



DM 1 · F1. LA MACHINE QUI ÉCRIVAIT DES TABLES

Londres, 1821 · quand additionner suffit à tout calculer

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue : deux hommes et deux tables	△	
I. Préliminaires : une table et ses différences	△	
II. Descendre : ce que les différences révèlent	△▲	les préliminaires
III. Remonter : la machine qui ne sait qu'additionner	△▲◆	R1 et la partie II
IV. La roue faussée	△▲◆	les parties I et II
V. Le sommet : pourquoi la deuxième ligne se fige	▲◆	R1, la partie III et la partie IV
VI. Ce que la machine n'écrira jamais	▲◆	les parties II et V

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Deux hommes et deux tables

LONDRES, 1821. Dans une pièce de sa maison, Charles Babbage et son ami John Herschel comparent deux tables de nombres que la toute jeune Société astronomique leur a confiées. Ce sont les mêmes : les mêmes colonnes, les mêmes lignes, les mêmes positions d'astres. On les a fait calculer deux fois, par deux calculateurs qui ne se sont pas parlé, précisément pour qu'en comparant on repère les fautes. Les deux hommes descendent les colonnes, ligne à ligne, et relèvent les désaccords. Il y en a beaucoup.

C'est là que Babbage prononce la phrase qu'on lui cite encore, et qui a le mérite de la franchise : « Plût à Dieu que ces calculs eussent été exécutés par la vapeur ». Il ne demande pas d'aller plus vite. Il demande à supprimer la main qui se trompe. L'année suivante, le 3 juillet 1822, il écrit à Sir Humphry Davy une lettre où il expose son projet : une machine qui calculerait les tables *et* les imprimerait, sans qu'aucun œil humain n'ait à relire un seul chiffre.

Le pari tient en une phrase, et c'est elle que ce document explore : une table de valeurs peut s'écrire tout entière avec des **additions**. Pas de multiplication, pas de carré, pas de formule à substituer. Des additions,

et rien d'autre. Vous allez démontrer ce mécanisme, vous en servir pour débusquer une faute sans refaire un seul calcul, puis découvrir ce que la machine ne saura jamais écrire.

△ **Q1.** Voici la table sur laquelle tout le document va travailler. Elle n'est pas l'une de celles de 1821 : elle est composée pour l'occasion, assez petite pour tenir sur une page et assez grande pour tout comprendre. Elle donne les valeurs d'une fonction f pour les neuf entiers de 0 à 8.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153

1. Donner l'image de 5 par f , puis celle de 0.
2. Chercher les antécédents de 28 dans cette table, et conclure par une phrase. Faire de même pour 20. Chaque phrase prendra soin de préciser qu'elle ne parle que des neuf valeurs de la table.
3. Le point de coordonnées $(7; 120)$ appartient-il à la courbe représentative de f ? Et le point $(6; 90)$?

PARTIE I

Préliminaires : une table et ses différences

Une table de valeurs se lit d'ordinaire de haut en bas, colonne par colonne. Babbage la lit *de gauche à droite*, et ne regarde pas les valeurs : il regarde ce qu'il faut ajouter pour passer de l'une à la suivante.

DÉFINITION – DIFFÉRENCES PREMIÈRES ET SECONDES

Soit une fonction f dont on connaît les valeurs aux entiers $0, 1, \dots, n$. Pour tout entier k compris entre 0 et $n - 1$, on appelle **différence première** de rang k le nombre

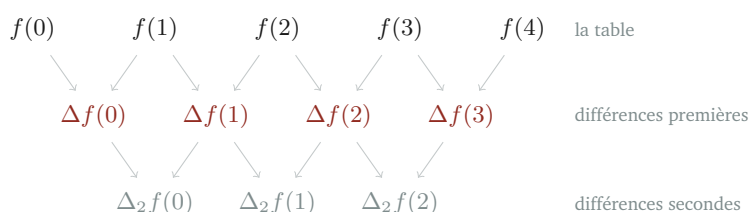
$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k).$$

On obtient ainsi une nouvelle table, à une entrée de moins. On lui applique le même traitement : pour tout entier k compris entre 0 et $n - 2$, la **différence seconde** de rang k est le nombre

$$\Delta_2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k).$$

Rien n'empêche de recommencer : on parlera alors de différences troisièmes, quatrièmes, et ainsi de suite.

