x^2 - y^2 = 0$, donc $(x - y)(x + y) = 0$ par la troisième identité remarquable. Un produit n'est nul que si l'un de ses facteurs l'est : ou bien $x = y$, ou bien $x = -y$, ce qui pour deux nombres positifs impose encore $x = y$.

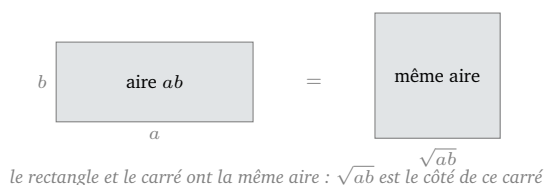
Soient maintenant a et b deux réels positifs. Les deux nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\sqrt{b}$ sont positifs, comme produits et racines de nombres positifs. Pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit donc de montrer qu'ils ont le même carré.

D'une part, $(\sqrt{ab})^2 = ab$ par définition de la racine carrée.

D'autre part, en réordonnant le produit :

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}\sqrt{b} \times \sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b.$$

Les deux nombres sont positifs et ont le même carré : ils sont donc égaux. ■



MÉTHODE – SIMPLIFIER UNE ÉCRITURE AVEC DES RACINES

- ▷ 1. Chercher, sous la racine, un facteur qui soit un carré parfait.
- ▷ 2. Séparer la racine du produit en produit de racines.
- ▷ 3. Sortir la racine du carré parfait.
- ▷ 4. Regrouper les termes semblables.

Le symbole $\sqrt{}$ apparaît chez Christoff Rudolff en 1525. On y voit souvent un r déformé, initiale du latin radix ; l'origine reste discutée. La barre horizontale, qui dit jusqu'où porte le signe, est ajoutée par Descartes en 1637.

Rudolff. 1525

ÉCHO EXO

EXO-A1 · Ex. 7-11 ★★

La quantité conjuguée, qui ne figure ni dans ce cours ni dans la fiche : elle ne s'apprend qu'à l'Atelier, partie II. ■ ♦ ★

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Écrire $D = \sqrt{75} - \sqrt{12}$ sous la forme $k\sqrt{3}$.

Sous la première racine, $75 = 25 \times 3$, et 25 est un carré parfait. Sous la seconde, $12 = 4 \times 3$. On sépare, puis on sort :

$$\sqrt{75} = \sqrt{25} \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{12} = \sqrt{4} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Les deux termes sont désormais semblables : $D = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Donc $D = 3\sqrt{3}$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Écrire $E = \sqrt{50} + \sqrt{8}$ sous la forme $k\sqrt{2}$. Les trois premières étapes : $50 = 25 \times 2$ et $8 = 4 \times 2$, donc $\sqrt{50} = \sqrt{25} \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{8} = \sqrt{4} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. À vous la dernière étape.

(b) Écrire $F = \sqrt{45} - \sqrt{20}$ sous la forme $k\sqrt{5}$. Les deux premières étapes : $45 = 9 \times 5$ et $20 = 4 \times 5$, donc $\sqrt{45} = \sqrt{9} \sqrt{5}$ et $\sqrt{20} = \sqrt{4} \sqrt{5}$.

À vous les deux dernières étapes.

Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiches 14 à 17 (racines carrées) et fiches 3 à 9 (fractions).

Exemple – Une expression fractionnaire

Écrire $G = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \times \frac{3}{10}$ sous forme irréductible.

La multiplication passe avant la soustraction : $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$.

On met ensuite au même dénominateur : $G = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$.

