



P1. INFORMATION CHIFFRÉE

Proportions et évolutions : ce que les pourcentages disent vraiment

TABLE DES MATIÈRES

		1.3. Proportion ou évolution ? Les deux métiers du symbole	5
		2. MESURER UNE ÉVOLUTION	5
		2.1. Du taux au coefficient	5
1. LA PARTIE DANS LE TOUT	2	3. ENCHAÎNER ET REVENIR	7
1.1. Trois écritures pour une même part	2	3.1. Enchaîner : les coefficients se multiplient . .	7
1.2. La part d'une part	4	3.2. Revenir : l'évolution réciproque	9

PARCOURS DU CHAPITRE

- **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.
- ◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.
- ★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

*« Trois choses sont nécessaires à qui veut mener commerce
avec diligence : de l'argent comptant ou du crédit, un bon
calculateur, et de l'ordre dans ses comptes. »*

*Luca Pacioli, Summa de arithmetica, Venise, 1494 (traduit,
abrégé)*

Paris, 10 avril 1954. Un polytechnicien de l'administration fiscale, Maurice Lauré, voit aboutir une idée qu'il défend depuis des mois : une taxe d'un genre nouveau, collectée par chaque commerçant sur la seule valeur qu'il ajoute. La loi qui la crée porte le numéro 54-404 ; la taxe, elle, s'appellera TVA. Plus de soixante-dix ans plus tard, elle figure sur chaque ticket de caisse du pays, et près de cent soixante-dix États l'ont adoptée. C'est probablement l'exportation mathématique française la plus lue au monde.

PAPETERIE DU CENTRE ticket de caisse	
Prix hors taxe	100,00
TVA à 20 %	+ 20,00
Total TTC	120,00
merci de votre visite	

le prix affiché contient la taxe : c'est le sens de « toutes taxes comprises »

Maurice Lauré (1917-2001) proposait d'abord sa taxe pour remplacer un impôt en cascade qui pénalisait chaque étape de fabrication. La TVA ne taxe que la valeur ajoutée : d'où son nom.

Lauré, 1954

Ce soir-là comme tous les soirs, une commerçante fait ses comptes. Sa caisse affiche des prix TTC ; sa comptabilité exige des prix hors taxe. Pour un article vendu 120 euros TTC avec une TVA à 20 %, le geste paraît évident : « j'enlève les 20 % ». Elle calcule : 20 % de 120, c'est 24 ; et $120 - 24 = 96$ euros. Or le ticket ci-dessus est formel : le prix hors taxe est 100 euros, pas 96.

Quatre euros se sont volatilisés, et ce n'est ni une erreur de calcul, ni une erreur de caisse : les deux opérations sont justes. C'est la *question* qui était mal posée, et il faudra tout ce chapitre pour dire précisément en quoi. Car le symbole %, que tout le monde croit comprendre, exerce en réalité deux métiers différents ; et tant qu'on ne sait pas lequel des deux il exerce dans une phrase, il fait perdre de l'argent, des points, et parfois le fil d'un journal télévisé.

Quatre taux de TVA coexistent en France : 20 % (taux normal), 10 % (restauration, transports), 5,5 % (alimentation, livres) et 2,1 % (médicaments remboursés, presse).

PORTAIL ACT

ACT-P1 · Phases 1–4 ★

L'étiquette barrée : l'enquête sur les deux remises, à mener AVANT de lire la suite.



1. LA PARTIE DANS LE TOUT

1.1. Trois écritures pour une même part

Un pourcentage, dans son premier métier, mesure la place qu'une partie occupe dans un tout.

DÉFINITION – PROPORTION

On considère un ensemble de référence comptant N éléments (le **tout**), et une partie de cet ensemble comptant n éléments. La **proportion** de cette partie dans le tout est le nombre

$$p = \frac{n}{N}.$$

Une proportion est toujours comprise entre 0 et 1.

