



DM 1 · A1. LE PLI DE LICHTENBERG

Pourquoi la feuille que vous tenez mesure exactement ce qu'elle mesure

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
I. Le pli	△	le cours, et une règle graduée
II. La série	△ ▲	la partie I
III. L'irrationnel	▲	les parties I et II
IV. Les autres formats	◆	les parties II et III
V. Un autre rectangle qui se reproduit	◆	indépendante des parties II à IV

Facultatif, et pour longtemps. Ce devoir n'est pas obligatoire, et il n'a pas de socle : on peut n'en faire qu'une partie. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé et ne peut que faire monter votre moyenne ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document vous accompagnera peut-être plusieurs années : certaines questions vous attendront en Première, d'autres en Terminale. Horizon raisonnable : trois à quatre semaines, sans date limite stricte. Et si vous bloquez, **écrivez** : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Une lettre de Göttingen, 25 octobre 1786

LE professeur Georg Christoph Lichtenberg écrit à son collègue Johann Beckmann, de l'autre côté de la ville universitaire de Göttingen. Il vient de réfléchir à une question que nul n'avait tranchée : quelles proportions devrait avoir une feuille de papier pour qu'on puisse la réduire de moitié sans jamais la déformer ? Sa réponse tient en une phrase. Il faudrait, dit-il, que ses côtés soient entre eux comme le côté d'un carré et sa diagonale.

Cette lettre ne changea rien. Elle dormit cent trente-six ans.

Puis, dans les années 1920, un ingénieur allemand installé à Berlin, Walter Porstmann, la retrouve, comprend ce qu'elle contient, et y ajoute une idée à lui : fixer l'aire de la plus grande feuille à exactement un mètre carré. Le 18 août 1922, le comité allemand de normalisation de l'industrie publie la norme DIN 476. Elle deviendra la norme internationale ISO 216 en 1975, et c'est elle qui a décidé des dimensions de la feuille posée devant vous.

LICHTENBERG, 1742-1799

Lichtenberg était physicien, et l'un des grands aphoristes de langue allemande. On lui doit aussi les *figures de Lichtenberg*, ces ramifications que dessine une décharge électrique dans un isolant, et que l'on retrouve dans la forme des éclairs. Il n'a jamais publié sa remarque sur le papier : elle est restée dans une lettre privée.

Ce devoir refait le chemin. On part d'une feuille et d'une règle, on retrouve la proportion de Lichtenberg, puis les nombres exacts de la norme, et l'on finit par une question que Porstmann lui-même n'a pas eu à trancher : pourquoi ces nombres ne peuvent *pas* être exacts.

Deux résultats sont posés ici une fois pour toutes. Vous pourrez les citer librement, en les nommant, à n'importe quel moment du devoir.

R1 – LONGUEURS INCOMMENSURABLES

Soient a et b deux longueurs strictement positives. Si le quotient $\frac{a}{b}$ est **irrationnel**, alors il n'existe **aucune** unité de mesure dans laquelle a et b soient tous deux des nombres entiers.

En effet, si une telle unité existait, les mesures de a et de b dans cette unité seraient deux entiers naturels non nuls p et q , et le quotient $\frac{a}{b}$, qui ne dépend pas de l'unité choisie, vaudrait $\frac{p}{q}$: ce serait un quotient de deux entiers, donc un rationnel.

R2 – MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

La **moyenne géométrique** de deux nombres strictement positifs a et b est le nombre $\sqrt{ab}$. Si $a < b$, alors $a < \sqrt{ab} < b$: la moyenne géométrique est toujours comprise entre les deux nombres dont elle provient.

En effet, de $a < b$ on tire $a^2 < ab$ et $ab < b^2$, en multipliant par a puis par b , tous deux strictement positifs. La fonction racine carrée étant strictement croissante, et a et b étant positifs, on a $\sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{b^2} = b$: on obtient donc $a < \sqrt{ab} < b$.