Donc $G = \frac{5}{12}$

JALON

Je sais factoriser, manipuler puissances et racines, et je connais
le contre-exemple qui interdit
 $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

OBJECTIFS

- ▷ Nommer et noter les ensembles
- ▷ Multiple, diviseur, pair, impair
- ▷ Prouver avec une lettre

2. COMPTER

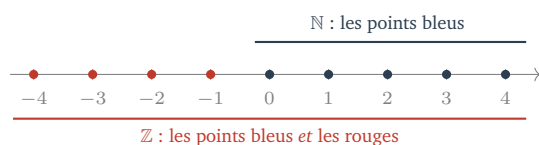
2.1. Deux ensembles, trois symboles

Les nombres qui servent à compter forment l'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$. En leur adjoignant les opposés, on obtient les **entiers relatifs**, notés $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \quad \mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

Trois symboles suffisent à tout dire. On écrit $7 \in \mathbb{N}$ pour « 7 appartient à $\mathbb{N}$ », et $-7 \notin \mathbb{N}$ pour « -7 n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ». Enfin, tout entier naturel étant un entier relatif, on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, qui se lit « $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ ».

$\mathbb{Z}$: De l'allemand Zahl, « nombre » ;
 $\mathbb{N}$ vient de « naturel » et $\mathbb{Q}$ de
« quotient ».



2.2. Multiples, diviseurs, parité

DÉFINITION – MULTIPLE ET DIVISEUR

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que b est un **multiple** de a lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b = k \times a$. On dit alors aussi que a est un **diviseur** de b .

Exemple – Lecture de la définition

51 est un multiple de 3, car $51 = 17 \times 3$ et 17 est un entier.

50 n'est pas un multiple de 3 : aucun entier multiplié par 3 ne donne 50, puisque $16 \times 3 = 48$ et $17 \times 3 = 51$.

DÉFINITION – PAIR ET IMPAIR

Un entier relatif n est **pair** lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$; il est **impair** lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$. Tout entier est de l'un ou l'autre type, jamais des deux.

*Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 57 (« Diviseurs et multiples »).*

Exemple – Écrire la parité avec une lettre

34 est pair, car $34 = 2 \times 17$: ici $k = 17$.

-9 est impair, car $-9 = 2 \times (-5) + 1$: ici $k = -5$. La lettre k a parfaitement le droit d'être négative.

Ces définitions ont l'air de simples mots ; ce sont des outils de preuve, car chacune fournit une écriture avec une lettre, et c'est elle qui permet de démontrer.

MÉTHODE – PROUVER QU'UN ENTIER EST MULTIPLE DE a

- ▷ 1. Écrire l'expression à étudier telle qu'elle est donnée, avec sa lettre.
- ▷ 2. Mettre a en facteur.
- ▷ 3. Nommer le facteur restant et dire pourquoi c'est un entier.
- ▷ 4. Conclure en citant la définition : l'expression s'écrit « entier $\times a$ ».

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Montrer que, quel que soit l'entier n , le nombre $6n + 15$ est un multiple de 3.

On part de l'expression : $6n + 15$. On met 3 en facteur : $6n + 15 = 3(2n + 5)$. Le facteur restant, $2n + 5$, est un entier, car n est un entier et que sommes et produits d'entiers sont des entiers.

Ainsi $6n + 15$ s'écrit sous la forme « entier $\times 3$ », donc

$6n + 15$ est un multiple de 3 pour tout entier n

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Montrer que, quel que soit l'entier n , le nombre $10n + 35$ est un multiple de 5. *Les trois premières étapes* : $10n + 35 = 5(2n + 7)$, et $2n + 7$ est un entier comme somme et produit d'entiers. **À vous la conclusion.**

(b) Montrer que, quel que soit l'entier n , le nombre $12n + 8$ est un multiple de 4. *Les deux premières étapes* : on part de $12n + 8$, et l'on met 4 en facteur : $12n + 8 = 4(3n + 2)$. **À vous les deux dernières étapes.**

2.3. Deux premières démonstrations

PROPRIÉTÉ – SOMME DE DEUX MULTIPLES

Soit a un entier relatif. Si b et c sont deux multiples de a , alors $b + c$ est également un multiple de a .

Démonstration.

Puisque b est un multiple de a , il existe un entier k tel que $b = ka$.
Puisque c en est un aussi, il existe un entier k' tel que $c = k'a$. La lettre est différente parce qu'il n'y a aucune raison que ce soit le même entier.
En additionnant, puis en mettant a en facteur :

$$b + c = ka + k'a = (k + k')a.$$

Or $k + k'$ est un entier, comme somme de deux entiers. Donc $b + c$ s'écrit sous la forme « entier $\times a$ », c'est-à-dire que $b + c$ est un multiple de a .

