



A2. ORDRE, INTERVALLES ET VALEUR ABSOLUE

Ce que veut dire « assez proche », et comment l'écrire

TABLE DES MATIÈRES		
1. COMPARER	2	2. CERNER 9
1.1. Comparer, c'est soustraire	2	2.1. Les intervalles 9
1.2. Ce que l'ordre supporte	4	2.2. Réunir et croiser 10
1.3. Multiplier, et le renversement	5	2.3. Cerner un réel à 10^{-n} près 12
1.4. Comparer par le quotient	6	2.4. Tronquer, arrondir. 14
1.5. Encadrer une expression.	7	3. LOCALISER 15
		3.1. La valeur absolue 15
		3.2. Mesurer un écart 17
		3.3. Du ruban à l'intervalle 18

PARCOURS DU CHAPITRE

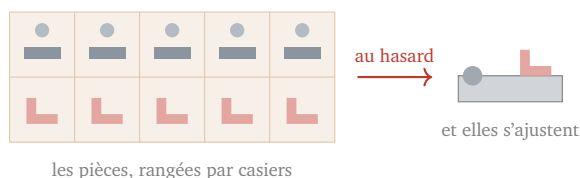
■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

*« Dans ses écrits, un sage Italien
Dit que le mieux est l'ennemi du bien. »
Voltaire, La Bégueule (1772)*

Paris, le 30 août 1785. Thomas Jefferson, ministre des États-Unis en France, a visité quelques semaines plus tôt l'atelier d'un armurier, et il s'installe pour l'écrire à John Jay, à New York. Il y a vu quelque chose dont il pressent qu'il changera la manière de fabriquer les objets, et il tient à le raconter. L'ouvrier lui a présenté les pièces de **cinquante platines de fusil**, entièrement démontées et rangées par casiers. Jefferson en a assemblé plusieurs lui-même, prenant les pièces au hasard, comme elles lui venaient sous la main. Toutes se sont ajustées.



L'armurier est Honoré Blanc (1736-1801). Jefferson ne le nomme pas dans sa lettre, où il n'est que « l'ouvrier » : c'est l'historien David Hounshell qui l'a identifié, près de deux siècles plus tard.

Hounshell, 1984

Arrêtons-nous une seconde sur ce que cela suppose. Ces pièces ont été *limées une par une*, à la main, sur des gabarits. Or deux coups de lime ne donnent jamais le même résultat : aucune de ces pièces n'a exactement les mêmes dimensions qu'une autre, et aucune ne le peut. Alors pourquoi s'ajustent-elles ?

Le chapitre précédent s'est achevé sur un constat du même ordre. Aucune écriture décimale ne donne $\sqrt{2}$ exactement, ni la nôtre, ni celle du scribe, ni celle d'une machine. Nous avons laissé la question ouverte : si l'on ne peut pas écrire un nombre, comment le *situer* ?

Ces deux questions n'en font qu'une, et ce chapitre y répond. L'exactitude n'est presque jamais ce que l'on demande. Ce que l'on demande, d'un nombre comme d'une pièce d'acier, c'est d'être **assez proche** de ce qu'il faut, et de savoir dire de combien on s'en écarte. Reste à apprendre à l'écrire.

1. COMPARER

1.1. Comparer, c'est soustraire

Dire qu'un nombre est plus petit qu'un autre, c'est dire quelque chose sur leur *différence*. Toute la section tient dans cette remarque.

DÉFINITION – ORDRE SUR LES RÉELS

Soient a et b deux réels. On dit que a **est inférieur ou égal à** b , et l'on écrit $a \leq b$, lorsque le nombre $b - a$ est positif.

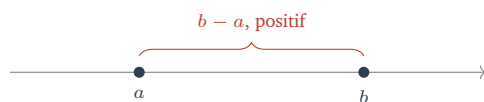
On dit que a **est strictement inférieur à** b , et l'on écrit $a < b$, lorsque $b - a$ est strictement positif.

Sur la droite graduée, cela se voit sans calcul : $a \leq b$ signifie que le point d'abscisse a est à gauche du point d'abscisse b , ou confondu avec lui.

OBJECTIFS

- ▷ Comparer par le signe de la différence
- ▷ Additionner deux inégalités
- ▷ Multiplier, et savoir quand le sens se renverse
- ▷ Comparer deux nombres strictement positifs par leur quotient

positif : En français, « positif » signifie « nul ou de signe + » : le nombre 0 est positif et négatif. Pour exclure zéro, on dit strictement. L'anglais réserve positive aux nombres strictement supérieurs à zéro : les deux conventions coexistent.



l'ordre se lit de gauche à droite ; il se décide par le signe d'une soustraction

MÉTHODE – COMPARER DEUX NOMBRES

- ▷ 1. Calculer la différence des deux nombres, dans l'ordre choisi.
- ▷ 2. Réduire son écriture : même dénominateur, développement, factorisation.
- ▷ 3. Déterminer le signe de la différence obtenue.
- ▷ 4. Conclure, en rappelant lequel des deux est le plus grand.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Comparer $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{11}$.

Calculons la différence $\frac{8}{11} - \frac{7}{9}$, au dénominateur commun 99 :

$$\frac{8}{11} - \frac{7}{9} = \frac{8 \times 9}{99} - \frac{7 \times 11}{99} = \frac{72 - 77}{99} = \frac{-5}{99}.$$

Ce nombre est strictement négatif, puisque son numérateur l'est et son dénominateur est strictement positif. Donc

$$\boxed{\frac{8}{11} < \frac{7}{9}}$$

Aucune calculatrice n'est intervenue, et c'est le point : la méthode démontre, là où une valeur approchée ne fait que suggérer.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Comparer $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$. Tout est fait, sauf la conclusion :

$$\frac{7}{10} - \frac{5}{7} = \frac{49 - 50}{70} = \frac{-1}{70},$$

nombre strictement négatif. **À vous la conclusion.**

(b) Comparer $\frac{11}{13}$ et $\frac{6}{7}$. La différence est calculée et réduite :

$$\frac{6}{7} - \frac{11}{13} = \frac{78 - 77}{91} = \frac{1}{91}.$$

À vous le signe et la conclusion.

La méthode a un mérite que les valeurs approchées n'ont pas : elle fonctionne encore lorsque les nombres dépendent d'une lettre.