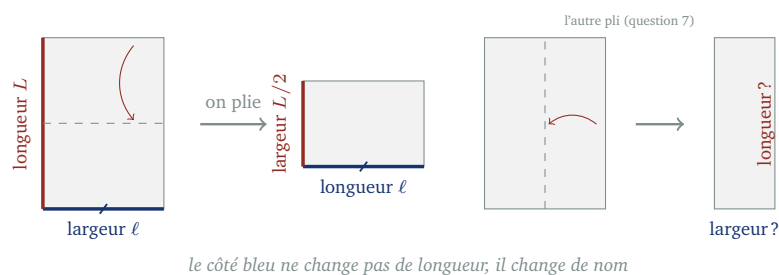
PARTIE I

△ · le cours, et une règle graduée

Le pli

Prenez une feuille de ce devoir, ou n'importe quelle feuille de format A4, et une règle graduée en millimètres.

1. Mesurer la longueur L et la largeur ℓ de la feuille, en millimètres. Calculer le quotient $\frac{L}{\ell}$, arrondi à 10^{-3} près.
2. Plier la feuille en deux, en rabattant un petit côté sur l'autre. Mesurer la nouvelle feuille obtenue et calculer son quotient $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$, arrondi à 10^{-3} près. Que remarque-t-on ?
3. On veut maintenant démontrer ce que la mesure suggère. Une feuille de longueur L et de largeur ℓ , pliée en deux comme à la question 2, donne une feuille de longueur ℓ et de largeur $\frac{L}{2}$. Écrire l'égalité qui traduit que les deux feuilles ont **le même quotient** longueur sur largeur.



4. Montrer que cette égalité équivaut à $L^2 = 2\ell^2$.
5. En déduire que $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$. On justifiera soigneusement pourquoi c'est la racine positive, et pas son opposée.
6. Comparer cette valeur exacte au quotient mesuré à la question 1, en reprenant ce quotient avec **toutes** les décimales que donne la calculatrice. Combien de décimales coïncident ?
7. **Et si l'on pliait dans l'autre sens ?** On rabat cette fois un *grand* côté sur l'autre. Donner les dimensions de la feuille obtenue, calculer son quotient, et dire si elle est semblable à la feuille de départ.
8. Un carré peut-il posséder la propriété de Lichtenberg, c'est-à-dire rester semblable à lui-même après le pli de la question 2 ? Et un rectangle deux fois plus long que large ? Justifier dans les deux cas.

LE MÈTRE, 1795

Le choix de Porstmann n'est pas anodin : en fixant l'aire de A_0 à un mètre carré, il attache le papier au système métrique, né de la Révolution française. C'est ce qui rend le grammage utilisable : dire qu'un papier fait « 80 grammes » n'a de sens que parce qu'on sait à quelle aire cela se rapporte.

PARTIE II

△ ▲ · utilise la partie I

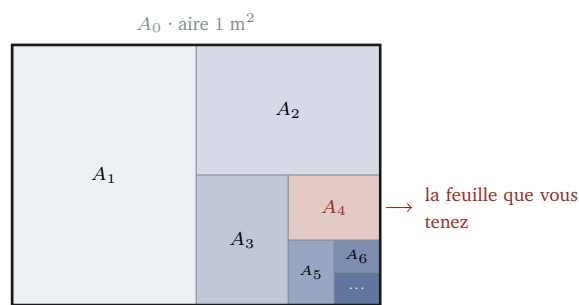
La série

La partie I a fixé la *forme* : le quotient vaut $\sqrt{2}$, et cela ne dépend d'aucune unité. Mais la forme ne dit rien de la *taille* : une feuille de timbre-poste et une affiche de cinéma peuvent avoir le même quotient. Il manque une seconde décision, et c'est celle de Porstmann.

DÉFINITION – LA SÉRIE A

La série des formats A est construite ainsi : le format A_0 a une aire de **exactement un mètre carré** et un quotient longueur sur largeur égal à $\sqrt{2}$; chaque format A_{n+1} s'obtient en pliant A_n en deux comme à la partie I. Le format de ce devoir est A_4 .

Deux conditions, deux inconnues : le système est déterminé, et les dimensions de toute la série en découlent. C'est ce que les questions qui suivent vont établir, avant de les confronter aux nombres que porte réellement l'emballage d'une rame de papier.