OBJECTIFS

- ▷ Relier effectifs, proportions et pourcentages
- ▷ Prendre la part d'une part
- ▷ Distinguer les deux métiers du symbole %

Un même nombre s'écrit de trois façons, et il faut circuler librement entre elles : l'écriture fractionnaire $\frac{17}{50}$, l'écriture décimale 0,34, l'écriture en pourcentage 34 %. La dernière n'est qu'une convention de lecture : « 34 pour 100 ». La relation centrale se lit alors dans les deux sens :

$$\text{partie} = \text{proportion} \times \text{tout}.$$

Attention

Un pourcentage seul ne dit rien : il faut toujours savoir **de quel tout** il parle. « 30 % de réduction », « 30 % des élèves », « 30 % d'eau en plus » : même symbole, trois référents. La première question à se poser devant un pourcentage n'est pas « combien ? » mais « **de quoi ?** »

Le symbole % descend de l'italien per cento, que les marchands abrégèrent en « Pc° » : un manuscrit commercial anonyme, vers 1425, porte la première trace du signe. Le P est tombé, les deux boucles sont restées.

vers 1425

MÉTHODE – M1 · RETROUVER LA PARTIE, LE TOUT OU LA PROPORTION

- ▷ 1. Identifier le **tout** de référence et nommer la quantité cherchée.
- ▷ 2. Écrire la relation $\text{partie} = \text{proportion} \times \text{tout}$ avec la proportion en écriture décimale.
- ▷ 3. Isoler la quantité cherchée (les gestes du chapitre A3 travaillent ici).
- ▷ 4. Contrôler : la proportion doit rester entre 0 et 1, la partie ne doit pas dépasser le tout. Conclure par une phrase.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Un lycée compte 850 élèves ; 289 déjeunent à la cantine. Quelle est la proportion de demi-pensionnaires ? Par ailleurs, 12 % des élèves sont inscrits à l'atelier théâtre : combien sont-ils ?

Le tout est le même dans les deux questions : les 850 élèves du lycée.

Pour la cantine, la proportion est la quantité cherchée :

$$p = \frac{289}{850} = 0,34, \text{ c'est-à-dire } 34 \%$$

Pour le théâtre, c'est la partie : $n = 0,12 \times 850 = 102$.

Contrôle : 0,34 est bien entre 0 et 1, et 102 ne dépasse pas 850.

34 % des élèves déjeunent à la cantine ; 102 font du théâtre.

*Entraînement : Cahier de calcul
Seconde, fiche 52 (« Proportions »).*

Exemple – À vous · jumeau

Dans un autre établissement, 45 élèves sont délégués de classe, soit 5 % de l'effectif total. Combien ce lycée compte-t-il d'élèves ?

Les deux premières étapes sont faites : le tout N est la quantité cherchée, et la relation s'écrit $45 = 0,05 \times N$. À vous l'isolement de N ,

ÉCHO EXO

EXO-P1 · Ex. 1-3 ★

Trois inconnues, un contrôle de vraisemblance, et deux clubs qui départagent proportion et effectif. ■

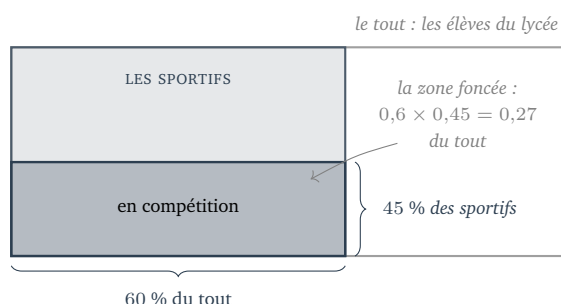
1.2. La part d'une part

Le programme officiel a un mot fétiche pour cette sous-partie : *parmi*. Ce mot change le tout de référence en cours de phrase, et c'est là que les pourcentages s'emboîtent.