Les signes $<$ et $>$ paraissent en 1631 dans un livre publié dix ans après la mort de Thomas Harriot. Or on ne les trouve nulle part de sa main dans ses manuscrits : c'est son éditeur, Walter Warner, qui les y a vraisemblablement mis. Pierre Bouguer place en 1734 une barre d'égalité sous ces signes ; nos $\leq$ et $\geq$ en descendent.

Harriot, Warner, Bouguer

PORTAIL ACT

ACT-A2 · Phases 1-4 ★

Le ballon-sonde et son gradient : la question de l'altitude où la température bascule, posée avant que le cours n'ait donné le moindre outil

Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 28 (« Manipulation d'inégalités »).

Exemple – Une comparaison qui vaut pour tous les réels ♦

Comparer $x^2 + 1$ et $2x$, quel que soit le réel x .

La différence se factorise grâce à une identité remarquable du chapitre précédent :

$$x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Un carré est toujours positif. La différence est donc positive quel que soit le réel x , et

$$\text{pour tout réel } x, 2x \leq x^2 + 1$$

Une valeur approchée n'aurait jamais donné ce résultat : il porte sur une infinité de nombres à la fois. On remarquera au passage que les deux membres sont égaux lorsque $x = 1$, et seulement dans ce cas.

ÉCHO EXO

EXO-A2 · Ex. 1-6 ★

Comparer par le signe d'une différence, puis par un quotient, et ce qu'on a le droit d'en déduire. La partie I va jusqu'à la vraie règle de soustraction, que ce cours n'énonce pas

1.2. Ce que l'ordre supporte

PROPRIÉTÉ – AJOUTER UN MÊME NOMBRE AUX DEUX MEMBRES

Soient a , b et c trois réels. Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

Pourquoi. La différence des deux nouveaux membres,

$$(b + c) - (a + c) = b - a,$$

est exactement la différence de départ. Elle est positive par hypothèse, donc la nouvelle inégalité est vraie. Ajouter un même nombre aux deux membres translate les deux points du même déplacement : leurs positions relatives ne bougent pas.

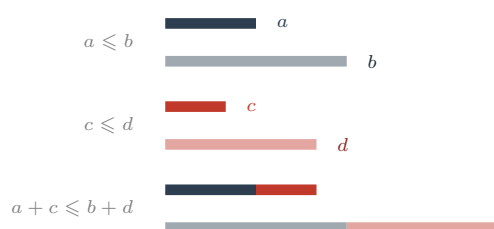
PROPRIÉTÉ – ADDITIONNER DEUX INÉGALITÉS DE MÊME SENS

Soient a , b , c et d quatre réels. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Pourquoi. La différence des deux membres se réorganise ainsi :

$$(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c).$$

C'est une somme de deux nombres positifs, donc un nombre positif.



bout à bout : les deux plus petits d'un côté, les deux plus grands de l'autre

La figure montre quatre nombres positifs, mais la propriété n'en demande pas tant : elle vaut pour quatre réels quelconques, comme le montre le calcul qui précède.

Attention – On ne soustrait pas membre à membre

La règle d'addition ne se transpose pas telle quelle à la soustraction, et vouloir la recopier conduit à des énoncés faux. Partons de deux inégalités incontestables :

$$2 \leq 3 \quad \text{et} \quad 1 \leq 5.$$

Si l'on soustrayait membre à membre, on obtiendrait $2 - 1 \leq 3 - 5$, c'est-à-dire $1 \leq -2$, ce qui est faux.

La raison est simple : soustraire, c'est ajouter l'opposé, or *les opposés se rangent dans l'ordre inverse*, et l'addition n'est licite qu'entre deux inégalités de même sens. C'est précisément l'objet du paragraphe suivant.

1.3. Multiplier, et le renversement

PROPRIÉTÉ – MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, et soit k un réel.

- Si k est strictement positif, alors $ka \leq kb$: l'ordre est conservé.
- Si k est strictement négatif, alors $kb \leq ka$: l'ordre est **renversé**.

Démonstration.

Supposons $a \leq b$, c'est-à-dire que le nombre $b - a$ est positif. Multiplions-le par k et développons :

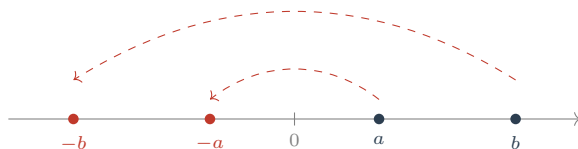
$$k(b - a) = kb - ka.$$

Premier cas : k est strictement positif. Le produit d'un nombre strictement positif par un nombre positif est positif. Donc $kb - ka$ est positif, ce qui signifie exactement $ka \leq kb$.

Second cas : k est strictement négatif. Le produit d'un nombre strictement négatif par un nombre positif est négatif. Donc $kb - ka$ est négatif, autrement dit $ka - kb$ est positif, ce qui signifie exactement $kb \leq ka$.

Dans les deux cas, la conclusion annoncée est établie. ■

Le cas $k = -1$ mérite d'être regardé en face, car c'est lui qu'on oublie : la symétrie par rapport à l'origine échange la gauche et la droite.



$a \leq b$ à droite ; à gauche, les opposés se rangent dans l'ordre inverse

Exemple – Les deux cas, l'un après l'autre

On sait que $3 \leq x$.

En multipliant par 4, qui est strictement positif, le sens est conservé :

$$12 \leq 4x.$$

En multipliant par -4 , qui est strictement négatif, le sens est renversé :

$$-4x \leq -12.$$

Une vérification coûte deux secondes et démasque aussitôt une règle mal recopiée : prenons $x = 10$. Dans le premier cas, $12 \leq 40$, c'est vrai. Dans le second, $-40 \leq -12$, c'est vrai aussi. Si l'on avait écrit $-4x \geq -12$, la valeur test l'aurait immédiatement démenti.

1.4. Comparer par le quotient

La différence répond à la question « de combien différent-ils ? ». Pour deux quantités strictement positives, une seconde comparaison existe, qui répond à une autre question : « par quel nombre faut-il multiplier l'une pour obtenir l'autre ? ». C'est la comparaison par le quotient, dite **multiplicative**.

PROPRIÉTÉ – COMPARER DEUX NOMBRES STRICTEMENT POSITIFS PAR LEUR QUOTIENT

Soient a et b deux réels strictement positifs. Dire que $\frac{a}{b} \leq 1$ revient à dire que $a \leq b$; dire que $\frac{a}{b} \geq 1$ revient à dire que $a \geq b$.