Disposées les unes sous les autres, ces tables forment un triangle, chaque nombre naissant des deux qui le surplombent.



R1 – LES DEUX ADDITIONS

Pour tout entier k compris entre 0 et $n - 1$,

$$f(k + 1) = f(k) + \Delta f(k),$$

et pour tout entier k compris entre 0 et $n - 2$,

$$\Delta f(k + 1) = \Delta f(k) + \Delta_2 f(k).$$

(Démontré à la question Q8 ; ces deux égalités sont, à elles seules, toute la machine.)

△ Q2. Prendre la main sur une petite table.

k	0	1	2	3	4
$u(k)$	1	4	13	28	49

1. Calculer les quatre différences premières, puis les trois différences secondes.
2. Sans calculer $u(5)$ autrement que par des additions, et en admettant que la différence seconde suivante vaut encore 6, prolonger la table d'une colonne.

PARTIE II

s'appuie sur les préliminaires

Descendre : ce que les différences révèlent

△ Q3. Reprendre la table T du prologue, celle de la fonction f sur les entiers de 0 à 8.

1. Calculer ses huit différences premières, puis ses sept différences secondes.
2. Que constate-t-on sur la ligne des différences secondes ? L'écrire en une phrase.

△ Q4. Cette table a une formule, et la voici : pour tout réel x , $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

1. Vérifier que cette expression donne bien les valeurs de la table pour $x = 3$ et pour $x = 7$.
2. Comparer le nombre constant trouvé à la question Q3 au coefficient de x^2 . Que remarque-t-on ?

△ Q5. Une remarque n'est pas une règle : il faut d'autres cas. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 3x^2 + x - 4$.

1. Dresser le tableau des valeurs de g pour les entiers de 0 à 6.
2. Construire le triangle de ses différences jusqu'à la ligne constante, et vérifier que la remarque de la question Q4 tient encore.

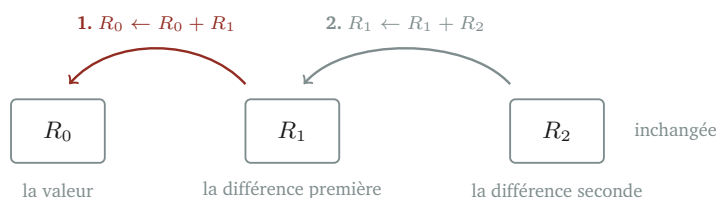
▲ Q6. Et si l'on monte d'un degré ? On considère la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = x^3 - 2x$.

1. Dresser le tableau des valeurs de h pour les entiers de 0 à 6.
2. Descendre le triangle des différences autant de fois qu'il le faut pour atteindre une ligne constante. Combien de lignes a-t-il fallu ? Quelle est cette constante ?

▲ Q7. Formuler en français, en une ou deux phrases, la conjecture que ces trois exemples suggèrent : quel lien y a-t-il entre le degré de l'expression et le rang de la *première* ligne constante ? Cette conjecture sera démontrée pour le second degré à la partie V ; pour les autres degrés, elle vous attendra.

Remonter : la machine qui ne sait qu'additionner

Descendre le triangle, c'est de la vérification. Babbage veut l'inverse : partir du bas, et *fabriquer* la table. Sa machine est une rangée de colonnes de roues chiffrées, une colonne par ligne du triangle. Aucune ne sait multiplier ; chacune sait ajouter à son contenu celui de sa voisine.



Un **tour de manivelle** exécute les deux additions du schéma, dans cet ordre, et la roue R_0 affiche alors la valeur suivante de la table. C'est tout.

△ **Q8.** Démontrer le résultat R1 : établir chacune des deux égalités à partir de la seule définition des différences.

1. La première.
2. La seconde.

△ **Q9.** Faire tourner la machine. On règle les trois roues sur $R_0 = 1$, $R_1 = 5$ et $R_2 = 4$, qui sont les premiers nombres de chacune des trois lignes du triangle de la question Q3.

