



EXERCICES • A2. ORDRE, INTERVALLES ET VALEUR ABSOLUE

Trente exercices, du geste technique à la belle mathématique

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Comparer, c'est soustraire	Ex. 1–6	★ à ★★★★★★	■ ♦ ★	cours § 1.1 à 1.4
II. Encadrer une expression	Ex. 7–11	★ à ★★★★★	■ ♦	cours § 1.5
III. Écrire un intervalle	Ex. 12–16	★ à ★★★★★	■ ♦	cours § 2.1 et 2.2
IV. Cerner, tronquer, arrondir	Ex. 17–21	★ à ★★★★★	■ ♦	cours § 2.3 et 2.4
V. Distances et rubans	Ex. 22–25	★ à ★★★★★★	■ ♦	cours § 3
VI. Histoires et belles mathématiques	Ex. 26–30	★★★ à ★★★★★★	♦ ★	tout le chapitre

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Les gammes ne sont pas ici : elles sont au **Cahier de calcul Seconde**, fiches 27 (inégalités et valeurs absolues) et 28 (manipulation d'inégalités). Corrigés en fin de cahier, travail en autonomie. C'est ce socle, entretenu toute l'année, que l'épreuve anticipée de première évaluera sans calculatrice.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. COMPARER, C'EST SOUSTRAIRE

↔ s'appuie sur COURS A2, § 1.1 à 1.4 · l'ordre, et ce qu'on a le droit d'en déduire

EXERCICE 1 · APL-A2-01



Le signe décide

Partie A. Comparer les deux nombres de chaque couple, **sans calculatrice**, en étudiant le signe de leur différence. Terminer chaque fois par une phrase.

1. $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{11}$

2. $-\frac{3}{7}$ et $-\frac{4}{9}$

3. $\frac{2}{3}$ et 0,667

Partie B. Ranger les cinq nombres suivants dans l'ordre croissant, **sans calculatrice**. Chaque comparaison doit être justifiée par le signe d'une différence. Quatre différences bien choisies suffisent : les calculer toutes serait du travail perdu.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{31}{40} \quad 0,7777 \quad \frac{7}{9} \quad 0,78$$

Coup de pouce

Pour le dernier couple de la partie A, écrire 0,667 sous forme de fraction : la différence devient exacte, et une valeur approchée ne peut plus servir d'argument.

EXERCICE 2 · APL-A2-02



La hausse la plus forte

Une association voit sa cotisation annuelle passer de 250 à 270 euros. La même année, le loyer de son local passe de 1 250 à 1 300 euros.

1. Calculer les deux hausses en euros. Laquelle est la plus grande ?
2. Tous ces montants sont strictement positifs : calculer les quotients $\frac{270}{250}$ et $\frac{1\,300}{1\,250}$, puis dire par quel nombre chaque montant a été multiplié.
3. Laquelle des deux hausses est, **en proportion**, la plus forte ? Comparer avec la réponse de la question 1.
4. Vrai ou faux, à justifier : « si le quotient d'une nouvelle valeur strictement positive par l'ancienne est strictement inférieur à 1, alors la valeur a baissé ».

EXERCICE 3 · APL-A2-03



Vrai ou faux

Dans tout l'exercice, a , b , c et d désignent des réels quelconques. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer, ou citer précisément la propriété du cours qui la donne ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
2. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $ac \leq bd$.
3. Si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.
4. Si $a \leq b$, alors $-3a \geq -3b$.
5. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a - c \leq b - d$.
6. Si $a \leq b$ et si c est positif, alors $ac \leq bc$.

EXERCICE 4 · APL-A2-04



Somme, différence, et le piège

On sait que $3 \leq x \leq 7$ et que $-2 \leq y \leq 4$.

1. Encadrer $x + y$.
2. Encadrer $-y$, puis en déduire un encadrement de $x - y$.
3. Un élève écrit directement $3 - (-2) \leq x - y \leq 7 - 4$, c'est-à-dire $5 \leq x - y \leq 3$. Sans rien calculer de plus, comment voit-on que cette ligne est fausse ? Puis dire quelle règle a été employée à tort.
4. Encadrer $y - x$.

