



EXERCICES · A3. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Trente exercices, du geste sûr aux identités remarquables

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Ce que dit le signe	Ex. 1–3	★ à ★★★★★	■ ◆	cours § 1.1 à 1.3
II. Les deux gestes, montée rapide	Ex. 4–8	★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	cours § 1.3
III. L'ordre sous contrôle	Ex. 9–13	★★ à ★★★★★	■ ◆	cours § 1.4
IV. Mettre le monde en équation	Ex. 14–18	★★ à ★★★★★	■ ◆	cours § 1.5
V. Produit nul, quotient nul	Ex. 19–26	★★ à ★★★★★	■ ◆	cours § 2
VI. Histoires et belles mathématiques	Ex. 27–30	★★★★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	tout le chapitre

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Les gammes ne sont pas ici : elles sont au **Cahier de calcul Seconde**, fiches 26 (inéquations du premier degré), 31 et 32 (équations du premier degré) et, pour l'équation $x^2 = a$ seulement, fiche 33. Corrigés en fin de cahier, travail en autonomie. C'est ce socle, entretenu toute l'année, que l'épreuve anticipée de première évaluera sans calculatrice.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. CE QUE DIT LE SIGNE

↔ s'appuie sur COURS A3, § 1.1 à 1.3 · équation, solution, ensemble S , le symbole $\Leftrightarrow$

EXERCICE 1 · APL-A3-01



Tester avant de résoudre

Pour chaque question, la réponse se termine par une phrase.

1. Le nombre 2 est-il solution de l'équation $7x + 4 = 18$?
2. Le nombre -1 est-il solution de l'inéquation $3 - 2x \geq 6$? Et le nombre -2 ?
3. Le nombre $\sqrt{2}$ est-il solution de l'équation $x^2 + x = 2 + \sqrt{2}$?
4. Vérifier que ni 0 ni 100 ne sont solutions de l'équation $4(x - 1) = 4x - 1$. Peut-on affirmer, à ce stade, que cette équation n'a *aucune* solution ? Puis la résoudre pour trancher.

EXERCICE 2 · THE-A3-02



$\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$?

Dans chaque cas, x désigne un réel. Recopier le couple de phrases en plaçant entre elles le symbole qui convient : $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$. Chaque fois qu'un sens est refusé, le refus doit être justifié par un **contre-exemple**.

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1. $x = -2$; $x^2 = 4$ | 3. $x \geq 3$; $x \geq 1$ |
| 2. $2x = 8$; $x = 4$ | 4. $x(x - 7) = 0$; $x = 7$ |

Le cours dit que deux équations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions. Parmi les couples ci-dessus, lesquels sont des couples d'équations (ou d'inéquations) équivalentes ?

EXERCICE 3 · THE-A3-03



Réciproques et contraposées

On considère les deux implications suivantes, où x désigne un réel.

A : « si $x = -4$, alors $x^2 = 16$ » **B** : « si $2x - 1 = 9$, alors $x = 5$ »

1. Énoncer la **réciproque** de chacune. L'une des deux réciproques est fausse : laquelle, et pourquoi ? L'autre est vraie : le justifier.
2. Énoncer la **contraposée** de l'implication **A**. Est-elle vraie ?
3. L'une des deux implications peut être réécrite avec le symbole $\Leftrightarrow$. Laquelle, et pourquoi pas l'autre ?

II. LES DEUX GESTES, MONTÉE RAPIDE

↔ s'appuie sur COURS A3, § 1.3 · ajouter aux deux membres, multiplier les deux membres

EXERCICE 4 · APL-A3-04



Gammes éclair

Résoudre. Toute résolution se conclut par l'ensemble S .

1. $6x + 7 = 25$

3. $4x + 9 = x - 6$

2. $8 - x = 15$

4. $2(x - 3) = 5x$

Quatre équations suffisent ici : pour des gammes en nombre, direction les fiches 31 et 32 du Cahier de calcul Seconde, corrigés en fin de cahier.