Pourquoi. Multiplier les deux membres de $\frac{a}{b} \leq 1$ par le nombre strictement positif b conserve le sens et donne $a \leq b$. Réciproquement, multiplier ceux de $a \leq b$ par $\frac{1}{b}$, strictement positif lui aussi, refait le chemin en sens inverse. On raisonne de même avec $\geq$. Ce n'est donc rien d'autre que la propriété précédente, appliquée deux fois.

MÉTHODE – COMPARER DEUX QUANTITÉS PAR LEUR QUOTIENT

- ▷ 1. Vérifier que les deux quantités sont strictement positives : sans cela, la méthode est interdite.
- ▷ 2. Calculer leur quotient, dans l'ordre choisi.
- ▷ 3. Situer ce quotient par rapport à 1.
- ▷ 4. Conclure : la position du quotient par rapport à 1 donne l'ordre

Ce quotient porte un nom que vous retrouverez au chapitre P1 (Information chiffrée) : le **coefficient multiplicateur**. Il y servira à mesurer des évolutions.

des deux quantités, et sa valeur dit par quel nombre l'une se multiplie pour donner l'autre.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Un abonnement passe de 40 à 50 euros par mois, un loyer de 400 à 410 euros par mois. Quelle hausse est, proportionnellement, la plus forte ?

Les deux différences valent 10 euros : la comparaison additive ne distingue pas les deux hausses. Tous les prix sont strictement positifs : comparons chaque prix nouveau à l'ancien par leur quotient.

$$\frac{50}{40} = 1,25 \quad \text{et} \quad \frac{410}{400} = 1,025.$$

Les deux quotients dépassent 1 : chaque prix a bien augmenté. Mais le premier dit que l'abonnement a été multiplié par 1,25, il a augmenté d'un quart ; le second, que le loyer a été multiplié par 1,025 à peine. À différence égale, c'est la hausse de l'abonnement qui est, en proportion, très nettement la plus forte :

$$\boxed{\frac{50}{40} = 1,25 > 1,025 = \frac{410}{400}}$$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Un forfait passe de 25 à 30 euros, un autre de 50 à 55 euros : deux hausses de 5 euros. *Les prix sont strictement positifs, les quotients sont calculés et situés :*

$$\frac{30}{25} = 1,2 \quad \text{et} \quad \frac{55}{50} = 1,1,$$

tous deux supérieurs à 1. À vous la conclusion : quelle hausse est, en proportion, la plus forte ?

(b) Une ville passe de 8 000 à 8 400 habitants, une autre de 10 000 à 10 400 : deux hausses de 400 habitants. *Les populations sont strictement positives et les quotients calculés :* $\frac{8\,400}{8\,000} = 1,05$ et $\frac{10\,400}{10\,000} = 1,04$.
À vous leur position par rapport à 1 et la conclusion.

1.5. Encadrer une expression

Une double inégalité comme $2 \leq x \leq 5$ dit que x est pris entre deux nombres connus. C'est la situation ordinaire de toute mesure : on ne connaît jamais la valeur exacte, on connaît deux bornes.

ÉCHO EXO

EXO-A2 · Ex. 7–11 ★★

Encadrer une expression, puis deux prolongements que ce cours n'aborde pas : le produit de positifs et l'inverse, tous deux démontrés là-bas

DÉFINITION – ENCADREMENT, AMPLITUDE

Encadrer un réel x , c'est donner deux réels u et v tels que $u \leq x \leq v$.

Le nombre $v - u$ est l'**amplitude** de l'encadrement.

Plus l'amplitude est petite, plus l'encadrement est *précis* : il enferme x dans un morceau de droite plus court.

Ces règles suffisent à transformer un encadrement de x en un encadrement de n'importe quelle expression du premier degré en x . C'est le premier vrai outil du chapitre.

L'amplitude est ce qui permet de dire de combien au plus on se trompe si l'on retient une borne à la place du nombre. Un encadrement sans amplitude annoncée est une information incomplète.

MÉTHODE – ENCADRER UNE EXPRESSION DU PREMIER DEGRÉ

- ▷ 1. Partir de l'encadrement de x .
- ▷ 2. Multiplier les trois membres par le coefficient de x , en renversant l'encadrement si ce coefficient est strictement négatif.
- ▷ 3. Ajouter la constante aux trois membres.
- ▷ 4. Vérifier avec les deux valeurs extrêmes de x : elles doivent redonner les deux bornes trouvées.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Sachant que $2 \leq x \leq 5$, encadrer $A = 3 - 2x$.

Le coefficient de x est -2 , strictement négatif : la multiplication va renverser l'encadrement. Multiplions les trois membres et retournons la lecture :

$$2 \leq x \leq 5 \quad \text{donne} \quad -10 \leq -2x \leq -4.$$

Ajoutons maintenant 3 aux trois membres, ce qui ne change aucun sens :

$$-7 \leq 3 - 2x \leq -1.$$

Vérification. Pour $x = 2$, on trouve $A = 3 - 4 = -1$: c'est bien la borne supérieure. Pour $x = 5$, on trouve $A = 3 - 10 = -7$: c'est bien la borne inférieure. La plus petite valeur de x a donné la plus grande valeur de A , et inversement : les deux bornes ont échangé leurs rôles, exactement comme le renversement le prévoyait.

pour tout réel x tel que $2 \leq x \leq 5$, $-7 \leq 3 - 2x \leq -1$

L'amplitude est passée de 3 à 6 : la multiplication par -2 l'a doublée. L'addition de 3, elle, l'avait laissée intacte. Un encadrement peut donc s'abîmer en traversant un calcul, et savoir de combien il s'abîme fait partie du calcul.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Sachant que $-1 \leq x \leq 4$, encadrer $B = 5 - 3x$. Tout est fait, sauf la vérification : le coefficient -3 renverse l'encadrement, $-12 \leq -3x \leq 3$, puis l'addition de 5 donne $-7 \leq 5 - 3x \leq 8$. **À vous**

la vérification aux deux valeurs extrêmes.

(b) Sachant que $1 \leq x \leq 6$, encadrer $C = 4 - x$. Les deux premières étapes sont faites : le coefficient -1 renverse l'encadrement, et l'on obtient $-6 \leq -x \leq -1$. À vous l'addition de 4 et la vérification.