■

PROPRIÉTÉ – CARRÉ D'UN ENTIER IMPAIR

Le carré d'un entier impair est un entier impair.

Démonstration.

Soit n un entier impair. Il existe donc un entier k tel que $n = 2k + 1$.
Élevons au carré :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Les réponses de tous les blocs « À vous » de ce cours vivent sur le compagnon numérique, jamais ici : cherchez d'abord.

ÉCHO EXO

EXO-A1 · Ex. 12-16 ★

Écrire un multiple avec une lettre, puis démontrer : la partie III entraîne le geste que ce paragraphe vient d'installer. ■ ◆

Or $2k^2 + 2k$ est un entier. Donc n^2 s'écrit sous la forme « $2 \times$ entier $+ 1$ », c'est-à-dire que n^2 est impair. ■

Remarque – La contraposée, et pourquoi on y tient

Cette propriété dit : si n est impair, alors n^2 est impair. Elle se retourne aussitôt : si n^2 est pair, alors n est pair. C'est la même information lue à l'envers, et cette lecture-là porte un nom : c'est la **contraposée**. Retenez-la : elle paraît anodine, elle est la clé de la démonstration la plus importante du chapitre, au paragraphe 4.

3. PARTAGER

3.1. Un même nombre, plusieurs écritures

Diviser 3 par 4 ne tombe pas juste dans $\mathbb{Z}$. On invente donc une écriture, la **fraction**, et l'on constate aussitôt qu'un même nombre en admet une infinité :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

DÉFINITION – FRACTION IRRÉDUCTIBLE

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1 et -1 .

Nous admettons le résultat suivant : *tout nombre en écriture fractionnaire admet une écriture irréductible*, et c'est sa carte d'identité.

MÉTHODE – RENDRE UNE FRACTION IRRÉDUCTIBLE

- ▷ 1. Repérer un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.
- ▷ 2. Diviser les deux par ce diviseur.
- ▷ 3. Recommencer tant qu'il en reste un.
- ▷ 4. S'arrêter quand plus aucun diviseur commun n'apparaît.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Rendre $\frac{84}{126}$ irréductible.

84 et 126 sont tous deux pairs : $\frac{84}{126} = \frac{42}{63}$. Les deux sont divisibles

par 3 : $\frac{42}{63} = \frac{14}{21}$. Les deux sont divisibles par 7 : $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$.

2 et 3 n'ont plus aucun diviseur commun. Donc $\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$

JALON

Je sais traduire « multiple », « pair »
et « impair » par une écriture avec une
lettre, et m'en servir pour démontrer.

OBJECTIFS

- ▷ Rendre une fraction irréductible
- ▷ Reconnaître un nombre décimal
- ▷ Comprendre pourquoi une écriture se répète

PORTAIL ACT

ACT-A1 · Phases 1–4 ★

Le classement des écritures décimales,
et le nombre qui avait résisté à la calcula-
trice : c'est ici qu'il cède. ■

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Rendre $\frac{90}{150}$ irréductible. Deux simplifications faites : $\frac{90}{150} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. À vous de justifier l'arrêt.

(b) Rendre $\frac{132}{198}$ irréductible. Les deux premières étapes : 132 et 198 sont tous deux pairs, donc $\frac{132}{198} = \frac{66}{99}$. À vous les deux dernières étapes.

3.2. Les décimaux, et ceux qui n'en sont pas

DÉFINITION – NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE RATIONNEL

Un nombre est **décimal** lorsqu'il peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$, où a est un entier relatif et n un entier naturel. Leur ensemble est noté $\mathbb{D}$.

Un nombre est **rationnel** lorsqu'il peut s'écrire $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs et q n'est pas nul. Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$.

Tout décimal est rationnel, puisque 10^n est un entier : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. La réciproque est fautive, et c'est le sujet des deux pages qui viennent.

