



DM 1 · A2. LA COUPURE

Zurich, 24 novembre 1858 · ce qui manque à la droite

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue	△	
I. Préliminaires : ce dont vous disposez		
II. Couper proprement	△▲	les préliminaires
III. Le trou	△▲◆	R1, R2, R3 et la partie II
IV. De l'encadrement à la coupure	△▲	la partie III
V. La droite sans trou	▲◆	tout ce qui précède

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Un professeur prépare son cours

ZURICH, automne 1858. Richard Dedekind a vingt-sept ans et vient d'être nommé au Polytechnikum. On lui confie le cours de calcul différentiel, qu'il n'a jamais enseigné. En le préparant, il bute sur une gêne que personne autour de lui ne semble partager : tous ses raisonnements reposent sur les nombres réels, et il est incapable de dire ce qu'est un nombre réel. Il sait les écrire, les comparer, les additionner. Il ne sait pas ce qu'ils sont.

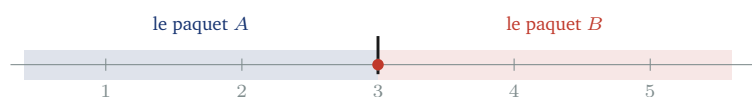
Il cherche quelque chose de très précis : une définition qui ne dise rien de la longueur, rien de la géométrie, rien du dessin d'une droite. Une définition qui ne parle que de nombres déjà connus, les fractions, et de la seule chose que l'on sache en faire à coup sûr : les **ranger**.

Il trouve le 24 novembre. Il note la date, il la citera quatorze ans plus tard dans la préface de son mémoire, comme on cite un anniversaire. Il en parle à un ami quelques jours après, l'expose à des élèves, en donne une conférence, puis renonce à publier : la chose lui paraît malaisée à présenter et de peu de rendement. Il attendra 1872, et le titre qu'il choisira alors ne mettra pas les nombres au premier plan, mais une propriété de la droite, la continuité : *Continuité et nombres irrationnels*.

Ce que Dedekind a trouvé ce jour-là tient en un geste que vous savez déjà faire : couper.

△ **Q1.** On partage tous les nombres rationnels en deux paquets. Dans le paquet de gauche, que l'on note A , on met tous les rationnels strictement plus petits que 3. Dans le paquet de droite, noté B , on met tous les autres.

1. Dire dans quel paquet se trouvent 2,9, puis 2,999, puis 3, puis 3,001.
2. Est-il vrai que tout nombre du paquet A est strictement plus petit que tout nombre du paquet B ? Justifier.
3. Le paquet B possède-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ?



la coupure ne dessine rien de neuf : elle décide seulement, pour chaque rationnel, de quel côté il tombe

PARTIE I

Préliminaires : ce dont vous disposez

Tout ce qui suit ne parle que de nombres **rationnels**, c'est-à-dire de fractions. Les trois résultats encadrés ci-dessous ont déjà été établis : les deux premiers dans le chapitre A1, le troisième dans le chapitre A2. Vous pouvez les citer partout dans ce document sans les redémontrer.

DÉFINITION – UNE COUPURE

Une **coupure** est un partage de l'ensemble des rationnels en deux paquets A et B tels que les trois conditions suivantes soient remplies :

- aucun des deux paquets n'est vide ;
- chaque rationnel appartient à l'un des deux paquets, et à un seul ;
- tout nombre de A est strictement plus petit que tout nombre de B .

On note cette coupure $(A | B)$. Le paquet A est appelé la **classe de gauche**, le paquet B la **classe de droite**.

R1 – DENSITÉ DES RATIONNELS

Quels que soient les réels a et b tels que $a < b$, il existe toujours un nombre rationnel strictement compris entre a et b . (démontré en A1)

R2 – IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

Aucun nombre rationnel n'a pour carré 2. (démontré en A1)

R3 – COMPARER DEUX POSITIFS, C'EST COMPARER LEURS CARRÉS

Quels que soient les réels positifs u et v , dire $u \leq v$ revient à dire $u^2 \leq v^2$.