9. Justifier que l'aire du format A_n vaut $\frac{1}{2^n}$ mètre carré, pour tout entier naturel n .
10. On note L_0 et ℓ_0 les dimensions de A_0 , en mètres. Écrire les **deux** conditions que ces nombres doivent vérifier.
11. Montrer que $\ell_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis en déduire que $\ell_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Calculer cette valeur à 10^{-4} mètre près.
12. Montrer que $L_0 = \frac{1}{\ell_0}$, puis calculer L_0 à 10^{-4} mètre près. Donner enfin les deux dimensions de A_0 en millimètres, arrondies au millimètre.
13. Les dimensions officielles du format A_0 sont 841×1189 millimètres. Vos résultats concordent-ils ?
14. Recopier et compléter le tableau suivant. On passe d'une colonne à la suivante en pliant : la largeur du nouveau format est la moitié de la longueur du précédent, et sa longueur est l'ancienne largeur. **On arrondira toujours au millimètre inférieur**, car c'est la convention qu'a retenue la norme ; la question 28 y reviendra.

format	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
largeur	841			297					
longueur	1189			420					

15. Combien de feuilles A_4 faut-il pour recouvrir une feuille A_0 , dans le modèle théorique où aucun arrondi n'intervient ? Répondre de **deux façons** : par le nombre de plis, puis par les aires.
16. Déterminer l'aire du format A_4 , en mètre carré, puis en millimètres carrés.
17. Le papier d'imprimante ordinaire a un *grammage* de 80 grammes par mètre carré. Quelle est alors la masse théorique d'une feuille A_4 ? Et celle d'une rame de 500 feuilles ?
18. Beaucoup de rames de papier portent l'indication d'un poids sur leur emballage. Confronter votre résultat à cette indication, si vous pouvez en trouver une.
19. Calculer la longueur de la diagonale d'une feuille A_4 officielle (210×297 millimètres), arrondie au dixième de millimètre. Cette diagonale est-elle plus longue ou plus courte que le grand côté d'une feuille A_3 ?

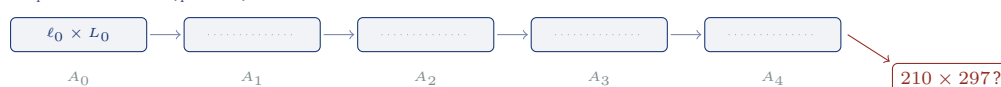
L'irrationnel

Le cours a démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Cette partie en tire une conséquence matérielle, que l'on n'attend pas d'un théorème sur les nombres : **la norme DIN 476 est nécessairement inexacte**, et aucune amélioration des machines n'y changera rien.

20. Supposons qu'une feuille de la série A ait ses deux dimensions égales à un nombre entier de millimètres. Que vaudrait alors le quotient $\frac{L}{\ell}$, et pourquoi est-ce impossible ? Conclure.
21. La question précédente parlait de millimètres. En invoquant le résultat R1, montrer que le problème est bien plus profond : **aucune unité de mesure**, si petite soit-elle, ne peut rendre entières les deux dimensions d'une feuille de la série A.
22. Reprendre les **valeurs exactes** $\ell_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ et $L_0 = \frac{1}{\ell_0}$ établies à la partie II, et en déduire les dimensions de A_4 , en millimètres, à 10^{-3} millimètre près. Attention : les valeurs arrondies de la question 11 ne suffisent pas pour atteindre cette précision, c'est justement l'objet du sous-item c.
On rappelle que l'on passe de A_n à A_{n+1} en divisant la longueur par deux, la largeur devenant la nouvelle longueur.
 - a. Donner les dimensions exactes de A_1 , puis de A_2 .
 - b. Poursuivre jusqu'à A_4 , en conservant **toutes** les décimales de la calculatrice à chaque étape.
 - c. Expliquer pourquoi arrondir dès A_1 fausserait le résultat final, et estimer l'ordre de grandeur de l'erreur ainsi commise.
23. Comparer aux dimensions officielles 210×297 millimètres. De combien la norme s'écarte-t-elle, sur chaque dimension ?
24. Calculer $\frac{297}{210}$ à 10^{-7} près, et le comparer à $\sqrt{2}$. Exprimer l'écart relatif entre ces deux nombres, c'est-à-dire le quotient de leur différence par $\sqrt{2}$.
25. Calculer l'aire réelle d'une feuille A_4 officielle, en mètre carré. La comparer à la valeur théorique trouvée à la question 16.
26. En déduire la masse réelle d'une feuille A_4 de grammage 80 grammes par mètre carré. Pourquoi n'obtient-on pas exactement le résultat de la question 17 ?
27. Une feuille A_4 officielle, pliée en deux, donne une feuille dont on calculera les dimensions. Or le format A_5 officiel mesure 148×210 millimètres. Que constate-t-on ?
28. **Les arrondis s'accumulent-ils ?** À la question 14, chaque pli demandait un arrondi, et quatre d'entre eux n'étaient pas exacts. Comparer les dimensions ainsi obtenues pour A_4 aux dimensions théoriques de la question 22 : les erreurs d'arrondi se cumulent-elles d'un format au suivant, ou restent-elles contenues ?