Rationnel : Du latin ratio, le rapport. Un rationnel est un rapport de deux entiers ; le mot n'a rien à voir avec la raison.

MÉTHODE – RECONNAÎTRE UN DÉCIMAL, ET L'ÉCRIRE

- ▷ 1. Rendre la fraction irréductible.
- ▷ 2. Chercher par quel entier multiplier le dénominateur pour obtenir 10, 100, 1000, etc.
- ▷ 3. S'il existe : multiplier haut et bas par cet entier, puis lire l'écriture décimale.
- ▷ 4. Si l'on n'en trouve pas, on ne peut pas conclure pour autant : il faut alors *démontrer* que le nombre n'est pas décimal, comme nous allons le faire pour $\frac{1}{3}$.

PROPRIÉTÉ – CE QUE DIT EXACTEMENT LA MÉTHODE

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Ce nombre est décimal si et seulement s'il existe un entier par lequel multiplier b pour obtenir une puissance de 10.

Attention : cela rend le *oui* facile, puisqu'il suffit d'exhiber cet entier, mais pas le *non* : ne pas avoir trouvé n'est pas une preuve qu'il n'existe pas. C'est pourquoi $\frac{1}{3}$ demande une démonstration à lui seul.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Le nombre $\frac{7}{40}$ est-il décimal ?

La fraction est déjà irréductible. On cherche à transformer 40 en une

puissance de 10 : $40 \times 25 = 1000$. On multiplie donc haut et bas par 25 :

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \times 25}{40 \times 25} = \frac{175}{1000} = 0,175.$$

Le nombre s'écrit bien sous la forme $\frac{a}{10^n}$, donc

$\frac{7}{40}$ est décimal, et vaut 0,175

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Le nombre $\frac{9}{25}$ est-il décimal ? *Étapes faites* : la fraction est irréductible, et $25 \times 4 = 100$. **À vous l'écriture décimale et la conclusion.**

(b) Le nombre $\frac{21}{56}$ est-il décimal ? *Première étape faite* : 21 et 56 sont divisibles par 7, donc $\frac{21}{56} = \frac{3}{8}$, et cette fraction est irréductible. **À vous les deux étapes qui restent : l'entier cherché, puis l'écriture décimale et la conclusion.**

PROPRIÉTÉ – UN RATIONNEL QUI N'EST PAS DÉCIMAL

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Il existe alors un entier a et un entier naturel n tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}.$$

En multipliant les deux membres par 3×10^n , on obtient $10^n = 3a$, autrement dit 10^n serait un multiple de 3.

Or 10^n s'écrit « un 1 suivi de n zéros » : la somme de ses chiffres vaut 1. Et un entier est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres en est un. Comme 1 n'est pas un multiple de 3, l'entier 10^n n'en est pas un non plus.

Les deux affirmations se contredisent. L'hypothèse de départ est donc fausse : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. ■

Remarque – Ce que cela signifie concrètement

Un nombre décimal, c'est exactement un nombre dont l'écriture décimale s'arrête. Dire que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal, c'est donc dire que son écriture 0,333... ne s'arrêtera jamais : ce n'est pas un défaut de la calculatrice, c'est une propriété du nombre. Vous l'aviez conjecturé en activité ; c'est maintenant démontré.

ÉCHO EXO

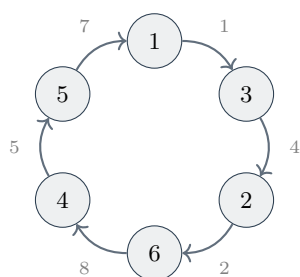
EXO-A1 · Ex. 17–21 ★

Irréductible, décimal ou non : la partie IV

suit ce paragraphe pas à pas. ■ ◆

3.3. Pourquoi toute fraction finit par se répéter

Si l'écriture ne s'arrête pas, que fait-elle ? Posons la division de 1 par 7, et surveillons les *restes*.



les six restes de $1 \div 7$, et les chiffres qu'ils produisent

Le reste 1 revient, et tout recommence : $\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ldots$ Ce n'est pas un hasard. En divisant par 7, les seuls restes possibles sont 0, 1, ..., 6 : si le reste 0 apparaît l'écriture s'arrête, sinon il ne reste que six valeurs, donc au bout de sept étapes au plus un reste s'est forcément déjà présenté. Et un même reste redonne le même calcul. Rien n'est propre à 7 : en divisant par un entier q , il n'y a jamais que q restes possibles, et le même argument s'applique.