Le même énoncé vaut avec des inégalités strictes : dire $u < v$ revient à dire $u^2 < v^2$. (établi en A2)

DÉFINITION – LA FRONTIÈRE D’UNE COUPURE

Lorsque la classe de gauche possède un plus grand élément, ou lorsque la classe de droite possède un plus petit élément, ce nombre est appelé la **frontière** de la coupure. La question 4 montrera qu’une coupure ne peut jamais posséder les deux à la fois : une frontière, quand elle existe, est donc unique.

Un exemple, entièrement déroulé. Prenons pour A l’ensemble des rationnels strictement négatifs, et pour B tous les autres, c’est-à-dire zéro et les rationnels strictement positifs. Vérifions les trois conditions.

- A contient -1 et B contient 0 : aucun des deux n’est vide.
- Un rationnel est soit strictement négatif, soit non : il tombe donc dans un paquet et dans un seul.
- Si a est dans A et b dans B , alors $a < 0$ et $b \geq 0$, donc $a < b$.

C’est bien une coupure, et sa frontière est 0 , qui appartient ici à la classe de droite. Retenez la méthode : les trois conditions se vérifient toujours dans cet ordre, et c’est la troisième qui demande du travail.

PARTIE II

*s’appuie sur les préliminaires***Couper proprement**

Avant de chercher des coupures intéressantes, il faut savoir à quoi ressemblent les coupures ordinaires. Cette partie les examine, et se termine sur une découverte : il n’y a que trois sortes de coupures, pas quatre.

△ **Q2.** On reprend le partage du prologue, et on lui en ajoute un second.

- Coupure n° 1 : A_1 contient les rationnels strictement plus petits que 3 , et B_1 tous les autres.
 - Coupure n° 2 : A_2 contient les rationnels plus petits ou égaux à 3 , et B_2 tous les autres.
1. Le paquet A_1 possède-t-il un plus grand élément ? On pourra, en supposant qu’un rationnel a de A_1 soit le plus grand, s’intéresser au nombre $\frac{a+3}{2}$.
 2. Répondre à la même question pour le paquet B_2 : possède-t-il un plus petit élément ?

△ **Q3.** Construire, sur le modèle de la question précédente, les deux coupures associées à $\frac{1}{2}$, puis les deux coupures associées à $-\frac{7}{3}$. Pour chacune, préciser laquelle des deux classes contient le nombre lui-même.

Vous venez de constater qu’un même rationnel donne **deux** coupures, selon la classe où on le range. Pour que l’expression « la coupure qui définit $\frac{1}{2}$ » ait un sens, on convient une fois pour toutes, dans la suite de ce document, de mettre dans la classe de gauche les rationnels **strictement** inférieurs au nombre considéré.

Dans tous ces exemples, un nombre joue le rôle de **frontière** : il sépare les deux classes, et il appartient à l’une des deux. La question suivante montre qu’il ne peut jamais appartenir aux deux à la fois, ni être doublé.

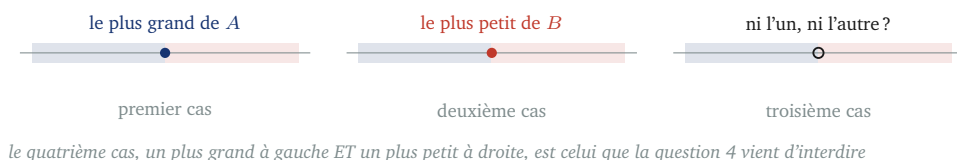
▲ **Q4.** On considère une coupure $(A \mid B)$ quelconque. On suppose que A possède un plus grand élément, noté a , et que B possède un plus petit élément, noté b .