EXERCICE 5 · APL-A3-05



Fractions des deux côtés

Résoudre. Le bon premier geste est de multiplier les deux membres par un même nombre bien choisi, pour faire disparaître tous les dénominateurs d'un coup.

1. $\frac{3x - 1}{4} = \frac{x + 3}{2}$

3. $\frac{3x + 2}{8} = \frac{x}{2} - 1$

2. $\frac{x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{x}{6} + 1$

EXERCICE 6 · APL-A3-06



Le développement qui s'effondre

Chacune de ces équations a l'air d'être du second degré. Développer les deux membres (les identités remarquables du chapitre A1 font le travail) : les x^2 se neutralisent, et il ne reste qu'une équation du premier degré.

1. $(x + 2)(x - 5) = x^2 + 8$

3. $(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 + x - 13$

2. $(x - 4)^2 = x^2 - 8$

4. $(x + 3)^2 = (x - 2)(x + 8)$

Chasse à l'erreur

Quatre copies, quatre résolutions, et une faute dans chacune. Pour chaque copie : dire si la conclusion est exacte, incomplète ou fausse, désigner la ligne fautive, énoncer la règle du cours qui est violée, puis rédiger la résolution correcte.

1. **Copie A.** $4x + 6 = 18 \iff 4x = 18 + 6 \iff 4x = 24 \iff x = 6$, donc $S = \{6\}$.
2. **Copie B.** $\frac{x}{2} + 3 = 7 \iff x + 3 = 14 \iff x = 11$, donc $S = \{11\}$.
3. **Copie C.** $7x - 4 = 2x + 11 \iff 5x = 7 \iff x = \frac{7}{5}$, donc $S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$.
4. **Copie D.** $3(x - 2) = 3x - 6 \iff 3x - 6 = 3x - 6 \iff 0 = 0$, donc $S = \{0\}$.

Selon la valeur de m

DÉFI – CET EXERCICE EST FACULTATIF

Dans cet exercice, m désigne un réel fixé, dont on ne connaît pas la valeur : c'est un **paramètre**. L'inconnue reste x .

1. Résoudre l'équation $mx = 6$ lorsque $m = 2$, puis lorsque $m = -3$, puis lorsque $m = 0$.
2. En déduire la discussion générale : donner l'ensemble des solutions de $mx = 6$ pour tout réel m non nul, puis pour $m = 0$. Rédiger la conclusion en français, en distinguant clairement les deux cas.
3. On considère maintenant l'équation $mx + 2 = 3x$. Montrer qu'elle se ramène à $(m - 3)x = -2$, puis la résoudre en discutant selon la valeur de m .
4. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle l'équation $mx + 2 = 3x$ a pour ensemble de solutions $\mathbb{R}$ tout entier ? Justifier.

III. L'ORDRE SOUS CONTRÔLE

↔ s'appuie sur COURS A3, § 1.4 · inéquations, renversement, l'ensemble S en intervalle

EXERCICE 9 · THE-A3-09

★★ ■ ⌚

Vrai ou faux, l'ordre

Pour chaque affirmation, x , a et b désignent des réels. Dire si elle est vraie ou fausse. Une affirmation vraie se justifie par une règle du cours (celui-ci ou A2) ; une affirmation fausse s'abat d'un seul contre-exemple.

1. Si $x \leq 2$, alors $-3x \leq -6$.
2. Si $x > 4$, alors $x + 7 > 11$.
3. Une inéquation du premier degré peut n'avoir aucune solution.
4. Les inéquations $2x > 6$ et $-x < -3$ sont équivalentes.
5. Si $a > b$, alors $a^2 > b^2$.

EXERCICE 10 · APL-A3-10

★★ ■ ⌚

Double détente

Résoudre. L'ensemble S s'écrit en intervalle, et un contrôle par sentinelles (une valeur dans S , une valeur hors de S) est exigé pour la première.