2. CERNER

Nous savons maintenant produire des encadrements. Il nous manque une écriture courte pour les désigner, de quoi les combiner entre eux, et une façon de les resserrer autant qu'on veut autour d'un nombre donné.

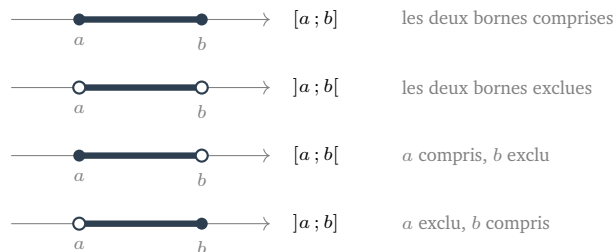
2.1. Les intervalles

DÉFINITION – INTERVALLES BORNÉS

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note ainsi les quatre ensembles de réels compris entre a et b :

$$[a; b] \quad]a; b[\quad [a; b[\quad]a; b]$$

le crochet ouvert vers l'intérieur de l'intervalle signalant que la borne est comprise, et le crochet ouvert vers l'extérieur qu'elle est exclue.



DÉFINITION – INTERVALLES NON BORNÉS

Soient a et b deux réels. On note $[a; +\infty[$ l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à a , et $]-\infty; b[$ celui des réels strictement inférieurs à b . Les deux autres formes, $]a; +\infty[$ et $]-\infty; b]$, se lisent de même : le crochet de la borne réelle dit si elle est comprise.

Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres : ce sont des indications de direction. Le crochet qui les accompagne est donc toujours ouvert, puisqu'il n'y a aucune borne à inclure.

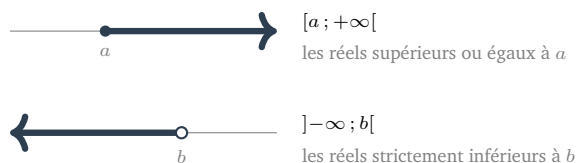
JALON

Je sais comparer deux nombres par le signe de leur différence, deux quantités strictement positives par leur quotient, additionner deux inégalités de même sens, et je sais que multiplier par un nombre strictement négatif renverse le sens.

OBJECTIFS

- ▷ Lire et écrire un intervalle
- ▷ Croiser et réunir deux intervalles
- ▷ Encadrer un réel à 10^{-n} près
- ▷ Distinguer troncature et arrondi

$[;]$: Deux choix d'écriture, deux motifs. Le séparateur est un **point-virgule** parce que la virgule est déjà prise par la virgule décimale. Le crochet est **retourné** plutôt que remplacé par une parenthèse parce que l'écriture $(a; b)$ est déjà prise, elle aussi, par un objet que vous rencontrerez bientôt.



Exemple – Traduire une phrase en intervalle

« x est strictement supérieur à -2 et inférieur ou égal à 7 » s'écrit $x \in]-2; 7]$.

« x est un réel positif » s'écrit $x \in [0; +\infty[$. Attention : 0 est positif, la borne est donc comprise.

L'encadrement du paragraphe précédent, valable pour $2 \leq x \leq 5$, se note désormais d'un trait :

$$-7 \leq 3 - 2x \leq -1 \quad \text{s'écrit} \quad 3 - 2x \in [-7; -1].$$

MÉTHODE – ÉCRIRE L'INTERVALLE DÉCRIT PAR UNE PHRASE

- ▷ 1. Repérer les deux bornes, et laquelle est la plus petite.
- ▷ 2. Décider, pour chacune, si elle est comprise : « strictement inférieur » et « strictement supérieur » l'excluent, « inférieur ou égal » et « au plus » l'incluent.
- ▷ 3. Tourner chaque crochet en conséquence.
- ▷ 4. Relire l'intervalle obtenu en le retraduisant en phrase, et comparer à l'énoncé.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Écrire l'intervalle décrit par « x est compris entre -3 et 1 , ces deux valeurs étant exclues ». *Tout est fait, sauf la relecture* : -3 est la plus petite borne, aucune des deux n'est comprise, et l'on écrit $] -3; 1[$. **À vous la relecture, en retraduisant cet intervalle en phrase pour le comparer à l'énoncé.**

(b) Écrire l'intervalle décrit par « x est au plus égal à 4 ». *Les deux premières étapes sont faites* : la seule borne réelle est 4 , et « au plus » la fait comprise ; de l'autre côté, aucune borne, la direction $-\infty$. **À vous les crochets et la relecture.**

2.2. Réunir et croiser

Deux contraintes valent souvent mieux qu'une : un même nombre peut être astreint à deux intervalles à la fois. Deux questions se posent alors. Quels sont les réels qui satisfont les *deux* contraintes ? Et quels sont ceux qui en satisfont *au moins une* ?

ÉCHO EXO

EXO-A2 · Ex. 12–16 ★

Les quatre crochets dans les deux sens, réunir et croiser, jusqu'aux quatre contraintes d'une salle de réception dont deux ne servent à rien

DÉFINITION – INTERSECTION ET RÉUNION

Soient I et J deux intervalles.

L'**intersection** de I et J , notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J .

La **réunion** de I et J , notée $I \cup J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J , c'est-à-dire à l'un au moins des deux.

$\cup, \cap$: Le symbole $\cup$ a la forme du U d'« union ». Pour $\cap$, pensez à l'intersection de deux rues : le morceau commun aux deux. Le « ou » de la réunion n'est pas exclusif : un réel qui appartient aux deux intervalles appartient aussi à leur réunion.

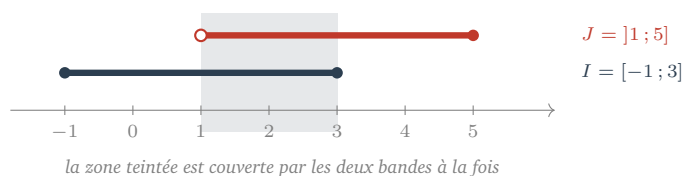
MÉTHODE – DÉTERMINER UNE INTERSECTION OU UNE RÉUNION

- ▷ 1. Tracer une droite graduée et représenter les deux intervalles, l'un au-dessus de l'autre, comme deux bandes.
- ▷ 2. Pour l'intersection, repérer la zone couverte par les deux bandes à la fois ; pour la réunion, la zone couverte par au moins une bande.
- ▷ 3. Examiner, si la zone existe, chacune de ses bornes : comprise ou exclue ? Le crochet suit.
- ▷ 4. Écrire le résultat, et le relire en phrase pour le confronter aux deux contraintes de départ.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$ pour $I = [-1 ; 3]$ et $J =]1 ; 5]$.