1. Justifier que $a < b$.
2. En utilisant **R1**, montrer que cette situation est impossible. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

△ **Q5.** La question précédente interdit un cas sur quatre. Décrire en une phrase chacun les trois cas qui restent possibles, et les **numéroter** de 1 à 3 : cette numérotation servira dans tout le reste du document.

△ **Q6.** Compléter le tableau suivant, où figurent les **sept** coupures rencontrées jusqu'ici. Dans la dernière colonne, écrire le numéro du cas de la question 5. Un des trois cas reste-t-il inoccupé ?

LA COUPURE	PLUS GRAND DE A	PLUS PETIT DE B	CAS
l'exemple déroulé, frontière 0			
celle du prologue, qui est aussi la n° 1 de la question 2			
la n° 2 de la question 2			
celle de $\frac{1}{2}$ où $\frac{1}{2}$ est à gauche			
celle de $\frac{1}{2}$ où $\frac{1}{2}$ est à droite			
celle de $-\frac{7}{3}$ où $-\frac{7}{3}$ est à gauche			
celle de $-\frac{7}{3}$ où $-\frac{7}{3}$ est à droite			



PARTIE III

utilise R1, R2, R3 et la partie II

Le trou

Le troisième cas est resté vide jusqu'ici. Existe-t-il seulement ? C'est la question que Dedekind se posait, et la réponse fait basculer tout le reste.

ZÜRICH, 24 NOVEMBRE 1858

Dedekind cherchait une définition qui ne doive rien au dessin. Il raconte, dans la préface de 1872, que le sentiment d'insatisfaction était alors si fort chez lui qu'il résolut d'y réfléchir jusqu'à trouver un fondement purement arithmétique. Il ne reprochait rien au dessin lui-même : il tenait le recours à l'intuition géométrique pour très utile, et même indispensable, dans un premier cours. Ce qu'il ne supportait pas, c'était que l'arithmétique n'eût pas de fondement propre. Le geste de la coupure règle la difficulté d'un coup : il ne demande que de savoir comparer.

△ **Q7.** On définit deux paquets de la façon suivante :

- A contient tous les rationnels négatifs ou nuls, et tous les rationnels strictement positifs dont le carré est strictement plus petit que 2 ;
 - B contient tous les autres rationnels.
1. Vérifier les trois conditions de la définition. Pour la troisième, on distinguera le cas où le nombre de A considéré est négatif ou nul, puis le cas où il est strictement positif, et l'on utilisera **R2** et **R3**.
 2. Placer 1,4, puis 1,41, puis 1,42, puis 1,5 dans le paquet qui convient, en justifiant chaque fois par un calcul.

Cette coupure a-t-elle une frontière? Les deux questions suivantes répondent, et elles répondent avec une seule formule.

▲ Q8. Soit a un rationnel du paquet A , strictement positif. On pose

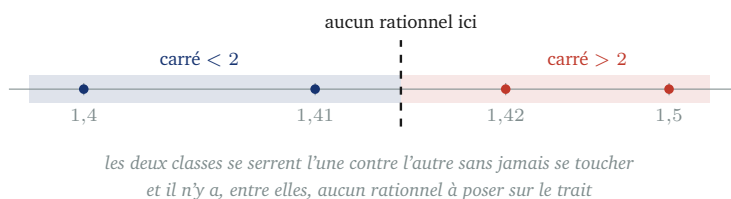
$$a' = \frac{2a + 2}{a + 2}.$$

1. Démontrer que $a' - a = \frac{2 - a^2}{a + 2}$, puis en déduire que $a' > a$.
2. Démontrer que $a'^2 - 2 = \frac{2(a^2 - 2)}{(a + 2)^2}$, puis en déduire que a' appartient encore à A .
3. Conclure : le paquet A ne possède pas de plus grand élément. On remarquera d'abord que 1 appartient à A , de sorte qu'un éventuel plus grand élément de A serait nécessairement supérieur à 1, donc strictement positif : les deux questions précédentes s'y appliquent. *(ce résultat peut être admis pour la suite)*

▲ Q9. Soit maintenant b un rationnel du paquet B . On pose, avec **exactement la même formule**,

$$b' = \frac{2b + 2}{b + 2}.$$

1. Sans refaire aucun des deux calculs de la question 8, expliquer pourquoi on obtient cette fois $b' < b$ et $b'^2 > 2$.
2. Conclure : le paquet B ne possède pas de plus petit élément. *(ce résultat peut être admis pour la suite)*



◆ Q10.