1. Effectuer huit tours de manivelle, en notant après chaque tour le contenu des trois roues. On présentera le travail dans un tableau à quatre colonnes (numéro du tour, R_0 , R_1 , R_2).
2. Comparer la colonne des R_0 obtenus à la table T du prologue. Combien de multiplications a-t-il fallu ?

▲ **Q10.** L'ordre n'est pas indifférent. On règle de nouveau les roues sur $(1 ; 5 ; 4)$, mais on décide cette fois d'effectuer d'abord l'addition $R_1 \leftarrow R_1 + R_2$, puis $R_0 \leftarrow R_0 + R_1$.

1. Effectuer deux tours dans ce nouvel ordre. Qu'affiche R_0 ?
2. Expliquer, à l'aide de R1, pourquoi cet ordre est fautif dès le *premier tour* : quelle différence vient-on d'ajouter à $f(0)$, et laquelle aurait-il fallu ajouter ?

▲ **Q11.** Quatre roues pour le troisième degré. On règle quatre roues sur $R_0 = 0$, $R_1 = -1$, $R_2 = 6$ et $R_3 = 6$, et chaque tour enchaîne les trois additions dans cet ordre : $R_0 \leftarrow R_0 + R_1$, puis $R_1 \leftarrow R_1 + R_2$, puis $R_2 \leftarrow R_2 + R_3$.

1. Effectuer quatre tours, et comparer à la table de la question Q6.
2. La question Q10 n'a réglé l'ordre que de *deux* additions : elle ne suffit donc pas ici. Montrer que l'ordre ci-dessus est le seul convenable, en examinant ce que contiendrait R_1 si l'on avait commencé par $R_2 \leftarrow R_2 + R_3$.

▲ **Q12.** Le décompte, qui est le vrai argument de Babbage.

1. Pour obtenir les neuf valeurs de la table T en substituant x dans $2x^2 + 3x + 1$, combien faut-il de multiplications et combien d'additions ? On comptera $x \times x$, puis la multiplication par 2, puis $3 \times x$.

2. Combien la machine a-t-elle effectué d'additions à la question Q9, et combien de multiplications ?
3. ♦ Une table de mille valeurs est demandée : la première est réglée à la main sur les roues, les suivantes sont obtenues à la manivelle. Donner le nombre d'additions que la machine devra faire. Puis expliquer en français pourquoi c'est la *nature* de ces opérations, et non leur nombre, qui rend possible en 1822 une machine travaillant sans opérateur, là où toute machine à multiplier de l'époque réclamait une main pour la conduire à chaque opération.

PARIS, À PARTIR DE 1791 · LA MANUFACTURE À LOGARITHMES

Trente ans avant Babbage, Gaspard de Prony reçoit une commande démesurée : des tables de logarithmes et de lignes trigonométriques d'une précision inédite pour le nouveau cadastre. Il les organise comme une manufacture, en trois sections. Cinq ou six mathématiciens de premier rang, parmi lesquels Legendre et Carnot, choisissent les formules. Sept ou huit calculateurs expérimentés préparent les feuilles : ils inscrivent les valeurs de départ et les différences, et rien de plus. Enfin, jusqu'à quatre-vingts personnes remplissent les cases, et celles-là ne font **que des additions et des soustractions** : elles ignorent tout de ce qu'elles calculent. Le baron Dupin, ami de Prony, rapporte que certaines d'entre elles furent recrutées parmi les garçons perruquiers que l'abandon de la poudre et des perruques venait de priver de travail.

Autrement dit : la machine de Babbage existait déjà, et elle était faite de personnes.

PARTIE IV

s'appuie sur les parties I et II

La roue faussée

Une table imprimée contient une faute. Le lecteur ne dispose ni de la formule, ni du temps de tout recalculer : c'est exactement la situation de Babbage et Herschel en 1821. Le triangle des différences va la lui livrer, position et valeur comprises.

△ **Q13.** Voici la table T du prologue telle qu'un imprimeur distraît l'a composée. Une seule valeur a été changée.