EXERCICE 5 · THE-A2-05



La règle que le cours n'a pas énoncée

Le cours affirme que la règle d'addition *ne se transpose pas telle quelle* à la soustraction. Il en existe pourtant une, et cet exercice la construit.

1. Soient c et d deux réels tels que $c \leq d$. Démontrer que $-d \leq -c$.
2. Soient a , b , c , d quatre réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. En déduire que $a - d \leq b - c$.
3. Le cours réfutait la fausse règle sur le couple $2 \leq 3$ et $1 \leq 5$. Vérifier que ce même couple satisfait, lui, la règle que vous venez d'établir.
4. Sous quelle condition supplémentaire sur c et d l'écriture $a - c \leq b - d$ deviendrait-elle vraie **quels que soient** les réels a et b tels que $a \leq b$?

Un nombre et son carré

DÉFI – CET EXERCICE EST FACULTATIF

On cherche à comparer a et a^2 pour un réel a quelconque. Aucune hypothèse n'est faite sur son signe : c'est l'exercice qui devra en distinguer les cas.

1. Factoriser la différence $a^2 - a$.
2. Comparer a et a^2 lorsque $a \geq 1$.
3. Comparer a et a^2 lorsque $0 \leq a \leq 1$.
4. Comparer a et a^2 lorsque $a \leq 0$.
5. Rassembler les trois cas en une seule phrase : pour quels réels a a-t-on $a^2 \leq a$?
6. Placer ces réels sur une droite graduée, puis écrire l'ensemble obtenu à l'aide d'un intervalle.

II. ENCADRER UNE EXPRESSION

↔ s'appuie sur COURS A2, § 1.5 · multiplier, ajouter, et surveiller le signe du coefficient

Cinq expressions

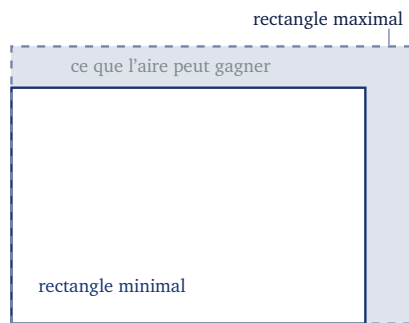
On sait que $1 \leq x \leq 4$. Encadrer chacune des expressions suivantes.

- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|
| 1. $A = 3x + 2$ | 3. $C = 5 - 2x$ | 5. $E = -3x - 1$ |
| 2. $B = -x + 7$ | 4. $D = 4x - 9$ | |

Vérifier chaque encadrement avec les deux valeurs extrêmes de x .

Le rectangle mesuré

Les côtés d'un rectangle sont mesurés au dixième de centimètre : on trouve $L = 8,3$ cm et $\ell = 5,6$ cm. L'instrument garantit que chaque mesure s'écarte d'au plus 0,05 cm de la valeur affichée.



échelle exagérée : l'écart réel entre les deux rectangles vaut un demi-millimètre
le périmètre suit le contour, l'aire occupe toute la bande

1. Encadrer L , puis encadrer ℓ .
2. Encadrer le périmètre $2(L + \ell)$.
3. **On admet la règle suivante** : si les six réels u, v, u', v', x, y sont **positifs** et vérifient $u \leq x \leq v$ et $u' \leq y \leq v'$, alors $uu' \leq xy \leq vv'$. En déduire un encadrement de l'aire.
4. Calculer l'amplitude de l'encadrement du périmètre, puis celle de l'encadrement de l'aire.
5. Ces deux amplitudes ne se comparent pas directement : l'une est en centimètres, l'autre en centimètres carrés. Calculer, pour chacune, la fraction qu'elle représente de la grandeur mesurée. Laquelle des deux grandeurs est alors la mieux connue ?