PROPRIÉTÉ – PROPORTION DE PROPORTION

On considère un ensemble de référence, une première partie dont la proportion dans le tout vaut p , puis une seconde partie prise *parmi* la première, avec la proportion q . Alors la seconde partie, rapportée au tout de départ, a pour proportion le **produit** $p \times q$.

Pourquoi. Prendre q d'une part qui vaut p du tout, c'est prendre $q \times (p \times N)$ éléments sur N : la proportion obtenue est bien $q \times p$. Le dessin ci-dessous le dit sans calcul : une bande de 60 % du rectangle, puis 45 % de cette bande, découpent 27 % de l'aire totale.



MÉTHODE – M2 · PRENDRE LA PART D'UNE PART

- ▷ 1. Repérer les **deux tous** : celui de la phrase entière, et celui qu'ouvre le mot « *parmi* ».
- ▷ 2. Écrire les deux proportions en écriture décimale.
- ▷ 3. Les **multiplier** : le produit est la proportion cherchée, rapportée au tout de départ.
- ▷ 4. Conclure par une phrase qui nomme ce tout de départ.

Le mot *parmi* réactive l'inclusion du chapitre A1 : la seconde partie est incluse dans la première, qui est incluse dans le tout. Trois ensembles emboîtés, deux proportions, un produit.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Dans un lycée, 60 % des élèves pratiquent un sport ; parmi eux, 45 % le pratiquent en compétition. Quelle proportion des élèves du lycée sont des sportifs de compétition ?

Premier tout : les élèves du lycée, proportion 0,6. Le « *parmi eux* » ouvre le second tout, les sportifs, avec la proportion 0,45.

Produit : $0,6 \times 0,45 = 0,27$.

27 % des élèves du lycée font du sport en compétition.

Exemple – À vous · jumeau

Dans une médiathèque, 30 % des ouvrages sont des romans ; parmi eux, 20 % sont des romans policiers. Quelle proportion des ouvrages de la médiathèque les romans policiers représentent-ils ? Les deux touts sont repérés, les proportions valent 0,3 et 0,2. À vous le produit et la phrase.

Attention

Des pourcentages qui parlent de touts **différents** ne s'additionnent jamais. Que 55 % des filles et 45 % des garçons d'une classe soient externes ne fait pas 100 % d'externes : ces deux nombres n'ont pas le droit de s'ajouter, ils ne comptent pas sur le même tout.

1.3. Proportion ou évolution ? Les deux métiers du symbole

Voici le pivot du chapitre. Comparez ces deux phrases : « 20 % des élèves viennent à vélo » ; « le forfait téléphonique augmente de 20 % ». Même symbole, mais rien de commun. La première **photographie** : à un instant donné, elle compare une partie à un tout. La seconde **filme** : elle compare une valeur d'après à une valeur d'avant, un même objet à deux moments. Le premier métier s'appelle *proportion*, le second *évolution*, et le programme officiel exige de savoir lequel des deux une phrase exerce.

Exemple – Un même nombre, deux lectures

Une classe de 25 élèves compte 5 gauchers : la proportion de gauchers est $\frac{5}{25} = 20\%$. C'est une photographie ; personne n'a changé. Un abonnement à 25 euros augmente de 5 euros : le prix *évolue*, et cette évolution vaut $\frac{5}{25} = 20\%$ du prix de départ. C'est un film ; le paragraphe suivant lui donne ses instruments.

ÉCHO EXO

EXO-P1 · Ex. 4–5 ★★

L'arbre des deux touts, son chemin inverse, et le procès de l'addition des pourcentages. ■ ◆

Le piège des médias : un taux de chômage qui passe de 8 % à 10 % gagne 2 points de pourcentage, mais il augmente de 25 %. Les « points » se soustraient, les évolutions se rapportent à la valeur de départ.