1. D'après les questions 8 et 9, dans lequel des trois cas de la question 5 se trouve cette coupure ?
2. En déduire qu'aucun nombre rationnel ne peut jouer le rôle de frontière pour cette coupure. Expliquer en quoi le résultat R2 rendait ce constat prévisible.

◆ Q11. Cette coupure ne désigne aucun nombre rationnel, et pourtant elle partage les rationnels aussi nettement que celle du prologue partageait les siens. Dedekind décide alors de dire qu'elle **définit** un nombre, lequel n'est pas rationnel, et que ce nombre est $\sqrt{2}$.

Expliquer, en quelques lignes et avec vos mots, ce que cette décision apporte. On pourra se demander ce que l'on gagne à définir un nombre par la façon dont il sépare les autres, plutôt que par une écriture.

R4 – CE QUE VÉRIFIE LE NOMBRE DÉFINI PAR UNE COUPURE

Lorsqu'une coupure $(A | B)$ n'admet aucune frontière rationnelle, le nombre c qu'elle définit vérifie ceci, et c'est tout ce qu'on lui demande : tout nombre de A est plus petit que c , et tout nombre de B est plus grand que c . (admis)

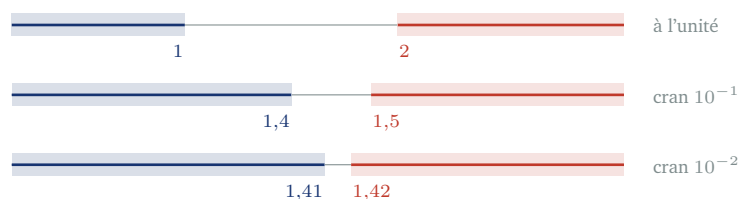
De l'encadrement à la coupure

Le chapitre vous a appris à enfermer $\sqrt{2}$ entre deux décimaux de plus en plus serrés. Vous venez d'apprendre à le définir par une coupure. Ce sont deux langages ; cette partie montre qu'ils disent la même chose.

△ **Q12.** On reprend les encadrements décimaux de $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2 \quad \text{puis} \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \quad \text{puis} \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

1. Pour chacun de ces trois encadrements, dire quels rationnels il permet de ranger à coup sûr dans A , et lesquels à coup sûr dans B .
2. Que reste-t-il de non rangé, à chaque cran ?



à chaque cran, les deux classes gagnent du terrain l'une vers l'autre
ce sont elles qui grandissent, et ce qui reste entre elles n'est jamais vide de nombres, seulement de frontière

▲ **Q13.** On note a_n et b_n les deux bornes de l'encadrement décimal de $\sqrt{2}$ au cran 10^{-n} .

1. Justifier que tout rationnel plus petit ou égal à a_n appartient à A , et que tout rationnel plus grand ou égal à b_n appartient à B .
2. On admet que, quel que soit l'écart strictement positif que l'on se donne, on peut toujours choisir un rang n pour lequel 10^{-n} soit plus petit que cet écart. En déduire que tout rationnel finit par être rangé par l'un des encadrements.

▲ **Q14.** On fait maintenant le chemin inverse. On ne connaît plus que les deux paquets A et B , et l'on veut retrouver un encadrement.

1. Expliquer comment reconnaître a_n et b_n à l'intérieur des deux paquets, sans jamais parler de $\sqrt{2}$.
2. Le cours a mené ce calcul jusqu'au cran 10^{-3} et obtenu $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$. Aller un cran plus loin : donner l'encadrement de $\sqrt{2}$ au cran 10^{-4} .