Représentons les deux intervalles en bandes superposées, la zone couverte par les deux à la fois étant teintée :



La zone couverte par les deux bandes à la fois va de 1 à 3. La borne 1 est exclue, car elle n'appartient pas à J ; la borne 3 est comprise, car elle appartient aux deux. La zone couverte par au moins une bande, elle, court de -1 , compris, à 5 , compris, sans interruption.

$$I \cap J =]1 ; 3] \quad \text{et} \quad I \cup J = [-1 ; 5]$$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$ pour $I = [0 ; 4]$ et $J = [2 ; 7[$. Tout est fait, sauf l'écriture : la zone commune va de 2, compris dans les deux intervalles, à 4, compris dans les deux ; la zone totale de 0, compris, à 7, exclu. **À vous l'écriture des deux réponses, et leur relecture.**

(b) Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$ pour $I =]0 ; 5]$ et $J = [3 ; 8]$. Les deux premières étapes sont faites : les bandes sont tracées et les zones

repérées, la commune de 3 à 5, la totale de 0 à 8. **À vous l'examen des quatre bornes et l'écriture des deux réponses.**

Exemple – Quand les intervalles s'ignorent

Prenons $I = [0 ; 1]$ et $J = [2 ; 3]$. Aucun réel n'appartient aux deux à la fois : leur intersection ne contient rien, on dit qu'elle est **vide**.

Leur réunion, elle, existe bel et bien, mais regardons-la : elle contient 1 et 2, et aucun des réels situés entre les deux, comme 1,5. Un ensemble ainsi troué n'est **pas un intervalle** : aucun jeu de crochets ne peut l'écrire d'un seul tenant. On la laisse donc écrite $[0 ; 1] \cup [2 ; 3]$, et le symbole $\cup$ est fait pour cela.

Vous retrouverez ces ensembles troués en F1 : certaines fonctions ne sont pas définies sur un intervalle, mais sur une réunion d'intervalles, et l'écriture $\cup$ deviendra leur langue naturelle.

2.3. Cerner un réel à 10^{-n} près

Reprenons la question laissée ouverte par le chapitre précédent. Aucune écriture décimale ne donne $\sqrt{2}$. Nous pouvons en revanche l'enfermer entre deux nombres que nous savons écrire, et resserrer l'étau autant qu'il nous plaît.

DÉFINITION – ENCADREMENT DÉCIMAL

Soit x un réel et n un entier naturel. **Encadrer x à 10^{-n} près**, c'est trouver deux nombres décimaux consécutifs ayant n décimales, entre lesquels x est compris. L'amplitude d'un tel encadrement vaut exactement 10^{-n} .

Pour une racine carrée, la comparaison directe est malcommode. On passe donc par les carrés, et ce détour se justifie.

PROPRIÉTÉ – COMPARER DEUX POSITIFS, C'EST COMPARER LEURS CARRÉS

Soient u et v deux réels positifs. Alors dire $u \leq v$ revient à dire $u^2 \leq v^2$.

Le même énoncé vaut avec des inégalités strictes : dire $u < v$ revient à dire $u^2 < v^2$.

Pourquoi. La différence des carrés se factorise : $v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$. Supposons d'abord $u \leq v$. Alors $v - u$ est positif, et $v + u$ l'est aussi comme somme de deux positifs : leur produit est positif, donc $u^2 \leq v^2$. Supposons réciproquement $u^2 \leq v^2$, c'est-à-dire $(v - u)(v + u)$ positif. Si u et v sont tous deux nuls, l'inégalité $u \leq v$ est évidente. Sinon $v + u$ est strictement positif, et un produit positif dont l'un des facteurs est strictement positif a son autre facteur positif : $v - u$ est positif, donc $u \leq v$.

Attention – L'hypothèse de positivité n'est pas décorative

Sans elle, l'énoncé est faux : $-5 \leq 2$, alors que $(-5)^2 = 25$ n'est pas inférieur à $2^2 = 4$. Toute propriété se cite avec ses hypothèses, et celle-ci se perd plus souvent qu'aucune autre.

MÉTHODE – ENCADRER UN RÉEL À 10^{-n} PRÈS

- ▷ 1. Choisir deux décimaux consécutifs ayant n décimales, à partir de l'encadrement d'ordre précédent.
- ▷ 2. Comparer le nombre étudié à chacun d'eux ; pour une racine carrée, comparer les carrés, ce qui est licite entre nombres positifs.
- ▷ 3. Ajuster le choix jusqu'à ce que le nombre soit pris entre les deux.
- ▷ 4. Conclure en annonçant l'amplitude, qui vaut 10^{-n} .

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Encadrer $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

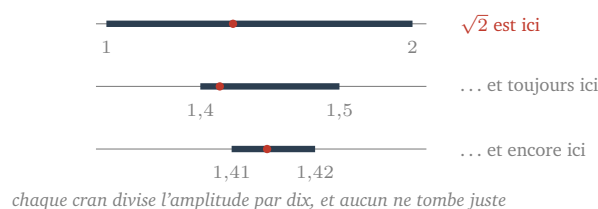
Essayons les deux décimaux consécutifs 1,41 et 1,42. Ils sont positifs, comme $\sqrt{2}$: nous pouvons comparer les carrés.

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 \quad \text{et} \quad 1,42^2 = 2,0164 > 2.$$

Or $(\sqrt{2})^2 = 2$. Le carré de $\sqrt{2}$ est donc compris entre les carrés de 1,41 et de 1,42, et la propriété précédente permet de remonter aux nombres eux-mêmes :

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

encadrement d'amplitude 0,01. Rien n'empêche de continuer : chaque cran divise l'amplitude par dix, comme la figure ci-dessous le montre.



En 1896, à la manufacture d'armes d'Eskilstuna, en Suède, Carl Edvard Johansson met au point un jeu de 102 blocs d'acier : en les combinant, on compose toute longueur de 0,5 à 300 millimètres qui soit un multiple du centième de millimètre. Un jeu fini de cales pour cerner toutes ces longueurs, c'est le dessin ci-contre, en acier.