PROPRIÉTÉ – ÉCRITURE DÉCIMALE D'UN RATIONNEL

L'écriture décimale d'un nombre rationnel s'arrête, ou bien se répète indéfiniment à partir d'un certain rang. C'est ce que nous venons d'établir.

Réciproquement, et nous l'admettons, tout nombre dont l'écriture s'arrête ou se répète est rationnel.

En 1585, dans un livret de vingt-neuf pages, De Thiende, Simon Stevin montre qu'on calcule avec les fractions décimales aussi aisément qu'avec des entiers. Il n'écrivait pas de virgule : il marquait les rangs par des chiffres cerclés. Le séparateur décimal viendra plus tard.

Stevin, 1585

Exemple – Les deux régimes

$\frac{7}{40} = 0,175$: l'écriture s'arrête, le nombre est décimal.

$\frac{22}{7} = 3,142857\ 142857\ldots$: l'écriture se répète avec une période de six chiffres. Le nombre est rationnel mais pas décimal. Il coïncide avec π sur deux décimales, et pour cause : Archimède s'en servait pour l'encadrer. Mais il n'est pas π .

4. MESURER

4.1. La droite, et les trous qu'elle n'a pas

Traçons une droite, choisissons-y une origine O et un point unité : chaque point est alors repéré par un nombre, son **abscisse**. Nous admettons le principe fondamental suivant : à chaque point de la droite correspond un

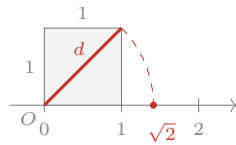
JALON

Je sais rendre une fraction irréductible, décider si un nombre est décimal, et dire pourquoi l'écriture d'une fraction se répète.

OBJECTIFS

- ▷ Situer un réel sur la droite
- ▷ Connaître la chaîne des ensembles
- ▷ Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

nombre et un seul, et réciproquement. Ces nombres forment l'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$. Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel** ; rien jusqu'ici ne garantit qu'il en existe, et le carré de côté 1 va nous en fournir un.



la diagonale, reportée au compas depuis O sur la droite

D'après le théorème de Pythagore, la diagonale d de ce carré vérifie $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Ce nombre positif dont le carré vaut 2, on le note $\sqrt{2}$. Il existe : c'est une longueur, on peut la tracer, la reporter au compas, la poser sur la droite. La question n'est donc pas son existence, mais son *écriture*.

4.2. La démonstration du chapitre

THÉORÈME – IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : il n'existe aucune fraction d'entiers qui lui soit égale.

Démonstration.

*Raisonnons par l'absurde : supposons $\sqrt{2}$ rationnel. On peut alors l'écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers, q n'est pas nul, et où la fraction a été rendue **irréductible** (c'est toujours possible, paragraphe 3).*

Le numérateur est pair. En élevant au carré, $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc

$$p^2 = 2q^2.$$

Ainsi p^2 est un multiple de 2, c'est-à-dire un entier pair. Or nous avons établi au paragraphe 2 que le carré d'un impair est impair ; sa **contraposée** dit exactement que si p^2 est pair, alors p est pair. Il existe donc un entier k tel que $p = 2k$.

Le dénominateur l'est aussi. Reportons $p = 2k$ dans l'égalité :

$$(2k)^2 = 2q^2, \quad \text{soit} \quad 4k^2 = 2q^2, \quad \text{donc} \quad q^2 = 2k^2.$$

Le même argument s'applique : q^2 est pair, donc q est pair.

La contradiction. p et q sont tous deux pairs : la fraction $\frac{p}{q}$ pouvait donc encore être simplifiée par 2. Cela contredit le fait qu'on l'avait choisie irréductible.