1. $5 - 2(x + 3) \leq 9$
2. $\frac{x-1}{2} > \frac{2x+3}{5}$
3. $3(2x-1) - 4(x+2) < 0$

Les gammes d'inéquations sans parenthèses ni fractions sont à la fiche 26 du Cahier de calcul Seconde.

EXERCICE 11 · APL-A3-11

★★ ■ ⌚

La moyenne visée

Après trois contrôles, Sofiane a obtenu 8, 12 et 9 (sur 20, sans coefficient). Un quatrième contrôle arrive, et sa note est l'inconnue x .

1. Quelle note doit-il obtenir pour que sa moyenne trimestrielle soit supérieure ou égale à 12 ? Mettre le problème en inéquation, résoudre, conclure par une phrase.
2. Même question pour une moyenne supérieure ou égale à 10.
3. Sofiane rêve d'une moyenne supérieure ou égale à 13. Montrer que ce rêve est hors de portée, et dire où la résolution le révèle.

EXERCICE 12 · APL-A3-12



Les carrés qui se neutralisent

Ces inéquations semblent hors programme : des carrés partout. Développer les deux membres avec les identités remarquables : les x^2 disparaissent, et l'inéquation redevient du premier degré. Aucune étude de signe n'est nécessaire, nulle part.

1. $(x + 1)^2 \geq (x - 2)^2$
2. $(2x - 3)^2 < (2x + 5)^2$
3. $(x - 6)(x + 6) \leq (x - 3)^2$

EXERCICE 13 · SYN-A3-13



Deux conditions à la fois

1. Résoudre la double inéquation $-3 < 2x + 1 \leq 7$, en appliquant chaque geste *aux trois membres* à la fois. Donner S en intervalle.
2. Quels sont les entiers relatifs solutions ?
3. Traduire la double inéquation par deux inéquations reliées par le connecteur « et », puis écrire S comme l'intersection de deux intervalles. Vérifier la cohérence avec la première question.
4. Résoudre de même $5 \leq 3x - 1 < 2$. Que constate-t-on, et pourquoi était-ce prévisible avant tout calcul ?

IV. METTRE LE MONDE EN ÉQUATION

↔ s'appuie sur COURS A3, § 1.5 · choisir l'inconnue, traduire, résoudre, confronter

EXERCICE 14 · APL-A3-14



Le schéma en quatre temps

Pour chacun des deux problèmes, dérouler le schéma du cours : choisir l'inconnue et l'écrire en toutes lettres, traduire l'énoncé en équation, résoudre, puis **confronter** la solution au problème de départ.

1. Aujourd'hui, Lina a 14 ans et son père 41 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il exactement le double de celui de Lina ?
2. Au restaurant, une famille paie 25,50 euros pour trois menus enfant et deux menus adulte. Un menu adulte coûte 3 euros de plus qu'un menu enfant. Quel est le prix d'un menu enfant ?

EXERCICE 15 · APL-A3-15



Le juste tarif

Une salle d'escalade propose deux formules : l'entrée simple à 12 euros, ou bien un abonnement annuel à 88 euros qui ramène l'entrée à 4 euros.

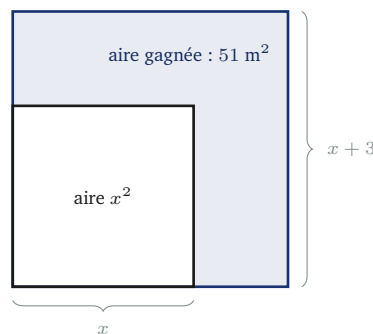
1. Pour combien d'entrées dans l'année les deux formules coûtent-elles exactement le même prix ?
2. À partir de combien d'entrées l'abonnement devient-il *strictement* plus avantageux ? Mettre en inéquation, résoudre, conclure par une phrase.
3. Yasmine grimpe deux fois par mois, de septembre à juin inclus, soit dix mois. Quelle formule doit-elle choisir, et quelle économie réalise-t-elle sur l'année ?