Johansson, 1896

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Encadrer $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près. *Tout est fait, sauf la conclusion* : les décimaux 1,7 et 1,8 conviennent, car leurs carrés valent 2,89 et 3,24, qui encadrent 3. **À vous la conclusion, amplitude comprise.**

(b) Encadrer $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près. *Les deux premières étapes sont faites* : les décimaux 2,23 et 2,24 sont choisis, et leurs carrés valent 4,9729

ÉCHO EXO

EXO-A2 · Ex. 17–21 ★

Couper ou approcher : troncature, arrondi, amplitude, et ce qu'un encadrement détermine vraiment. La partie IV finit sur les carrés en version stricte

et 5,0176. À vous la comparaison à 5, l'ajustement éventuel et la conclusion.

2.4. Tronquer, arrondir

Un encadrement décimal fournit deux nombres. Quand il faut n'en retenir qu'un, deux choix s'offrent, et ils ne donnent pas toujours le même résultat.

DÉFINITION – TRONCATURE ET ARRONDI

Soit x un réel positif et n un entier naturel.

La **troncature de x à 10^{-n}** s'obtient en coupant son écriture décimale après la n -ième décimale, les décimales suivantes étant effacées. Lorsque x n'est pas lui-même un décimal à n décimales, c'est la borne inférieure de son encadrement décimal.

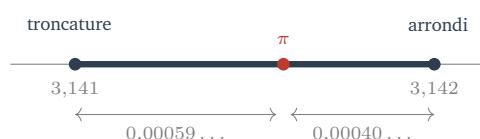
L'**arrondi de x à 10^{-n}** est celui des deux bornes qui est le plus proche de x ; en cas d'égalité des distances, on retient par convention la borne supérieure.

Exemple – Les deux opérations sur un même nombre

Prenons $\pi = 3,14159265 \dots$

À 10^{-3} près, son encadrement décimal est $3,141 < \pi < 3,142$. La troncature vaut donc 3,141, et l'arrondi 3,142, car π est plus proche de 3,142.

Les deux opérations tombent ici sur des résultats différents, mais ce n'est pas toujours le cas : pour 2,301, la troncature et l'arrondi à 10^{-2} valent tous deux 2,30.



l'arrondi est la borne la plus proche ; pour un nombre positif, la troncature est celle de gauche

Attention – Confondre les deux coûte des points

Une copie qui donne 3,141 là où l'on demandait l'arrondi à 10^{-3} n'a commis aucune faute de calcul : elle a répondu à une autre question. La troncature et l'arrondi sont deux opérations différentes, et l'énoncé dit toujours laquelle il attend.

Il y a plus grave qu'une copie. La différence entre les deux opérations n'est pas seulement de quelques millièmes : elle est de *nature*.

CONTEXTE HISTORIQUE – LA BOURSE DE VANCOUVER, 1982-1983

En janvier 1982, la Bourse de Vancouver lance un indice, fixé à 1 000,000 et publié avec trois décimales. À chaque transaction, le programme le recalcule et le **tronque** au millième au lieu de l'arrondir. L'opération se répète environ trois mille fois par jour.

Vingt-deux mois plus tard, l'indice affiche environ 525, alors qu'il aurait dû être proche de 1100. Il affiche donc moins de la moitié de sa valeur réelle, sans qu'aucune baisse du marché ne le justifie. L'erreur est corrigée pendant le week-end du 25 au 28 novembre 1983 : l'indice remonte d'un coup à 1 098,892.

La morale est mathématique. Un arrondi se trompe des deux côtés, tantôt en trop, tantôt en trop peu : sur un grand nombre d'opérations, les erreurs se compensent en grande partie. Une troncature se trompe *toujours dans le même sens* : elles s'ajoutent. Une erreur minuscule mais systématique est plus dangereuse qu'une erreur plus grosse mais équilibrée.

3. LOCALISER

Il nous manque encore un mot. Encadrer un nombre, c'est dire entre quelles bornes il se trouve ; mais la vraie question, celle de l'atelier de 1785, est différente : *de combien s'écarte-t-il de ce qu'il devrait être ?* C'est une question de distance.

3.1. La valeur absolue

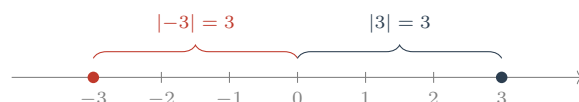
DÉFINITION – VALEUR ABSOLUE

Soit x un réel. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est définie par

$$|x| = x \text{ si } x \text{ est positif,} \quad |x| = -x \text{ si } x \text{ est strictement négatif.}$$

PROPRIÉTÉ – CE QUE VAUT UNE VALEUR ABSOLUE

Quel que soit le réel x , le nombre $|x|$ est positif, et il est nul lorsque x l'est, et dans ce seul cas. C'est la **distance** du point d'abscisse x à l'origine de la droite graduée.



deux nombres opposés ont la même valeur absolue : leurs points sont à égale distance de l'origine

Attention – Le piège de la lettre

$|x|$ n'est pas « x auquel on enlève son signe moins », et l'écriture $|x| = -x$ n'a rien d'absurde. Lorsque x est une lettre, on ne sait pas de quel côté de zéro se trouve le nombre qu'elle désigne. Si x vaut -5 , alors $-x$ vaut 5 : l'écriture $-x$ désigne bel et bien un nombre positif.

JALON

Je sais écrire un intervalle avec le bon type de crochet, déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles, encadrer une racine carrée à 10^{-n} près en passant par les carrés, et distinguer troncature et arrondi.

OBJECTIFS

- ▷ Lire $|x|$ comme une distance
- ▷ Retirer les barres en connaissant le signe
- ▷ Passer de $|x - a| \leq r$ à un intervalle

Les deux barres verticales sont dues à Karl Weierstrass, dans un texte écrit en 1841 et publié seulement après sa mort. Il en fera plus tard l'usage qu'on lui connaît pour les nombres complexes. L'idée de valeur absolue est bien plus ancienne que sa notation, et c'est presque toujours dans cet ordre que les mathématiques avancent : on manipule longtemps avant de nommer.

Weierstrass, 1841

Écrire $|x| = x$ sans avoir examiné le signe de x est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et la seule qui se répète d'année en année jusqu'en Terminale.