Enfin, la norme arrondit-elle toujours dans le même sens ? Regarder de près l'arrondi qu'a demandé le format A_0 lui-même, à la question 12.

on part des valeurs exactes (question 22)



on arrondit au millimètre à chaque étape (question 14)

29. **Rédiger un paragraphe** expliquant, à quelqu'un qui n'a pas fait ce devoir, pourquoi les nombres de la norme ne pouvaient pas être exacts, et pourquoi cela n'a aucune importance pratique.

WALTER PORSTMANN, 1886-1959

Ingénieur et normalisateur, Porstmann fut l'assistant de Wilhelm Ostwald, prix Nobel de chimie et militant infatigable de la standardisation. Il publia en 1930 un ouvrage entier consacré aux formats normalisés. La norme DIN 476 fut adoptée par une vingtaine de pays avant la guerre, et ce sont ces formats que l'ISO reprit en 1975 sous le numéro 216.

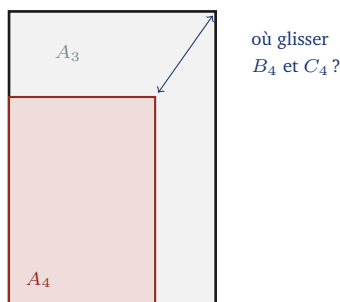
PARTIE IV

♦ · utilise les parties II et III

Les autres formats

Le monde du papier ne se limite pas à la série A. Deux autres séries existent, et un continent entier utilise un format construit sur un tout autre principe.

Les séries B et C ne sont pas des caprices d'administration : elles répondent à un problème concret. Une enveloppe doit être un peu plus grande que la feuille qu'elle contient, mais pas trop, sinon la feuille flotte. Il fallait donc glisser des formats *entre* ceux de la série A, et le faire sans casser la proportion de Lichtenberg. La moyenne géométrique est exactement l'outil qui permet cela.



deux formats consécutifs de la série A : l'aire double d'un cran à l'autre

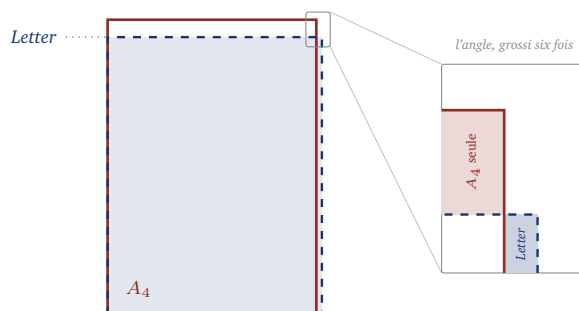
DÉFINITION – LES SÉRIES B ET C

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la largeur du format B_n est la *moyenne géométrique* des largeurs de A_n et A_{n-1} , c'est-à-dire la racine carrée de leur produit. La largeur du format C_n , celui des enveloppes, est la moyenne géométrique des largeurs de A_n et B_n . Les longueurs suivent la même règle.

Le format B_0 échappe à cette écriture, puisqu'il n'existe pas de A_{-1} : on convient que sa largeur est la moyenne géométrique de la *largeur* et de la *longueur* de A_0 . Les deux règles coïncident, car la largeur qu'aurait A_{-1} serait précisément la longueur de A_0 .

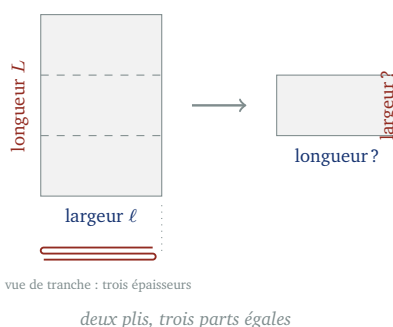
30. Le format B_0 mesure 1000×1414 millimètres. Vérifier que son quotient est proche de $\sqrt{2}$, et dire ce que sa largeur a de remarquable.
31. ♦ Ce n'est pas un hasard. La largeur de B_0 est la moyenne géométrique de la largeur et de la *longueur* de A_0 . En utilisant une égalité établie à la partie II, démontrer que cette largeur vaut **exactement** un mètre.
32. Sachant que A_4 mesure 210×297 millimètres et A_3 mesure 297×420 millimètres, calculer la largeur théorique de B_4 et l'arrondir au millimètre. La comparer à la valeur officielle, 250 millimètres.