2. MESURER UNE ÉVOLUTION

2.1. Du taux au coefficient

Une grandeur passe d'une valeur de départ V_1 , strictement positive, à une valeur d'arrivée V_2 . Trois nombres mesurent ce changement, du plus naïf au plus puissant.

JALON

Je sais retrouver partie, tout ou proportion ; prendre une part d'une part avec le mot « parmi » ; et dire si un pourcentage photographie ou filme.

OBJECTIFS

- ▷ Calculer et interpréter un taux d'évolution
- ▷ Traduire toute évolution en coefficient multiplicateur
- ▷ Circuler entre la phrase et le calcul

DÉFINITION – VARIATION ABSOLUE, TAUX D'ÉVOLUTION

Pour toute grandeur passant d'une valeur de départ V_1 strictement positive à une valeur d'arrivée V_2 :

la **variation absolue** est la différence $V_2 - V_1$;

la **variation relative**, ou **taux d'évolution**, est le quotient

$$t = \frac{V_2 - V_1}{V_1},$$

souvent lu en pourcentage. Il est positif pour une hausse, négatif pour une baisse.

← PRÉREQUIS

Ch. A2 · Ordre

Le § 1.4 comparait deux nombres par leur quotient et promettait un nom pour ce quotient : le voici.

Exemple – Une hausse, une baisse

Un loyer passe de 640 à 656 euros : variation absolue 16 euros, taux $t = \frac{16}{640} = 0,025$, soit une hausse de 2,5 %.

Une chaîne vidéo passe de 1 250 à 1 100 abonnés : variation absolue -150 , taux $t = \frac{-150}{1\,250} = -0,12$, soit une baisse de 12 %. Le signe fait partie du taux.

Le taux répond à la question « de combien, relativement au départ ? ». Mais l'activité vous a fait toucher un nombre plus efficace encore : celui qui, en une seule multiplication, fait tout le travail.

PROPRIÉTÉ – COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

Pour toute évolution d'une valeur de départ V_1 strictement positive vers une valeur d'arrivée V_2 , le **coefficient multiplicateur** est le quotient $CM = \frac{V_2}{V_1}$, et il est relié au taux d'évolution t par

$$CM = 1 + t.$$

Autrement dit : évoluer au taux t , c'est multiplier la valeur de départ par $1 + t$.

Pourquoi. La valeur d'arrivée est la valeur de départ plus la variation : $V_2 = V_1 + t \times V_1$. La factorisation du chapitre A1 donne $V_2 = (1 + t) \times V_1$: diviser par V_1 , strictement positif, livre la relation.



Entraînement : Cahier de calcul Seconde, fiche 53 (« Taux d'évolution »), et le bloc d'automatismes « additif ↔ multiplicatif » : c'est un geste d'épreuve sans calculatrice.

Le lexique s'apprend comme une langue étrangère, parce que c'en est une : la phrase française est additive, le calcul est multiplicatif. **Augmenter de 5 %, c'est multiplier par 1,05. Diminuer de 12 %, c'est multiplier**

par 0,88. Et le nombre 0,56 que l'activité vous a fait toucher du doigt a désormais un nom : c'est le coefficient multiplicateur d'une baisse de 44 %.

MÉTHODE – M3 · DE LA PHRASE AU COEFFICIENT, ET RETOUR

- ▷ 1. Écrire le taux en écriture décimale, avec son signe : hausse de 5,5 % donne $t = 0,055$; baisse de 15 % donne $t = -0,15$.
- ▷ 2. En déduire le coefficient : $CM = 1 + t$.
- ▷ 3. Multiplier la valeur de départ par ce coefficient (ou, si l'on part des deux valeurs, calculer $CM = V_2/V_1$).
- ▷ 4. Retraduire en phrase : un coefficient 0,85 se lit « baisse de 15 % ».