Le chapitre précédent avait laissé une petite dette. Il avait établi que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour deux réels positifs, mais rien n'avait été dit de $\sqrt{a^2}$ lorsque a est quelconque. La réponse demande la valeur absolue, et elle demande de séparer les cas.

Démonstration · $\sqrt{a^2} = |a|$.

Soit a un réel. Nous séparons les deux cas possibles, sans en oublier aucun.

Premier cas : a est positif. Alors $|a| = a$ par définition. Or a est un nombre positif dont le carré vaut a^2 . Comme $\sqrt{a^2}$ est, par définition, l'unique nombre positif de carré a^2 , on en déduit $\sqrt{a^2} = a$, c'est-à-dire $\sqrt{a^2} = |a|$.

Second cas : a est strictement négatif. Alors $|a| = -a$, et ce nombre est strictement positif. Son carré vaut $(-a)^2 = a^2$. Nous avons donc de nouveau un nombre positif dont le carré vaut a^2 : c'est $\sqrt{a^2}$. Ainsi $\sqrt{a^2} = -a$, c'est-à-dire encore $\sqrt{a^2} = |a|$.

Les deux cas épuisent toutes les possibilités et donnent la même conclusion. Donc, quel que soit le réel a , on a $\sqrt{a^2} = |a|$. ■

Rappel : pour un réel positif t , le nombre $\sqrt{t}$ est l'unique réel positif dont le carré vaut t . C'est cette clause de positivité qui fait toute la démonstration ci-contre.

Exemple – Deux lectures de la formule

$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$. Le résultat est 7, et non -7 : une racine carrée est toujours positive.

$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$, quel que soit le réel x ♦. On ne peut pas aller plus loin sans connaître le signe de $x-3$: pour $x = 10$ cela vaut 7, pour $x = 1$ cela vaut 2.

Ce raisonnement porte un nom : la **disjonction des cas**. On découpe l'ensemble des situations en morceaux qui les recouvrent toutes, on traite chaque morceau, et l'on conclut. Vous le retrouverez en A4, où le tableau de signes n'est rien d'autre qu'une disjonction mise en tableau.

MÉTHODE – RETIRER LES BARRES D'UNE VALEUR ABSOLUE

- ▷ 1. Déterminer le signe de l'expression écrite entre les barres.
- ▷ 2. Si elle est positive, retirer les barres sans rien changer.
- ▷ 3. Si elle est strictement négative, retirer les barres en changeant le signe de l'expression tout entière.
- ▷ 4. Vérifier que le résultat obtenu est bien un nombre positif.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Écrire $|\sqrt{2} - 2|$ sans valeur absolue.

Commençons par le signe de $\sqrt{2} - 2$. Les deux nombres $\sqrt{2}$ et 2 sont positifs : nous pouvons donc comparer leurs carrés, qui valent 2 et 4.

Comme $2 < 4$, on a $\sqrt{2} < 2$, et $\sqrt{2} - 2$ est strictement négatif.

Nous sommes dans le second cas de la méthode : il faut changer le

signe de l'expression entière.

$$|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}.$$

Vérification. L'encadrement obtenu plus haut donne

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \quad \text{donc} \quad 0,58 < 2 - \sqrt{2} < 0,59.$$

Le résultat est bien positif. On notera que le passage de $\sqrt{2}$ à $2 - \sqrt{2}$ a échangé les rôles des deux bornes de l'encadrement, comme le paragraphe 1 le prévoyait.

$$|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Écrire $|3 - \sqrt{5}|$ sans valeur absolue. *Tout est fait, sauf la vérification : $5 < 9$ donne $\sqrt{5} < 3$, donc $3 - \sqrt{5}$ est strictement positif, et les barres se retirent sans rien changer : $|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$. À vous la vérification.*

(b) Écrire $|\sqrt{7} - 3|$ sans valeur absolue. *Les deux premières étapes sont faites : $7 < 9$ donne $\sqrt{7} < 3$, donc $\sqrt{7} - 3$ est strictement négatif : c'est le cas où l'on change le signe. À vous le retrait des barres et la vérification.*

CIBLE DA

DM-A2.1 · Parties 0–V ★★★★★

La coupure : Zurich, 24 novembre 1858.

On partage les rationnels en deux paquets, et l'on découvre qu'un partage peut n'avoir aucune frontière rationnelle.

Entièrement facultatif, et sans corrigé

*Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 27 (« Inégalités et
valeurs absolues »).*

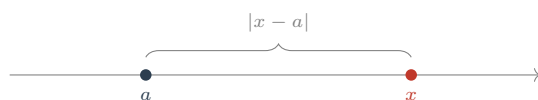
3.2. Mesurer un écart

PROPRIÉTÉ – DISTANCE ENTRE DEUX RÉELS

Quels que soient les réels x et a , le nombre $|x - a|$ est la **distance** entre les points d'abscisses x et a sur la droite graduée. En particulier $|x - a| = |a - x|$: l'ordre dans lequel on les écrit ne change rien.

Pourquoi. Là encore, deux cas. Si le point d'abscisse x est à droite de celui d'abscisse a ou confondu avec lui, la distance vaut $x - a$, et ce nombre est positif, donc égal à sa valeur absolue. S'il est à gauche, la distance vaut $a - x$; or $x - a$ est alors strictement négatif, et sa valeur absolue vaut bien $-(x - a) = a - x$. Dans les deux cas, la distance est $|x - a|$.

Le même raisonnement, les rôles de x et de a échangés, donne $|a - x|$ pour cette même distance : les deux écritures désignent donc le même nombre.



peu importe lequel des deux est à droite : la distance ne change pas

Exemple – Des distances, dans les deux sens

La distance entre 5 et 3 vaut $|5 - 3| = |2| = 2$; celle entre 1 et 3 vaut $|1 - 3| = |-2| = 2$.

La distance entre -4 et 6 vaut $|-4 - 6| = |-10| = 10$. On prendra garde à ne pas écrire $|-4| - |6|$, qui vaudrait -2 et qui n'est pas une distance.

ÉCHO EXO

EXO-A2 · Ex. 22–25 ★

Valeurs absolues, distances et rubans, dans les deux sens. La partie V se termine sur un diapason : ce qu'un affichage arrondi permet encore d'affirmer, et le dehors du ruban

3.3. Du ruban à l'intervalle

Nous arrivons au cœur du chapitre, et à la réponse à la question de l'ouverture.