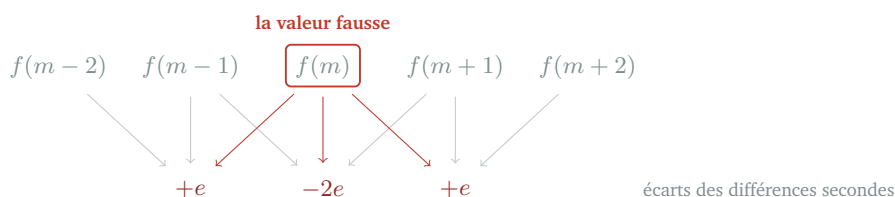
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	6	15	28	46	66	91	120	153

1. Calculer les différences premières, puis les différences secondes.
2. Combien de différences secondes s'écartent de la valeur 4 attendue ? Écrire ces écarts, en précisant leur signe.

▲ **Q14.** Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et $n - 2$,

$$\Delta_2 f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k).$$

Combien de valeurs de la table interviennent dans une différence seconde, et avec quels coefficients ?



♦ **Q15.** La signature. On suppose que toutes les valeurs de la table sont exactes, sauf celle de rang m , à laquelle on a ajouté un nombre e non nul (e pouvant être négatif). On suppose de plus que m est compris entre 2 et $n - 2$: la valeur fautive n'est donc ni l'une des deux premières, ni l'une des deux dernières.

1. À l'aide de la question Q14, déterminer quelles différences secondes sont touchées par cette erreur, et de combien chacune.
2. En déduire les deux renseignements que le triangle livre : comment lire la *position* de la valeur fautive, et comment lire la *correction* à lui apporter.
3. Reprendre le a en supposant cette fois que c'est la toute première valeur de la table qui est fautive, puis la deuxième. Combien de différences secondes sont touchées dans chaque cas ? Le diagnostic du b tient-il encore ?

R2 – LA SIGNATURE D'UNE ERREUR ISOLÉE

Pourvu que la valeur fautive ne soit ni l'une des deux premières ni l'une des deux dernières de la table, une seule valeur fautive, écartée de e , modifie exactement **trois** différences secondes consécutives, de $+e$, puis $-2e$, puis $+e$. La valeur fautive est celle qui intervient dans les trois ; l'écart e se lit sur celle du milieu. Lorsque la table exacte a toutes ses différences secondes égales, ces trois écarts se repèrent à l'œil nu. (Établi à la question Q15.)

▲ **Q16.** Appliquer R2 à la table de la question Q13 : retrouver la position de la valeur fautive et sa correction, sans utiliser la table du prologue ni l'expression de f . Vérifier ensuite que l'on retombe bien sur la table T .

▲ **Q17.** Le cas réel. La table ci-dessous a été imprimée dans un recueil dont la formule s'est perdue. On sait seulement qu'elle a été calculée par une machine à trois roues : ses différences secondes exactes sont donc toutes égales. Elle contient une faute, et une seule.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	7	10	23	46	79	128	175	238	311

1. Construire le triangle jusqu'aux différences secondes.
2. Localiser la valeur fautive et donner la valeur exacte, en citant R2.
3. Écrire la ligne des différences secondes de la table corrigée.

PARTIE V

s'appuie sur R1, la partie III et la table corrigée de la partie IV

Le sommet : pourquoi la deuxième ligne se fige

Tout le document repose sur un fait constaté sur deux expressions, utilisé partout ailleurs, et jamais démontré : pour une expression du second degré, la deuxième ligne du triangle est constante. Il est temps. Dans toute cette partie, a , b et c désignent des réels avec a non nul, et f est la fonction qui, à tout réel x , associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.

▲ **Q18.** La première ligne.

1. Développer et réduire $f(k+1) - f(k)$, où k désigne un entier.
2. En déduire que, pour tout entier k , $\Delta f(k) = 2ak + a + b$, et remarquer que cette écriture est du premier degré en k .

▲ **Q19.** La deuxième ligne. En repartant du résultat de la question Q18, calculer $\Delta_2 f(k)$ et conclure en français, en quantifiant : quel que soit l'entier k , la différence seconde vaut $2a$.

R3 – LES DIFFÉRENCES SECONDES DU SECOND DEGRÉ

Pour toute expression $ax^2 + bx + c$ avec a non nul, toutes les différences secondes prises aux entiers sont égales à $2a$. (Démontré à la question Q19 ; c'est ce que les questions Q4 et Q5 avaient constaté sur deux exemples.)