L'hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. ■

CIBLE DA

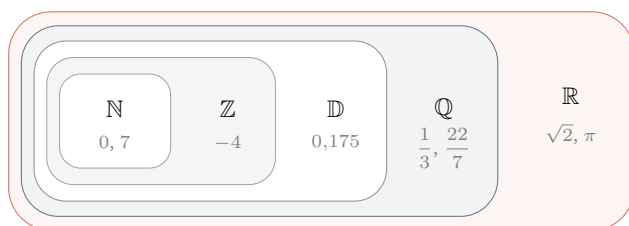
DM-A1.1 · Parties 1–5 ★★★★★

Le pli de Lichtenberg : pourquoi une feuille A4 se plie en deux sans changer de forme, et ce que $\sqrt{2}$ y fait. Entièrement facultatif. ♦★

Remarque – Retour à la tablette

Voilà la réponse à la question de l'ouverture. L'écriture de $\sqrt{2}$ ne s'arrête pas et ne se répète pas, sans quoi le nombre serait rationnel. Le scribe de Yale ne pouvait donc pas écrire $\sqrt{2}$; il détenait la meilleure approximation de son époque, et votre calculatrice est dans la même situation, avec quatre décimales de plus.

4.3. La chaîne des ensembles



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: chaque inclusion est stricte

Exemple – Ranger un nombre

$-\frac{12}{4} = -3$ appartient à $\mathbb{Z}$ (et donc à $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), mais pas à $\mathbb{N}$, tandis que $\frac{1}{3}$ appartient à $\mathbb{Q}$ mais pas à $\mathbb{D}$.

$\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$; π non plus, mais c'est bien plus difficile à établir (Lambert, 1761). Attention : $\sqrt{4} = 2$ appartient à $\mathbb{N}$, un symbole de racine ne rend pas un nombre irrationnel.

Remarque – ★ Pour aller plus loin, et c'est facultatif

Entre deux réels distincts $a < b$, aussi proches soient-ils, on peut toujours glisser un nombre décimal, donc une fraction. Il suffit de tronquer l'écriture décimale du **plus petit** des deux à un rang n assez grand pour que 10^{-n} soit inférieur à la moitié de $b - a$, puis d'ajouter 10^{-n} au résultat : le décimal obtenu est strictement entre a et b . Les rationnels sont donc partout sur la droite ; et pourtant les irrationnels y sont, en un sens que la seconde ne permet pas encore de dire, *infiniment plus nombreux*.

LE SCRIBE, LA CALCULATRICE ET VOUS

Reprenons la tablette. Le scribe avait gravé le meilleur nombre que son écriture lui permettait, et nous savons maintenant qu'il n'y avait pas de meilleur nombre à trouver : aucune suite finie de chiffres, aucune période, aucune fraction ne donne $\sqrt{2}$. Sa tablette n'était pas imparfaite par manque de soin, elle l'était par nécessité, et la vôtre le sera aussi.

Ce n'est pas une défaite, c'est l'inverse : il a fallu inventer un nombre nouveau, donc un ensemble nouveau, pour que la diagonale d'un carré redevienne une longueur. Chaque étage monté de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$ l'a été pour cette raison, parce que le précédent manquait de place ; certains d'entre vous le recommenceront en Terminale, avec les nombres complexes.

ÉCHO EXO

EXO-A1 · Ex. 22–30 ★★

Ranger dans la chaîne et réinvestir l'irrationalité (partie V, jusqu'au niveau ★★★★★), puis trois histoires pour le plaisir : la preuve par neuf, l'échelle de Théon, les pains d'Ahmès. ■ ♦ ★

JALON

Je sais démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel et ranger un nombre dans la chaîne $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Reste la question du prochain chapitre : si $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas, comment le *situer* ? En l'enfermant entre deux nombres que l'on sait écrire, aussi serrés qu'on le veut, et en annonçant de combien on se trompe.

Fin du chapitre

[ACT-A1] [EXO-A1] [DM-A1.1] [EVAL-A1]