33. Calculer de même la largeur théorique de C_4 et l'arrondir au millimètre. La valeur officielle est 229 millimètres.
34. En invoquant le résultat R2, justifier que la largeur de C_4 est nécessairement comprise entre celle de A_4 et celle de B_4 . Expliquer alors pourquoi une enveloppe C_4 peut contenir une feuille A_4 sans la plier.
35. Le format *US Letter*, utilisé en Amérique du Nord, mesure 8,5 pouces sur 11 pouces, un pouce valant 25,4 millimètres. Calculer ses dimensions en millimètres, puis son quotient longueur sur largeur.



à la même échelle : presque la même taille, et pourtant pas la même forme
 A_4 dépasse en haut, Letter dépasse à droite

36. Plier une feuille *US Letter* en deux et calculer le quotient de la feuille obtenue. Comparer au quotient de départ, et conclure sur ce qui distingue les deux systèmes.
37. ♦ Quel devrait être le quotient $\frac{L}{\ell}$ d'une feuille pour qu'en la pliant **en trois** dans le sens de la longueur, on obtienne une feuille semblable à celle de départ ? Le démontrer.



38. ♦ Généraliser à un pli en n parts, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles ce quotient est un nombre **rationnel** ? En exhiber une, décrire la feuille correspondante, et dire ce qui distingue radicalement une telle feuille de la feuille A_4 .

UNE LIMITE QUI N'EST PAS MATHÉMATIQUE

Toutes ces questions supposent qu'on peut plier. Or l'aire est divisée par deux à chaque pli, tandis que l'épaisseur double : au bout de sept ou huit plis, une feuille ordinaire devient un petit bloc que la main ne parvient plus à écraser. La limite n'est pas dans les nombres, elle est dans la matière. Cela n'empêche pas les nombres d'avoir raison : c'est seulement le papier qui n'est pas à la hauteur.

ISO 216, 1975

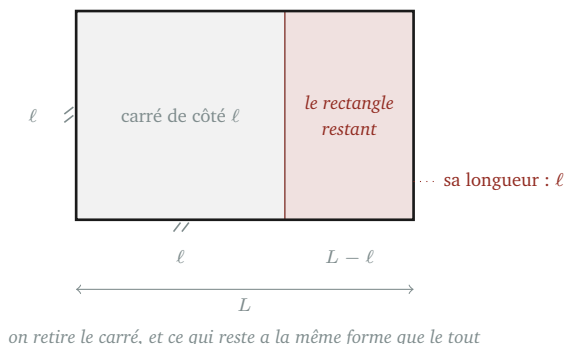
La norme allemande de 1922 est devenue internationale en 1975. Elle est aujourd'hui utilisée par la quasi-totalité des pays du monde, à deux exceptions notables : les États-Unis et le Canada, qui ont conservé le *Letter* et ses cousins, et que suivent partiellement le Mexique et quelques pays d'Amérique latine. C'est pourquoi un document américain imprimé en Europe présente presque toujours des marges bizarres, et réciproquement.

Un autre rectangle qui se reproduit

La feuille A4 a une propriété rare : elle engendre sa propre copie réduite quand on la **plie**. Ce n'est pas la seule forme à savoir se reproduire, et la comparaison éclaire ce qui est vraiment en jeu.

DÉFINITION – RECTANGLE D'OR

Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est dit **d'or** lorsque, si l'on en retire un carré de côté ℓ , le rectangle restant est semblable au rectangle de départ.



39. Le rectangle restant a pour dimensions ℓ et $L - \ell$. Écrire l'égalité des quotients, puis montrer qu'en posant $x = \frac{L}{\ell}$, elle équivaut à

$$x^2 = x + 1.$$

Vérifier ensuite, par le calcul, que $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ convient.

40. On admet que $\sqrt{5}$ est irrationnel. Démontrer que le nombre

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

est irrationnel lui aussi. Puis, en une phrase, dire ce qui distingue le rectangle d'or de la feuille A4 : que fait-on à l'un que l'on ne fait pas à l'autre ?