◆ **Q20.** La réciproque, qui est le cœur du document. On se donne trois nombres : u , v , et d non nul. On considère une table, construite sur les entiers, dont la première valeur est u , la première différence première est v , et dont toutes les différences secondes valent d . On pose, pour tout réel x ,

$$q(x) = \frac{d}{2} x^2 + \left(v - \frac{d}{2}\right)x + u.$$

1. Vérifier que la table des valeurs de q aux entiers commence elle aussi par u , que sa première différence première vaut v , et que ses différences secondes valent toutes d (on citera R3).
2. En invoquant R1 et le fonctionnement de la machine (partie III), conclure que les deux tables sont identiques. On rédigera l'argument en français : de quels nombres la machine a-t-elle besoin pour écrire une table entière, et que se passe-t-il si deux machines reçoivent les mêmes ? *(ce résultat peut être admis pour la suite)*

▲ **Q21.** La formule retrouvée. On revient à la table de la question Q17, une fois corrigée : sa première valeur est 7, sa première différence première vaut 3, et ses différences secondes valent toutes 10.

1. À l'aide de la question Q20, donner une expression du second degré qui engendre cette table.
2. Vérifier cette expression sur la valeur corrigée de rang 5 et sur celle de rang 8.

Ce que vous venez de faire, personne ne pouvait le faire en descendant les colonnes : la formule perdue d'une table imprimée a été reconstituée à partir de trois nombres.

PARTIE VI

s'appuie sur la conjecture de la partie II et sur la partie V

Ce que la machine n'écrira jamais

Une machine à trois roues écrit les tables du second degré, une machine à quatre roues celles du troisième. Il est tentant d'en conclure qu'avec assez de roues on écrirait tout. Cette dernière partie regarde de près ce que « assez de roues » veut dire, et la réponse est plus intéressante qu'un simple non.

On admettra dans toute cette partie la conjecture de la question Q7, ainsi que le fait suivant : le contenu de la dernière roue d'une machine ne changeant jamais, une machine n'écrit que des tables dont une ligne du triangle est constante.

▲ **Q22.** La table qui se reproduit elle-même. On considère la fonction D qui, à tout entier k positif, associe le nombre obtenu en doublant k fois le nombre 1, c'est-à-dire $D(k) = 2^k$.

1. Dresser la table de D pour les entiers de 0 à 8, puis calculer sa ligne de différences premières. Que reconnaît-on ?
2. Démontrer que pour tout entier k positif, $\Delta D(k) = D(k)$ (on pourra écrire $2^{k+1} = 2 \times 2^k$ et factoriser).
3. ◆ La ligne des différences premières est donc la table de D elle-même. Qu'obtient-on alors à la ligne suivante, et à toutes les suivantes ? En déduire, en français, que le triangle de D , poursuivi aussi loin

que l'on veut, n'a jamais de ligne constante, et donc qu'aucune machine, si nombreuses que soient ses roues, n'écrira la table de D tout entière.

▲ **Q23.** Une table qui commence par un ensemble de définition. On considère la fonction r qui, à un réel x , associe $r(x) = \frac{60}{x-4}$ lorsque ce quotient existe.

1. Déterminer l'ensemble de définition de r en l'écrivant d'abord par compréhension, puis en l'explicitant.
2. Dresser la table des valeurs de r pour les entiers de 5 à 10, et vérifier au passage que ces six entiers appartiennent bien à cet ensemble.
3. Descendre le triangle jusqu'à la cinquième ligne de différences. Les quatre premières sont-elles constantes ? Quels degrés cela exclut-il pour une expression qui engendrerait ces six valeurs ? La cinquième ligne, elle, ne compte qu'un seul nombre : expliquer pourquoi cela ne prouve rien, et pourquoi une machine à six roues écrirait pourtant ces six valeurs sans se tromper une seule fois.
4. ♦ On demande alors un septième nombre. Pour l'obtenir, on admet que la cinquième ligne garde la même valeur, et l'on prolonge le triangle d'une colonne, de la ligne la plus basse vers la plus haute, exactement comme à la question Q2. Donner la septième valeur ainsi produite, puis la comparer à $r(11)$, dont on donnera une valeur approchée au centième. Conclure.