EXERCICE 9 · APL-A2-09

★★ ■ ⌚

Le plein d'essence

Un véhicule consomme entre 5,4 et 6,1 litres aux 100 kilomètres. Le carburant coûte entre 1,72 et 1,85 euro le litre. On effectue un trajet de 240 kilomètres.

1. Encadrer le nombre de litres consommés.
2. En déduire un encadrement du coût du trajet.
3. On veut annoncer les deux bornes au centime, sans que l'encadrement cesse d'être vrai. Pour chacune d'elles, dire s'il faut retenir sa troncature au centime ou le décimal à deux décimales immédiatement supérieur. Justifier.

EXERCICE 10 · APL-A2-10

★★★ ■ ⌚

L'inverse renverse

1. On sait que $2 \leq x \leq 5$. Comparer $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$, puis proposer un encadrement de $\frac{1}{x}$.
2. Démontrer le résultat général : si $0 < u \leq v$, alors $\frac{1}{v} \leq \frac{1}{u}$. Vérifier ensuite que le même calcul reste valable lorsque u et v sont tous deux **strictement négatifs**.
3. On sait que $-4 \leq x \leq -1$. Encadrer $\frac{1}{x}$.
4. On sait que $-2 \leq x \leq 3$. Peut-on encadrer $\frac{1}{x}$? On commencera par examiner si cette écriture a un sens pour toutes les valeurs permises de x .

*Coup de pouce**Pour la question 4, une fois écartées les valeurs interdites, essayez des valeurs de x de plus en plus proches de zéro.*

EXERCICE 11 · THE-A2-11



La règle du produit, démontrée

Soient u, v, u', v', x, y des réels tels que

$$0 \leq u \leq x \leq v \quad \text{et} \quad 0 \leq u' \leq y \leq v'.$$

1. En multipliant l'inégalité $u \leq x$ par le nombre y , justifier que $uy \leq xy$. Quelle hypothèse a-t-on utilisée ?
2. En multipliant l'inégalité $u' \leq y$ par le nombre u , justifier que $uu' \leq uy$.
3. En déduire que $uu' \leq xy$.
4. Établir de même que $xy \leq vv'$.
5. Donner un contre-exemple montrant que l'encadrement $uu' \leq xy \leq vv'$ tombe si l'on retire l'hypothèse de positivité.

III. ÉCRIRE UN INTERVALLE

↔ s'appuie sur COURS A2, § 2.1 ET 2.2 · les quatre crochets, les bornes infinies, et l'art de combiner

EXERCICE 12 · APL-A2-12



Aller et retour

Partie A. Écrire l'intervalle décrit par chaque phrase.

1. x est strictement compris entre -5 et 0 .
2. x est au moins égal à 12 .
3. x est strictement positif.
4. x est strictement inférieur à -1 .
5. x est compris entre 2 et 9 , la première valeur étant exclue et la seconde comprise.
6. x est compris entre $-0,5$ et $0,5$, les deux valeurs étant comprises.

Partie B. Traduire chaque intervalle par une phrase.

- | | | |
|--------------------|-------------------|----------------|
| 7. $[-3; 8[$ | 9. $[7; +\infty[$ | 11. $] -1; 5]$ |
| 8. $] -\infty; 4[$ | 10. $] 0; 1[$ | 12. $[6; 6]$ |

Partie C. On sait que $-3 \leq x \leq 5$. Encadrer chacune des expressions suivantes, puis écrire l'encadrement obtenu à l'aide d'un intervalle.

13. $x + 4$

14. $-2x + 1$

15. $\frac{x}{2}$

EXERCICE 13 · APL-A2-13

**Appartenir ou non**

Dire si le nombre appartient à l'intervalle indiqué. Chaque réponse doit être justifiée, et la calculatrice n'est pas un argument.