EXERCICE 16 · APL-A3-16



Le carré agrandi

Un jardin carré de côté x mètres est agrandi en un jardin carré de côté $x + 3$ mètres. L'agrandissement fait gagner 51 mètres carrés d'aire.



1. Exprimer, en fonction de x , l'aire du jardin avant et après l'agrandissement, puis justifier l'équation $(x + 3)^2 - x^2 = 51$.
2. Résoudre cette équation. L'identité remarquable rend le calcul très court.
3. Donner les dimensions des deux jardins, et vérifier sur les aires.
4. Le voisin réalise le même agrandissement (côté augmenté de 3 mètres) et ne gagne que 33 mètres carrés. Quel était le côté de son jardin ?

EXERCICE 17 · APL-A3-17



Isoler la lettre qui compte

Dans une formule, toutes les lettres sont des variables : isoler l'une d'elles, c'est le geste retourné du cours, et chaque étape doit rester un geste légal.

1. Aux États-Unis, la température se lit en degrés Fahrenheit : $F = 1,8 C + 32$, où C est la température en degrés Celsius. Isoler C , puis convertir 98,6 degrés Fahrenheit, la température normale du corps humain.

- L'aire d'un trapèze de grande base B , de petite base b et de hauteur h non nulle vaut $A = \frac{(B+b)h}{2}$. Isoler b , puis calculer la petite base d'un trapèze d'aire 21 cm^2 , de grande base 4 cm et de hauteur 6 cm .
- Un trajet de longueur d (en km), parcouru à la vitesse moyenne v (en km/h, avec v non nul), dure t heures, avec t non nul, et ces variables sont liées par $v = \frac{d}{t}$. Isoler t : cette fois, la lettre à isoler est au dénominateur, et le premier geste est de multiplier les deux membres par t . Calculer alors la durée d'un trajet de 650 km à la moyenne de 130 km/h .

EXERCICE 18 · SYN-A3-18



La rencontre

Deux villages, Aubrac et Bessans, sont distants de 96 km par la véloroute qui les relie. À 9 h , Marius part d'Aubrac vers Bessans à la vitesse moyenne de 12 km/h ; au même moment, Bilal part de Bessans vers Aubrac à 20 km/h .



- On note t la durée écoulée depuis le départ, en heures. Exprimer en fonction de t la distance parcourue par chacun, puis justifier que la rencontre se produit lorsque $12t + 20t = 96$.
- À quelle heure se rencontrent-ils, et à quelle distance d'Aubrac ?
- Tant qu'ils ne se sont pas croisés, la distance qui les sépare vaut $96 - 32t$. À partir de quel instant, **avant leur rencontre**, cette distance devient-elle inférieure à 16 km ? Mettre en inéquation, résoudre, conclure par un horaire.
- Confronter : vérifier que les deux distances parcourues à l'instant de la rencontre ont pour somme 96 km .

V. PRODUIT NUL, QUOTIENT NUL

↔ s'appuie sur COURS A3, § 2 · le détour par zéro, la valeur interdite, les identités d'A1

EXERCICE 19 · APL-A3-19



Gammes éclair

Résoudre. Pour les quotients, la valeur interdite s'écrit *avant* tout calcul.

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $(2x - 7)(x + 9) = 0$ | 4. $\frac{4x + 6}{x + 8} = 0$ |
| 2. $x(6x + 5) = 0$ | 5. $\frac{x - 9}{2x + 1} = 0$ |
| 3. $(1 - 4x)(x + 7) = 0$ | |

EXERCICE 20 · APL-A3-20



Trouver le diviseur

L'automatisme du bloc 1 du programme : retrouver un diviseur. Pour chaque équation, écrire la valeur interdite, multiplier les deux membres par x , résoudre, conclure par S .