▲ **Q15.** Conclure : se donner la coupure, ou se donner tous les encadrements décimaux, revient à se donner la même chose. Rédiger cette conclusion en deux ou trois phrases, en disant explicitement ce que chacun des deux langages permet de retrouver de l'autre.

GERSAU, ÉTÉ 1872

Cette année-là, deux mathématiciens passent leurs vacances dans le même village au bord du lac des Quatre-Cantons. Ils ne se sont jamais rencontrés, mais chacun a déjà lu l'autre : Dedekind, dans sa préface datée du 20 mars, remercie Cantor pour son mémoire et relève que les deux constructions se rejoignent. Ils font une longue promenade ensemble, et parlent enfin de vive voix du même problème résolu par deux chemins différents : Dedekind par les coupures, Georg Cantor par des suites de rationnels qui se resserrent. Les deux constructions paraissent la même année, 1872. Elles donnent les mêmes nombres.

C'est très exactement ce que la question 15 vous fait constater à petite échelle : deux langages, une seule chose

dite. La correspondance entre les deux hommes durera des années.

PARTIE V

utilise tout ce qui précède

La droite sans trou

Il reste une question, et c'est celle qui donne son titre au mémoire de Dedekind. Couper les rationnels a fait apparaître un trou. Que se passe-t-il si l'on coupe, non plus les rationnels, mais tous les réels ?

▲ **Q16.** La méthode se transporte. On définit deux paquets : A contient les rationnels négatifs ou nuls et les rationnels strictement positifs dont le **cube** est strictement plus petit que 2 ; B contient les autres.

1. Vérifier que l'on obtient bien une coupure. Pour la troisième condition, on aura besoin de savoir que deux nombres positifs se comparent comme leurs cubes : c'est l'analogue de **R3**, et il se démontre en multipliant deux fois de suite une inégalité par un nombre positif.
2. On admet qu'aucun rationnel n'a pour cube 2, et que le raisonnement des questions 8 et 9 s'adapte à ce cas. Quel nombre cette coupure définit-elle ? On lui donnera le nom qui convient, comme la question 11 l'a fait pour $\sqrt{2}$.

BRUNSWICK, AU TOURNANT DU SIÈCLE

Dedekind vécut longtemps, et discrètement, dans sa ville natale. Un calendrier des mathématiciens publié par l'éditeur Teubner l'annonça un jour mort, un 4 septembre. Dedekind, qui se portait bien, écrivit à l'éditeur pour lui faire observer que le jour du 4 septembre finirait peut-être par se révéler exact, mais que l'année, elle, était certainement fausse. Il avait raison sur l'année : il mourut bien plus tard, en 1916. Sur le jour, il se trompait, et l'on peut trouver à cela une certaine élégance : c'était la seule des deux affirmations qu'il ne pouvait pas vérifier. L'homme qui avait passé sa vie à exiger que rien ne soit affirmé sans preuve n'allait pas laisser passer une date non vérifiée, fût-ce la sienne.

◆ **Q17.** On veut comparer deux coupures sans jamais rien additionner ni multiplier. On pose la définition suivante : la coupure $(A \mid B)$ est **inférieure ou égale** à la coupure $(A' \mid B')$ lorsque tout élément de A est aussi un élément de A' .

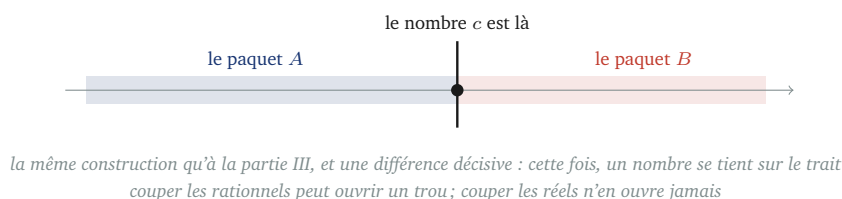
1. Vérifier, sur les coupures qui définissent $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ et 3, que cette définition redonne bien l'ordre attendu.
2. Expliquer pourquoi cette façon de comparer ne demande aucune opération, mais seulement de savoir si un nombre est dans un paquet ou dans l'autre.