1. $\sqrt{7}$ et $[2,6; 2,7]$
2. $\sqrt{7}$ et $[2,64; 2,65]$
3. $\frac{355}{113}$ et $]3,141; 3,142[$
4. $-\sqrt{13}$ et $[-3,7; -3,6]$
5. $\frac{1}{3}$ et $[0,33; 0,34]$
6. 0 et $]0; 1]$
7. $\sqrt{7}$ et $[2; 2,6] \cup]2,64; 2,65[$
8. 0 et $]0; 1] \cap [0; 1[$

EXERCICE 14 · APL-A2-14

**Réunir, croiser, simplifier**

Partie A. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$. On tracera chaque fois les deux intervalles en bandes superposées sur une droite graduée, comme au cours.

1. $I = [-2; 4]$ et $J = [1; 6]$
2. $I =]-\infty; 2]$ et $J = [-1; +\infty[$
3. $I = [0; 1[$ et $J =]3; 5]$

Partie B. Écrire chaque ensemble plus simplement lorsque c'est possible, et expliquer ce qui l'empêche lorsque ce ne l'est pas.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------|
| 4. $[1; 5] \cup [3; 8]$ | 7. $[2; 6] \cap [6; 9]$ |
| 5. $[0; 4] \cap [2; 7[$ | |
| 6. $] -\infty; 3] \cup [1; +\infty[$ | 8. $]1; 3[\cup [3; 7]$ |

D'une inégalité à l'autre

Partie A. Écrire chacun des ensembles suivants à l'aide d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles : l'ensemble des réels x vérifiant...

1. $x > -1$ et $x \leq 3$;
2. $x \leq 2$ ou $x > 5$;
3. $x < 0$ ou $x \leq 4$;
4. $x \leq 4$ et $x \geq 6$.

Partie B. Sens inverse : décrire chaque ensemble par des inégalités, comme celles de la partie A.

5. $]-\infty; 0[\cup [2; +\infty[$;
6. $[-3; 1] \cap]0; 5]$, que l'on simplifiera d'abord.

Coup de pouce

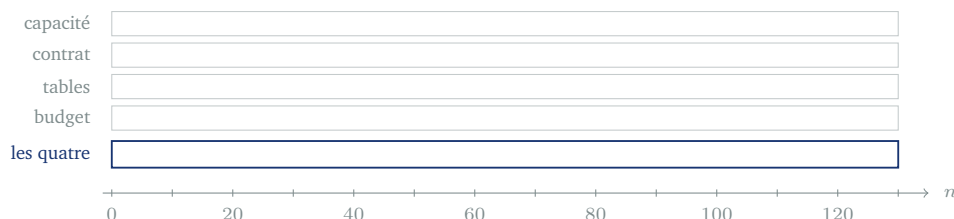
Une droite graduée par item lève tous les doutes. Au 3, les deux conditions se recouvrent : l'une des deux contient l'autre. Au 4, chercher un réel qui satisfait les deux conditions à la fois, avant d'écrire quoi que ce soit.

Quatre contraintes, un seul intervalle

Une salle doit accueillir n personnes pour une soirée. Quatre contraintes pèsent sur n .

- La capacité réglementaire de la salle est de 120 personnes.
 - Le contrat de location impose au moins 45 participants.
 - Le traiteur dresse des tables de 8 couverts, et la salle ne peut en accueillir que 13 au maximum.
 - Le budget est de 1800 euros, et le repas revient à 18 euros par personne.
1. Traduire chacune des quatre contraintes par un intervalle.
 2. Un nombre n convient s'il satisfait les quatre contraintes à la fois : écrire l'ensemble des valeurs permises sous la forme d'une **intersection de quatre intervalles**.
 3. Réduire cette intersection à **un seul** intervalle.
 4. Combien d'entiers conviennent ?
 5. Deux des quatre contraintes ne servent à rien. Lesquelles, et pourquoi ?

Support de travail pour les questions 1 à 3 : colorier un couloir par contrainte, puis reporter dans le dernier ce qui reste permis.



IV. CERNER, TRONQUER, ARRONDIR

↔ s'appuie sur COURS A2, § 2.3 ET 2.4 · l'amplitude, et les deux façons de n'en garder qu'une

EXERCICE 17 · APL-A2-17



Couper ou approcher

Pour chacun des quatre nombres, donner la troncature **et** l'arrondi à 10^{-1} , à 10^{-2} puis à 10^{-3} . On présentera les résultats dans un tableau.