♦ **Q24.** La conclusion, à rédiger en quelques phrases. La machine n'écrit qu'une famille de tables, et une seule : celles dont une ligne du triangle finit par se figer. Décrire cette famille en une phrase. Les questions Q22 et Q23 montrent alors deux échecs de nature bien différente : la table de D lui échappe pour toujours, et cela se démontre, tandis que celle de r se laisse écrire sur six valeurs mais la trahit à la septième. Dire, à la lumière de cette différence, ce que doit faire celui qui veut malgré tout imprimer une table de logarithmes, et pourquoi la première section de Prony, celle qui choisissait les formules, ne pouvait pas être supprimée.

CE QU'IL ADVINT DES MACHINES

Babbage obtient en 1823 un financement public pour sa machine à différences n° 1. Le chantier s'enlise, s'arrête en 1833, et seul un fragment de démonstration sera jamais assemblé. La première machine à différences réellement mise au travail est suédoise : en 1857, à Londres, les frères Scheutz impriment avec la leur les *Specimens of Tables, Calculated, Stereomoulded, and Printed by Machinery*, premières tables mathématiques calculées et composées par une machine ; l'appareil part la même année pour l'observatoire Dudley d'Albany.

Quant à la machine n° 2, que Babbage dessina entre 1847 et 1849 sans jamais la construire, le Science Museum de Londres l'a bâtie sur ses plans : quelque huit mille pièces, cinq tonnes, partie calculante achevée en juin 1991 pour le bicentenaire de sa naissance, imprimante ajoutée en 2002. Elle fonctionne.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2. Pour le b, quelle différence première faut-il ajouter à $u(4)$? Et où va-t-on la chercher, puisqu'elle ne figure pas encore dans le triangle ?

Q7. Compter, pour chacun des trois exemples, le degré d'un côté et le numéro de la ligne constante de l'autre. Deux colonnes de trois nombres suffisent à voir.

Q10. Écrire ce que contient R_1 juste avant que R_0 ne l'ajoute : est-ce encore $\Delta f(0)$?

- Q11.** Pour le b, la roue R_1 doit recevoir la différence seconde de rang k , pas celle de rang $k + 1$. Regarder à quel moment R_2 contient encore la première.
- Q12.** Pour le c, comparer non pas deux nombres d'opérations, mais deux natures d'opérations : laquelle des deux une roue dentée sait-elle faire toute seule ?
- Q14.** Une différence seconde est une différence de deux différences premières : combien de valeurs de f y figurent en tout, et laquelle y figure deux fois ?
- Q15.** Écrire la différence seconde de rang k avec la formule de Q14, et repérer les rangs de k pour lesquels la valeur de rang m y figure. Le coefficient qu'elle y porte n'est pas le même à chaque fois. Pour le c, ces rangs doivent tous exister.
- Q17.** Ne pas chercher la formule : elle est perdue, et R2 n'en a pas besoin.
- Q18.** Développer $a(k + 1)^2 + b(k + 1) + c$ avant de soustraire ; les termes en k^2 se neutralisent.
- Q20.** Pour le a, ne pas recalculer les différences de q à la main : identifier son coefficient de x^2 et appliquer R3. Pour le b, relire la question Q9 : combien de nombres a-t-il fallu régler sur les roues avant le premier tour ?
- Q22.** Pour le c, la ligne suivante est la ligne des différences de la table de D , c'est-à-dire, d'après le b, la table de D . Et ainsi de suite.
- Q23.** Pour le a, la condition porte sur le dénominateur ; l'écriture par compréhension se traite exactement comme au cours du chapitre. Pour le c, une ligne d'un seul nombre est constante sans rien avoir eu à prouver. Pour le d, commencer par la quatrième ligne de différences : quel nombre vient après le 2 ?
- Q24.** Relire l'encadré sur Prony : sa première section choisissait les formules. Que faire lorsque aucune formule ne convient sur toute l'étendue de la table ?

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Sur le compagne numérique du chapitre : les roues de Babbage à faire tourner sur la table de votre choix, et l'histoire complète de la manufacture à logarithmes de Prony, où quatre-vingts personnes calculèrent pendant des années sans jamais savoir quoi.