1. $\frac{12}{x} = 3$

3. $\frac{-15}{x} = 5$

5. $\frac{6}{x} = 0$

2. $\frac{7}{x} = -2$

4. $\frac{8}{x} = 0,5$

EXERCICE 21 · APL-A3-21



La différence de deux carrés

Tout ramener à zéro, factoriser par l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, conclure par le produit nul.

1. $x^2 = 81$

3. $(3x - 1)^2 - (x + 5)^2 = 0$

2. $9x^2 - 4 = 0$

4. $x^2 = 7$

EXERCICE 22 · THE-A3-22



Chasse à l'erreur, le retour

Quatre copies encore, autour du produit et du quotient. Même travail qu'à l'exercice 7 : conclusion exacte, incomplète ou fausse ; ligne fautive, règle violée, résolution correcte.

1. **Copie A.** $(x - 2)(x + 5) = 0 \iff x - 2 = 0$ **et** $x + 5 = 0$. Aucun réel n'est égal à 2 et à -5 en même temps, donc $S = \emptyset$.

2. **Copie B.** $\frac{3x + 1}{x - 6} = 0 \iff 3x + 1 = 0$ ou $x - 6 = 0$, donc $S = \left\{-\frac{1}{3}; 6\right\}$.

3. **Copie C.** $\frac{4}{x} = 8$. La valeur interdite est 0. Je multiplie le membre de gauche par x : j'obtiens $4 = 8$, c'est absurde, donc $S = \emptyset$.

4. **Copie D.** $x^2 = 10x$: je divise les deux membres par x , et j'obtiens $x = 10$, donc $S = \{10\}$.

EXERCICE 23 · APL-A3-23



Le carré parfait

1. Résoudre $x^2 - 10x + 25 = 0$, en reconnaissant dans le membre de gauche une identité remarquable. Combien l'équation a-t-elle de solutions ?

2. Résoudre de même $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

3. Résoudre $x^2 + 9 = 0$. La rédaction attendue tient en deux lignes et ne factorise rien : elle s'appuie sur le signe d'un carré, vu au chapitre A2.

4. Soit a un réel non nul et b un réel. Combien l'équation $(ax + b)^2 = 0$ a-t-elle de solutions ? Répondre par une phrase quantifiée en français.

EXERCICE 24 · APL-A3-24



Ne jamais diviser par l'inconnu

On considère l'équation

$$(2x - 3)(x + 1) = (2x - 3)(3x - 7).$$

1. Un élève pressé divise les deux membres par $2x - 3$. Pourquoi ce geste n'est-il pas légal ? Quelle solution fait-il disparaître ?
2. Résoudre correctement : tout ramener à zéro, factoriser par le facteur commun, conclure par le produit nul.
3. Résoudre de même l'équation $9x^2 = 2x$.

EXERCICE 25 · APL-A3-25



Quotients à numérateur factorisable

La valeur interdite d'abord, la factorisation du numérateur ensuite, la confrontation pour finir : certains candidats du numérateur sont interdits de séjour.

1. $\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0$
2. $\frac{x^2 - 10x + 25}{2x - 10} = 0$
3. $\frac{9x^2 - 1}{3x + 1} = 0$

EXERCICE 26 · SYN-A3-26



Le panachage

Sept équations en vrac, aucune consigne de méthode : **choisir la bonne porte est l'exercice**. Une fois la méthode reconnue, aucune résolution ne demande plus de quelques lignes.