1. $\frac{7}{6}$

2. $\frac{4}{7}$

3. $\sqrt{6}$

4. $\frac{1}{8}$

Le dernier nombre pose, à 10^{-2} , une question que les autres ne posent pas : la repérer, et dire comment le cours la tranche. À 10^{-3} , il en pose une seconde, d'une tout autre nature : laquelle ?

EXERCICE 18 · APL-A2-18



Deux racines, puis leur somme

1. Encadrer $\sqrt{11}$ à 10^{-1} près, puis à 10^{-2} près.
2. Encadrer $\sqrt{30}$ à 10^{-1} près, puis à 10^{-2} près.
3. À partir des deux encadrements à 10^{-2} près, encadrer $\sqrt{11} + \sqrt{30}$, puis donner l'amplitude obtenue.
4. À partir des mêmes encadrements, encadrer $\sqrt{30} - \sqrt{11}$, puis donner l'amplitude obtenue.
5. Les deux amplitudes sont-elles égales ? Le commenter.

EXERCICE 19 · APL-A2-19



Combien de décimales ?

1. Quelle est l'amplitude d'un encadrement à 10^{-3} près ? à 10^{-5} près ?
2. On mesure une longueur en mètres et l'on veut l'encadrer avec une amplitude d'au plus un millimètre. Quel ordre d'encadrement suffit ?
3. On sait seulement que $2,3975 \leq x \leq 2,4015$. Peut-on donner la **troncature** de x à 10^{-2} ? Peut-on donner son **arrondi** à 10^{-2} ? Répondre aux deux questions, et expliquer la différence.

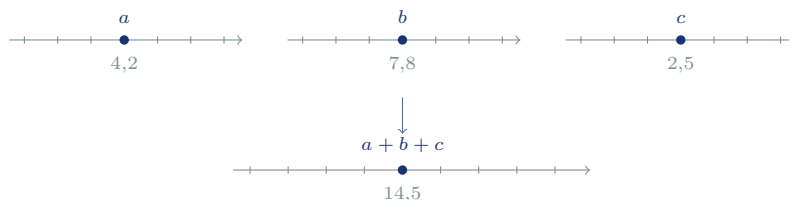
Ce que devient l'imprécision

Trois longueurs sont mesurées, chacune annoncée arrondie au dixième :

$$a = 4,2 \quad b = 7,8 \quad c = 2,5.$$

1. Encadrer a , puis b , puis c . On prendra garde à la borne supérieure : le cours tranchant l'égalité des distances en faveur de la borne haute, celle-ci est exclue.
2. Encadrer $a + b + c$, et donner l'amplitude obtenue.
3. Encadrer $a + b - c$, et donner l'amplitude obtenue.
4. Peut-on annoncer que $a + b + c$ vaut 14,5 ? De combien la vraie valeur peut-elle s'écarter de ce nombre, au maximum ?
5. Combien de mesures de ce type faudrait-il additionner pour que l'amplitude de la somme dépasse 1 ?

Support de travail : hachurer sur chaque axe l'intervalle où se trouve la mesure, puis reporter en bas ce que devient la somme. Les bornes cherchées ne tombent pas sur les graduations, c'est voulu.



Les carrés, version stricte

Le cours a établi que, pour u et v **positifs**, dire $u \leq v$ revient à dire $u^2 \leq v^2$. Il affirme, sans le démontrer, que le même énoncé vaut avec des inégalités strictes.

1. Soient u et v deux réels positifs. Démontrer que dire $u < v$ revient à dire $u^2 < v^2$. On pourra partir de la factorisation de $v^2 - u^2$ et examiner à part le cas où $u + v$ est nul.
2. À quel endroit exact de votre démonstration l'hypothèse de positivité intervient-elle ?
3. L'énoncé reste-t-il vrai si l'on remplace « positifs » par « négatifs » ? Si non, énoncer et démontrer ce qui le remplace.