ÉPILOGUE

Épilogue

Vous êtes parti d'une feuille et d'une règle. Vous avez retrouvé, sans le chercher, le raisonnement d'un professeur de Göttingen qui écrivait à un ami en 1786, puis les décisions d'un ingénieur des années 1920, et enfin la raison profonde pour laquelle aucune norme, aucune machine, aucun contrôle qualité ne pourra jamais fabriquer une feuille A4 exacte.

Il y a quelque chose d'étrange à ce qu'une propriété des nombres, démontrée par les Grecs sur la diagonale d'un carré, se retrouve inscrite dans un objet que vous manipulez chaque jour sans y penser, et dans les 210 millimètres qui ne sont pas tout à fait les bons.

Remarquez au passage ce qui s'est joué. Le théorème sur $\sqrt{2}$ parle de nombres, et de rien d'autre : il ne connaît ni le papier, ni les imprimantes, ni les normes. Pourtant il a suffi de le poser à côté d'une exigence

matérielle, celle de plier sans déformer, pour qu'il décide de ce qu'aucune usine ne pourra jamais fabriquer. C'est le mouvement le plus caractéristique des mathématiques : un énoncé sur des objets abstraits vient contraindre le monde, et le contraint sans appel.

Vous pouvez refermer ce devoir. Mais la prochaine fois qu'une imprimante vous demandera « A4 ou Letter ? », vous saurez que la question n'est pas de goût.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q3. Le quotient de la feuille de départ est $\frac{L}{\ell}$. Écrivez celui de la feuille pliée en respectant l'ordre longueur sur largeur, puis égalez les deux.

Q5. Vous avez $L^2 = 2\ell^2$, donc $\left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = 2$. Deux nombres ont pour carré 2 ; lequel des deux peut être un quotient de longueurs ?

Q7. Attention à ne pas confondre : après ce pli, c'est la *largeur* qui est divisée par deux, et la longueur qui ne bouge pas.

Q8. Pour le carré, $L = \ell$; reportez dans l'égalité de la question 3 et voyez ce qu'elle donne.

Q11. Des deux conditions de la question 10, tirez L_0 en fonction de ℓ_0 dans l'une, et reportez dans l'autre. Une racine de racine, c'est deux appuis sur la touche.

Q12. L'aire vaut 1, ce qui donne $L_0 \times \ell_0 = 1$ directement.

Q14. Les rôles s'échangent : la largeur devient la longueur, et la longueur divisée par deux devient la largeur.

Q19. Le théorème de Pythagore s'applique au triangle rectangle formé par la longueur, la largeur et la diagonale.

Q20. Un quotient de deux entiers, c'est une fraction. Or vous savez ce que $\frac{L}{\ell}$ vaut exactement depuis la question 5.

Q21. Le résultat R1 ne parle d'aucune unité en particulier, et c'est précisément ce qui fait sa force. Relisez-le.

Q25. Calculez d'abord en millimètres carrés. Pour convertir, souvenez-vous qu'un mètre carré vaut un million de millimètres carrés.

Q28. Faites le calcul étape par étape, en notant à chaque fois le nombre exact avant de l'arrondir, puis comparez la suite obtenue à celle de la norme.

Q31. Vous cherchez $\sqrt{\ell_0 \times L_0}$, et vous connaissez déjà ce produit depuis la question 12.

Q32. La moyenne géométrique de a et b , c'est $\sqrt{ab}$. Prenez ici les largeurs de A_4 et de A_3 .

Q34. R2 dit qu'une moyenne géométrique se glisse toujours entre les deux nombres dont elle provient. Appliquez-le deux fois si nécessaire.

Q37. Refaites exactement le raisonnement de la partie I, en remplaçant $\frac{L}{2}$ par $\frac{L}{3}$.

Q38. Le quotient cherché est $\sqrt{n}$. Essayez les premières valeurs de n et regardez laquelle donne un nombre entier.

Q39. Le rectangle restant a pour longueur ℓ et pour largeur $L - \ell$: c'est le plus long des deux qui va au numérateur. Divisez ensuite tout par ℓ^2 .

Q40. Si ce nombre était rationnel, que pourriez-vous dire de son double, puis du double diminué de 1 ?