◆ **Q18.** On coupe maintenant l'ensemble de **tous les réels**. Soit donc $(A \mid B)$ un partage des réels vérifiant les trois conditions de la définition, où le mot « rationnel » est remplacé par le mot « réel ».

On note A_0 l'ensemble des rationnels qui appartiennent à A , et B_0 l'ensemble des rationnels qui appartiennent à B .

1. Vérifier que $(A_0 \mid B_0)$ est une coupure au sens de la définition initiale. Pour la non-vacuité, on prendra garde : appliquer **R1** entre un élément de A et un élément de B ne fournit qu'un seul rationnel, dont rien ne dit de quel côté il tombe. Il faut appliquer **R1** à l'intérieur de chaque classe : partant d'un réel x de A , la densité donne un rationnel entre $x - 1$ et x , et l'on montrera que ce rationnel appartient encore à A .
2. Cette coupure définit un nombre, que l'on note c . En utilisant **R4**, démontrer que tout élément de A est plus petit ou égal à c , et que tout élément de B est plus grand ou égal à c . (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

3. Conclure : une coupure des réels possède toujours une frontière, et cette frontière est un nombre réel.



♦ **Q19.** Couper les rationnels peut faire apparaître un trou ; couper les réels n'en fait jamais apparaître. C'est cette propriété que Dedekind appelle la **continuité** de la droite, et c'est elle qui donne son titre au mémoire de 1872.

Expliquer, en quelques lignes, pourquoi ce mot est bien choisi, et ce qu'il faudrait faire subir à la droite des réels pour la rendre discontinue.

Pour aller plus loin

Vous savez maintenant fabriquer les nombres avec de l'ordre, et les comparer sans jamais rien calculer. Il manque tout le reste : additionner, multiplier. La question qui suit n'attend pas de réponse cette année. Elle attend que vous y reveniez.

♦ **Q20.** Soient $(A \mid B)$ et $(A' \mid B')$ deux coupures. On fabrique un nouveau paquet en prenant toutes les sommes possibles $a + a'$, où a est un nombre de A et a' un nombre de A' . On aimerait que ce paquet soit la classe de gauche de la coupure qui définit la **somme** des deux nombres de départ.

1. Éprouver cette espérance sur les coupures qui définissent $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$: le paquet obtenu est-il bien la classe de gauche de la coupure qui définit $\frac{5}{6}$?
2. Que pensez-vous obtenir en additionnant, de cette façon, la coupure de $\sqrt{2}$ avec elle-même ? La démonstration complète dépasse la seconde ; l'énoncé, lui, est à votre portée.

Annexe A · Rappels de méthode

Tout ce voyage repose sur quatre gestes, et sur eux seuls. Les voici isolés, hors de tout contexte, pour que vous puissiez y revenir.

1. Montrer qu'un ensemble n'a pas de plus grand élément. On suppose qu'il en a un, on l'appelle a , et l'on **fabrique** à partir de a un élément de l'ensemble strictement plus grand que a . La supposition tombe. Tout le travail est dans la fabrication : c'est elle qu'il faut chercher, et elle seule. Aux questions 2 et 8, la formule vous est donnée ; ailleurs, il faudra la trouver.

2. Comparer deux nombres, c'est étudier le signe de leur différence. Pour comparer a' et a , on calcule $a' - a$, on le réduit au même dénominateur, et l'on conclut par le signe. Un quotient est strictement positif lorsque son numérateur et son dénominateur sont de même signe, tous deux non nuls.