V. DISTANCES ET RUBANS

↔ s'appuie sur COURS A2, § 3 · la valeur absolue comme distance

EXERCICE 22 · APL-A2-22



Valeurs absolues et distances

Partie A. Calculer.

1. $|-9|$

2. $|0|$

3. $|3 - 11|$

4. $|11 - 3|$

Partie B. Calculer la distance entre les points d'abscisses données.

5. -7 et -2

6. 0 et $-6,5$

7. $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$

Partie C. Écrire chaque nombre sans valeur absolue. Le signe de l'expression entre les barres doit être justifié, et non deviné.

8. $|\pi - 3|$

10. $|\sqrt{6} - \sqrt{7}|$

9. $|1 - \sqrt{2}|$

11. $|-3 - \sqrt{2}|$

EXERCICE 23 · APL-A2-23



Rubans dans les deux sens

Partie A. Écrire chaque condition à l'aide d'un intervalle.

1. $|x - 7| \leq 2$

2. $|x + 3| \leq 1,5$

3. $|x - 0,5| \leq 0,25$

Partie B. Écrire chaque appartenance à l'aide d'une valeur absolue.

4. $x \in [1; 11]$

5. $x \in [-8; -2]$

6. $x \in [2,4; 3,6]$

Partie C. Soit a un réel. Quels sont les réels x vérifiant $|x - a| \leq 0$?

Coup de pouce

Pour la question 2, l'écriture $|x + 3|$ ne montre pas son centre : le faire apparaître en écrivant $x + 3$ sous la forme d'une différence.

EXERCICE 24 · THE-A2-24



Deux symétries et un produit

1. Démontrer, en séparant les cas, que $|-x| = |x|$ quel que soit le réel x .
2. En déduire que $|x - a| = |a - x|$ quels que soient les réels x et a .
3. Démontrer que $|x|$ est positif quel que soit le réel x , et qu'il est nul lorsque x est nul, et dans ce seul cas.
4. Démontrer, en séparant les cas, que $|xy| = |x| \times |y|$ quels que soient les réels x et y .

EXERCICE 25 · SYN-A2-25



Le diapason

Un diapason de référence doit sonner un la à 440 hertz. La norme tolère un écart de 0,5 hertz.

1. Écrire à l'aide d'une valeur absolue la condition qu'une fréquence f doit vérifier pour être conforme.
2. Donner l'intervalle des fréquences conformes.
3. Trois diapasons sont mesurés à 439,6 ; 440,4 et 440,55 hertz. Lesquels sont conformes ?
4. Un atelier annonce : « nos diapasons sonnent entre 439,7 et 440,3 hertz ». Écrire cette garantie à l'aide d'une valeur absolue, puis dire si elle est plus ou moins exigeante que la norme.
5. Un accordeur électronique n'affiche que la fréquence **arrondie au dixième**. Un diapason affiché à 440,5 peut-il être conforme ? Répondre en encadrant d'abord les fréquences compatibles avec cet affichage.
6. Quels sont les réels f qui ne vérifient **pas** la condition de la question 1 ? Écrire l'ensemble obtenu sous la forme d'une réunion de deux intervalles.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

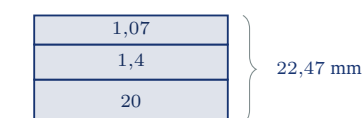
↔ s'appuie sur TOUT LE CHAPITRE · quatre encadrements qui ont compté, et une méthode d'horloger

EXERCICE 26 · APR-A2-26



Les cales de Johansson

Le cours a dit qui était Carl Edvard Johansson et ce qu'il avait imaginé en 1896, dans un atelier d'Eskilstuna. Reste à mesurer la portée de l'idée, et cela se chiffre. On travaille sur un jeu de cales bâti sur le sien : 102 blocs d'acier qui, empilés, composent toute longueur de 0,5 à 300 millimètres, pourvu qu'elle soit un multiple du centième de millimètre.



trois blocs du jeu, empilés, et une cote ; épaisseurs non à l'échelle

1. Combien de longueurs différentes ce jeu permet-il de composer ?
2. Quel est l'écart entre deux longueurs composables consécutives ?
3. Un atelier veut réaliser une cote de 47,382 millimètres. Encadrer cette cote entre deux longueurs composables consécutives.
4. L'atelier retient la longueur composable la plus proche de la cote voulue. De combien peut-il s'écarter de cette cote, au maximum ?
5. Le jeu ne contient que 102 blocs, pour près de trente mille longueurs. Comment est-ce possible ?