PROPRIÉTÉ – INÉGALITÉ DE DISTANCE ET INTERVALLE

Soient a un réel et r un réel positif. Pour tout réel x , dire que $|x - a| \leq r$ revient exactement à dire que

$$a - r \leq x \leq a + r, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \in [a - r ; a + r].$$

Pourquoi. Traitons d'abord le cas d'une valeur absolue nue : pour un réel u et un réel positif r , dire $|u| \leq r$ revient à dire $-r \leq u \leq r$. Deux cas, une fois de plus.

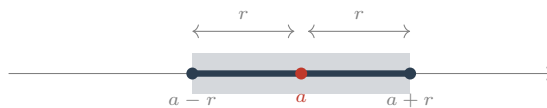
Si u est positif, alors $|u| = u$, et l'inégalité $|u| \leq r$ s'écrit $u \leq r$; l'autre inégalité, $-r \leq u$, est automatique puisque $-r$ est négatif et u positif.

Si u est strictement négatif, alors $|u| = -u$, et l'inégalité $|u| \leq r$ s'écrit $-u \leq r$. En multipliant les deux membres par -1 , qui renverse le sens, cela s'écrit $-r \leq u$; et l'inégalité $u \leq r$ est automatique puisque u est négatif et r positif.

Il ne reste plus qu'à appliquer ce résultat à $u = x - a$, puis à ajouter a aux trois membres, ce qui ne change aucun sens :

$$-r \leq x - a \leq r \quad \text{donne} \quad a - r \leq x \leq a + r.$$

Le renversement et l'addition du paragraphe 1 viennent d'être réinvestis en quelques lignes.



le ruban des points situés à distance au plus r du point d'abscisse a

MÉTHODE – TRADUIRE DANS LES DEUX SENS

- ▷ 1. De l'inégalité vers l'intervalle : lire le centre a et le rayon r , puis écrire directement $[a - r ; a + r]$. Les étapes suivantes traitent le sens inverse.
- ▷ 2. De l'intervalle vers l'inégalité : le centre est la **moyenne** des deux

bornes, le rayon la **moitié de leur différence**, la plus petite ôtée de la plus grande.

- ▷ 3. Écrire $|x - a| \leq r$ avec les deux nombres obtenus.
- ▷ 4. Vérifier : chaque borne doit se trouver à distance exactement r du centre.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Traduire $[-4; 10]$ **à l'aide d'une valeur absolue.**

Le centre est la moyenne des bornes, et le rayon la moitié de leur différence :

$$\frac{-4 + 10}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{10 - (-4)}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

On écrit donc la condition sous la forme $|x - 3| \leq 7$.

Vérification. La borne 10 est à distance $|10 - 3| = 7$ du centre, et la borne -4 à distance $|-4 - 3| = |-7| = 7$. Les deux tombent juste.

pour tout réel x , dire $x \in [-4; 10]$ revient à dire $|x - 3| \leq 7$

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Traduire $|x - 5| \leq 3$ sous forme d'intervalle. *Tout est fait, sauf la vérification* : le centre vaut 5, le rayon vaut 3, et l'intervalle s'écrit $[2; 8]$. **À vous la vérification des deux bornes.**

(b) Traduire $[-1; 7]$ à l'aide d'une valeur absolue. *Le centre et le rayon sont calculés* : $\frac{-1 + 7}{2} = 3$ et $\frac{7 - (-1)}{2} = 4$. **À vous l'écriture et la vérification.**

Cette écriture n'est pas une curiosité d'école : c'est la langue ordinaire de la mesure.

Exemple – La tolérance de fabrication

Une pièce doit avoir un diamètre de 10 millimètres, avec une **tolérance** de 0,05 millimètre. Cela signifie qu'un diamètre mesuré d est acceptable lorsque

$$|d - 10| \leq 0,05, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d \in [9,95; 10,05].$$

Une pièce mesurée à 10,03 est acceptée, car $|10,03 - 10| = 0,03$, qui est inférieur à 0,05. Une pièce mesurée à 10,07 est rejetée, car $|10,07 - 10| = 0,07$, qui dépasse 0,05.

C'est exactement le ruban de Blanc, écrit deux siècles plus tard.

Un dernier mot sur la frontière du ruban. Se trouver à distance *exactement* r du point d'abscisse a , lorsque ce rayon n'est pas nul, cela ne laisse que deux positions : les deux bornes $a - r$ et $a + r$, une de chaque côté. Le déroulé complet de cette remarque vous attend sur le compagnon numérique, à

Défi facultatif ★ · Quels que soient les réels a et b , on peut montrer que $|a + b| \leq |a| + |b|$. Essayez de vous en convaincre : une droite graduée et deux déplacements successifs suffisent. Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ? La réponse est sur le compagnon numérique.

côté de la réponse au défi ci-contre.

ASSEZ PROCHE

Revenons à l'atelier. Jefferson prend une pièce au hasard, elle va. Il en prend une autre, elle va encore. Nous savons pourtant qu'aucune des pièces de ces cinquante platines n'était identique à une autre, ni au modèle.

Ce que Blanc avait compris, et que la lettre de Jefferson ne dit pas parce que les mots n'existaient pas encore, c'est qu'il n'avait jamais demandé l'égalité. Il avait demandé que chaque pièce se tienne à l'intérieur d'un ruban tracé autour du modèle. Ce ruban, nous savons maintenant l'écrire : $|x - a| \leq r$, où x est la cote obtenue, a la cote visée et r l'écart que l'on accepte.

Le chapitre précédent s'achevait sur un échec apparent, $\sqrt{2}$ n'a pas d'écriture décimale exacte. Celui-ci répond que ce n'était pas la bonne exigence : d'un nombre, d'une pièce d'acier ou d'un la de diapason, on ne demande presque jamais d'être exact, mais d'être assez proche et de savoir dire de combien.

Ce ruban va changer de statut : ensemble de solutions quand il s'agira de résoudre, morceau de l'axe des abscisses quand une fonction viendra s'y poser. Toujours la même forme, et vous saurez d'où elle vient.

JALON

Je sais lire $|x - a|$ comme une distance, retirer les barres après avoir examiné un signe, et traduire $|x - a| \leq r$ en intervalle et réciproquement.

Fin du chapitre

[ACT-A2] [EXO-A2] [DM-A2.1] [EVAL-A2]