3. Comparer deux nombres positifs, c'est comparer leurs carrés. C'est le résultat **R3**. Il sert chaque fois qu'un des deux nombres est une racine carrée que l'on ne sait pas écrire : on ne compare pas $\sqrt{2}$ et 1,41, on compare 2 et 1,41². L'hypothèse de positivité n'est pas décorative, et le chapitre vous a montré ce qu'il advient lorsqu'on l'oublie.

4. Reasonner par l'absurde. On suppose vrai le contraire de ce que l'on veut établir, et l'on en tire une affirmation dont on sait déjà qu'elle est fausse. La supposition était donc fausse. Ce raisonnement sert aux questions 4, 10 et 18 ; c'est aussi celui par lequel A1 a établi que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2. Si a était le plus grand élément de A_1 , le nombre $\frac{a+3}{2}$ serait lui aussi dans A_1 . Où se trouve-t-il par rapport à a ?

Q4. Le rationnel fourni par **R1** doit appartenir à l'un des deux paquets, et à un seul. Examinez les deux possibilités : chacune contredit une hypothèse.

Q7. Pour la troisième condition, le cas délicat est celui où les deux nombres sont strictement positifs. Vous connaissez alors leurs carrés, et **R3** transforme une comparaison de carrés en comparaison de nombres.

Q8. Pour le premier calcul, réduisez $a' - a$ au même dénominateur. Pour le second, développez $(2a + 2)^2$ et $2(a + 2)^2$ séparément avant de soustraire : les termes en a s'annulent, et les constantes se réduisent.

Q9. Les deux égalités de la question 8 sont vraies pour tout nombre, quel que soit son carré : ce sont des identités. Seuls les signes des deux quotients changent selon que le carré du nombre est plus petit ou plus grand que 2. Prenez garde toutefois : les deux numérateurs sont $2 - a^2$ et $2(a^2 - 2)$, qui sont opposés l'un de l'autre.

Q16. Pour comparer deux nombres positifs par leurs cubes, partez de $u \leq v$ et multipliez deux fois de suite par un nombre positif bien choisi, en passant par uv .

Q18. Pour la question 1, ne cherchez pas le rationnel *entre* les deux classes : cherchez-le *sous* un élément de A , puis au-dessus d'un élément de B . Un rationnel plus petit qu'un élément de A ne peut pas appartenir à B , sans quoi la troisième condition serait violée.

Q20. Pour la question 1, le sens difficile est le second : partant d'un rationnel q plus petit que $\frac{5}{6}$, il faut fabriquer a et a' dont il soit la somme. Posez $d = \frac{5}{6} - q$ et retranchez la moitié de d à chacune des deux bornes.

Q11. Une écriture décimale de $\sqrt{2}$ n'existe pas sous forme finie. Une coupure, elle, se décrit entièrement en une phrase. Comparez ce que chacune permet de faire.

Q13. Pour la question 2, appliquez l'hypothèse admise à l'écart entre le rationnel considéré et $\sqrt{2}$, qui n'est pas nul puisque ce rationnel n'est pas $\sqrt{2}$.

Q14. Le nombre a_3 est le plus grand décimal à trois décimales que contienne le paquet A . Il suffit donc de tester des carrés.

Q16. La deuxième condition de la définition demande que chaque rationnel tombe d'un côté et d'un seul : le signe de $x^3 - 2$ s'en charge.

Q18. Pour la question 2, raisonnez par l'absurde : si un élément de A était strictement plus grand que c , **R1** fournirait un rationnel entre les deux. Dans quel paquet serait-il, et pourquoi est-ce contradictoire ?

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Le compagnon numérique du chapitre prolonge ce voyage : ce que devient l'addition lorsqu'on ne dispose que de coupures, pourquoi Dedekind a attendu quatorze ans, et la question que le cours A1 vous a laissée en suspens, celle des irrationnels « infiniment plus nombreux », qui demande un tout autre outil que celui-ci.