EXERCICE 27 · SYN-A2-27



Combien de décimales de π ?

Le laboratoire de la NASA qui pilote les sondes interplanétaires n'utilise que 15 décimales de π . Cet exercice vérifie que cela suffit.

1. Voyager 1 se trouve à environ 26 milliards de kilomètres du Soleil. On calcule la circonférence d'un cercle de ce rayon en remplaçant π par un nombre qui en diffère de moins de 10^{-15} . Majorer l'erreur commise sur la circonférence, et l'exprimer en centimètres.
2. Le laboratoire mène le même calcul sur un cercle de 64 milliards de kilomètres de **diamètre**, et annonce une erreur d'environ un centimètre et demi. Majorer, de la même façon, l'erreur commise sur ce cercle. Votre majoration dépasse le chiffre annoncé d'un facteur quatre : d'où vient l'écart ?
3. Le rayon de l'univers observable vaut environ $4,4 \times 10^{23}$ kilomètres, et le diamètre d'un atome d'hydrogène environ 10^{-13} kilomètre. Combien de décimales de π faut-il pour calculer la circonférence de l'univers observable avec une erreur inférieure au diamètre d'un atome d'hydrogène ?
4. Le chiffre qui circule le plus souvent est celui de *quarante* décimales. Que dit votre calcul ?

EXERCICE 28 · APR-A2-28

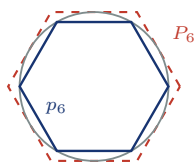


Archimède et les quatre-vingt-seize côtés

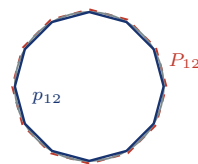
DÉFI – CET EXERCICE EST FACULTATIF

Vers 250 avant notre ère, dans *La mesure du cercle*, Archimède enferme le périmètre d'un cercle entre ceux de deux polygones réguliers : l'un inscrit dans le cercle, l'autre circonscrit. Il part de l'hexagone, puis double le nombre de côtés : 12, 24, 48, et enfin 96. Il n'écrit ni π , ni décimales : il encadre le rapport de la circonférence au diamètre par deux fractions. Les questions qui suivent traduisent son résultat dans notre écriture.

On travaille dans un cercle de diamètre 1, dont le périmètre vaut donc π . On note p_n et P_n les périmètres des polygones réguliers à n côtés, respectivement inscrit et circonscrit.



six côtés



douze côtés

l'un est plus court que le cercle, l'autre plus long ; doubler les côtés resserre l'étai

1. Expliquer pourquoi $p_n < \pi < P_n$ quel que soit le nombre $n \geq 3$ de côtés.
2. Le côté de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon de ce cercle. En déduire le périmètre p_6 .
3. Au polygone à 96 côtés, Archimède obtient $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Calculer l'amplitude exacte de cet encadrement, sous forme de fraction.
4. Combien de décimales les deux bornes de cet encadrement ont-elles en commun ? Ce sont les décimales de π que l'encadrement garantit.
5. Quelle troncature et quel arrondi de π à 10^{-2} cet encadrement permet-il d'affirmer ?
6. Permettait-il d'annoncer la troisième décimale ? Justifier par l'amplitude.

EXERCICE 29 · THE-A2-29



La Bourse de Vancouver

Le cours a raconté ce qui est arrivé à l'indice de la Bourse de Vancouver. Cet exercice le met en chiffres, avec les seules données dont disposait le programme fautif : un indice parti de 1000,000 en janvier 1982, recalculé puis **tronqué** au millième au lieu d'être arrondi, environ trois mille fois par jour, pendant vingt-deux mois.