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 1. $5(x - 2) = 2x + 11$ | 5. $\frac{x^2 - 36}{x + 6} = 0$ |
| 2. $(x + 6)^2 = x^2 + 12$ | 6. $x^2 + 4 = 0$ |
| 3. $25x^2 = 16$ | 7. $\frac{3}{x} = -12$ |
| 4. $(7 - x)(2x + 9) = 0$ | |

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur TOUT LE CHAPITRE · trois épigrammes grecques et un partage de Bagdad

EXERCICE 27 · SYN-A3-27



L'építaphe de Diophante

L'Anthologie grecque, un recueil compilé vers l'an 500, contient une épigramme attribuée à Métrodore : l'építaphe de Diophante d'Alexandrie, qui transforme la vie du mathématicien en énigme. La voici, traduite et abrégée. « Passant, sous cette tombe repose Diophante. Sa jeunesse dura un sixième de sa vie. Sa barbe poussa pendant un douzième encore. Après un septième de sa vie, il se maria. Cinq ans plus tard naquit son fils, qui vécut la moitié de la vie de son père. Quatre années de chagrin plus tard, Diophante rejoignit son enfant. »

1. En notant x la durée de la vie de Diophante, en années, traduire l'építaphe par l'équation

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

2. Résoudre cette équation. Un multiple commun bien choisi des dénominateurs fait tout disparaître d'un coup.
3. Reconstituer alors la chronologie : à quel âge Diophante s'est-il marié, à quel âge est-il devenu père, à quel âge a-t-il perdu son fils ? Vérifier que chaque fraction de l'építaphe tombe sur un nombre entier d'années.

EXERCICE 28 · APL-A3-28



Les partages de Bagdad

L'építaphe du cours cite al-Khwarizmi : ce que les gens demandent au calcul, ce sont leurs héritages et leurs partages. Voici un problème dans l'esprit de Bagdad, composé pour l'occasion. Un marchand laisse 1 900 dinars à ses trois enfants. L'aîné reçoit le double du benjamin ; le cadet reçoit 100 dinars de plus que le benjamin.

1. Choisir l'inconnue, traduire, résoudre : quelle est la part de chacun ?
2. Vérifier que les trois parts épuisent exactement l'héritage.
3. L'aîné affirme avoir reçu plus de la moitié de l'héritage. A-t-il raison ?

La mule et l'ânesse

Une épigramme de l'Anthologie grecque, que la tradition attribue à Euclide, met en scène une mule et une ânesse chargées de sacs de même poids. La mule dit à l'ânesse : « Si tu me donnais un de tes sacs, je porterais le double de ta charge ; si je t'en donnais un, nous porterions autant l'une que l'autre. »

On note m le nombre de sacs de la mule et a celui de l'ânesse.

1. Traduire la seconde promesse (« si je t'en donnais un... ») par une égalité entre m et a , et en déduire que $a = m - 2$.
2. Traduire la première promesse par une égalité entre m et a , puis y remplacer a par $m - 2$: il reste une équation du premier degré d'inconnue m . La résoudre.
3. Combien de sacs porte chacune ? Confronter : rejouer les deux échanges de sacs et vérifier que les deux promesses disent vrai.

Le lion de bronze

DÉFI – CET EXERCICE EST FACULTATIF

Toujours dans l'Anthologie grecque, le recueil de Métrodore pose l'énigme d'une fontaine : un lion de bronze crache l'eau par quatre jets, ses deux yeux, sa gueule et sa patte droite. « Mon œil droit remplit le bassin en deux jours, mon œil gauche en trois jours, ma patte en quatre jours ; ma gueule le remplit en six heures. En combien de temps les quatre jets, ensemble, le remplissent-ils ? » Comme les Anciens, on compte des **journées de douze heures**.

1. Quelle part du bassin l'œil droit verse-t-il en une journée ? Même question pour l'œil gauche, la patte, puis la gueule (attention : six heures, c'est une demi-journée, et cette part-là dépasse l'unité).
2. On note t le temps de remplissage cherché, en jours. Justifier l'équation

$$t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2 \right) = 1.$$

3. Résoudre : exprimer t en fraction de jour, puis en heures. Donner enfin une valeur approchée en heures et minutes.
4. Le résultat est-il cohérent ? Deux bons sens encadrent t : les quatre jets ensemble vont plus vite que la gueule seule, mais pas plus de quatre fois plus vite qu'elle. Traduire ces deux bons sens par un encadrement de t en heures, et vérifier que la solution le respecte.