1. Majorer l'écart entre un nombre et sa troncature au millième. Faire de même pour l'écart entre un nombre et son arrondi au millième.
2. En moyenne, une troncature au millième fait perdre 0,0005. Estimer la perte accumulée en une journée de trois mille opérations.
3. Estimer la perte accumulée en vingt-deux mois, en comptant vingt et un jours ouvrés par mois.
4. Au bout de ces vingt-deux mois, l'indice affichait environ 525 alors qu'il aurait dû être proche de 1100. Comparer la perte réelle à votre estimation, puis proposer une explication de l'écart entre les deux.
5. De combien un arrondi au millième aurait-il fait dériver l'indice sur la même période, si les erreurs d'arrondi s'étaient réparties également dans les deux sens ?

Coup de pouce

Pour la question 4 : nos trois entrées sont des chiffres ronds, choisis pour la commodité du calcul. Laquelle d'entre elles, revue à la baisse, suffirait à ramener l'estimation au voisinage de la perte constatée ?

La médiane de l'horloger

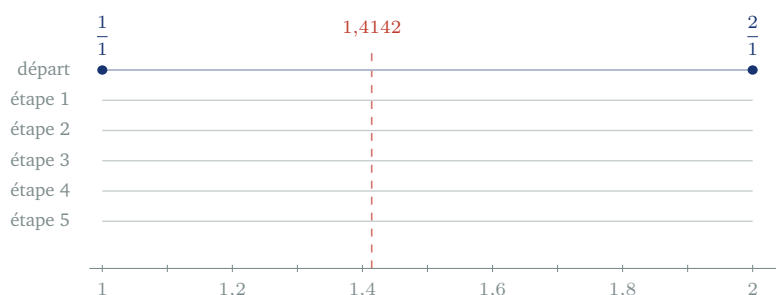
DÉFI – CET EXERCICE EST FACULTATIF

Achille Brocot (1817-1878), horloger parisien, publie en 1861 dans la *Revue chronométrique* une méthode pour calculer les rouages. Il lui fallait des rapports d'engrenages approchant une valeur voulue, et il la destinait à des confrères qui ne maîtrisaient pas l'outil mathématique. Moritz Stern avait publié la même construction trois ans plus tôt, sans savoir qu'elle servirait à des pendules.

Soient a, b, c, d quatre entiers, avec b et d strictement positifs. On appelle **médiane** des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

1. Calculer la médiane de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{2}{3}$, et vérifier qu'elle est comprise entre les deux.
2. **Le résultat de Brocot.** On suppose $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Calculer la différence $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$, puis démontrer qu'elle est strictement positive.
3. Calculer de même $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}$. Que remarque-t-on en comparant les deux numérateurs obtenus ?
4. **La méthode à l'ouvrage.** Appliquons-la à la recherche d'un rapport proche de 1,4142. On part de l'encadrement $\frac{1}{1} < 1,4142 < \frac{2}{1}$. À chaque étape, on calcule la médiane des deux bornes, on la compare à 1,4142, et l'on remplace par elle la borne située du même côté de 1,4142 qu'elle. Mener cinq étapes, sans jamais simplifier les fractions obtenues.
5. Donner l'encadrement obtenu et son amplitude.
6. La borne supérieure obtenue est $\frac{17}{12}$. Comparer $\frac{17}{12}$ et $\sqrt{2}$ **sans calculatrice**.

Support de travail pour la question 4 : la ligne du départ est déjà placée. À chaque étape, marquer les deux bornes et la médiane qui vient de les remplacer.



LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, les réponses des exemples jumelés du cours et les prolongements de ces cinq dernières histoires vous attendent sur le compagnon numérique du chapitre. Vous y trouverez aussi de quoi répondre au défi facultatif laissé en marge du cours, celui qui demandait de comparer $|a+b|$ à $|a|+|b|$.