La langue dit « de plus », le calcul dit « fois » : les didacticiens y voient LA source des erreurs sur les pourcentages. En cas de doute, traduire toujours la phrase en coefficient.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

Un livre coûte 12 euros hors taxe ; la TVA sur le livre est de 5,5 %. Quel est son prix TTC ?

Le taux est une hausse de 5,5 % : $t = 0,055$, donc $CM = 1,055$.

Prix TTC : $12 \times 1,055 = 12,66$.

Le livre coûte 12,66 euros TTC.

Attention au piège symétrique : multiplier par 1,5, ce n'est pas augmenter de 150 % mais de 50 %. Le « 1 » du coefficient porte la valeur de départ, pas la hausse.

Lecture inverse. Un site de suivi des prix affiche pour un article un coefficient 0,93 sur l'année : l'article a baissé de 7 %, puisque $0,93 = 1 - 0,07$.

Exemple – À vous · deux jumeaux

(a) Une place de cinéma à 7,50 euros augmente de 4 %. Le taux et le coefficient sont écrits : $t = 0,04$, donc $CM = 1,04$. **À vous la multiplication et la phrase.**

(b) Une licence de club sportif passe de 75 euros à 69 euros. Rien n'est fait. **À vous le coefficient, le taux et la phrase.**

ÉCHO EXO

EXO-P1 · Ex. 6–8 ★★

Choisir sa mesure, débusquer un taux caché, compter en points de pourcentage.



JALON

Je sais calculer un taux d'évolution avec son signe, le convertir en coefficient multiplicateur, et lire un coefficient en phrase.

3. ENCHAÎNER ET REVENIR

3.1. Enchaîner : les coefficients se multiplient

L'activité s'est achevée sur une promesse : une règle d'une ligne, qui explique une fois pour toutes ce que deux évolutions successives font vraiment. La voici.

OBJECTIFS

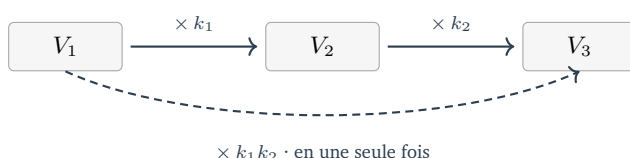
- ▷ Calculer un taux d'évolution global
- ▷ Calculer un taux d'évolution réciproque
- ▷ Ne plus jamais additionner des taux

PROPRIÉTÉ – ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES

Lorsqu'une grandeur subit une première évolution de coefficient k_1 puis une seconde de coefficient k_2 , l'évolution globale a pour coefficient le **produit** $k_1 \times k_2$. Le taux global s'en déduit par $t = k_1 \times k_2 - 1$: les coefficients se multiplient, **les taux ne s'additionnent pas**.

Pourquoi. Subir la première évolution, c'est multiplier par k_1 ; subir la seconde, c'est multiplier le résultat par k_2 . Au total, la valeur de départ a été multipliée par $k_1 \times k_2$.

La conjecture de l'activité se solde donc en une ligne : -30% puis -20% , c'est $0,7 \times 0,8 = 0,56$, une baisse de 44% et le client de la file ne pouvait pas espérer la moitié, parce que la seconde remise portait sur un prix déjà réduit. Son erreur n'était pas de calcul : il additionnait des taux là où le monde multiplie des coefficients.



MÉTHODE – M4 · CALCULER UN TAUX D'ÉVOLUTION GLOBAL

- ▷ 1. Traduire chaque évolution en coefficient multiplicateur.
- ▷ 2. Multiplier les coefficients, dans n'importe quel ordre.
- ▷ 3. Retraduire le coefficient global en taux : $t = CM - 1$.
- ▷ 4. Conclure par une phrase portant le sens (hausse ou baisse) et le référent.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée

La fréquentation d'un musée augmente de 25 % la première année, puis baisse de 12 % la seconde. Quelle est l'évolution sur les deux ans ?

Coefficients : 1,25 puis 0,88. Produit : $1,25 \times 0,88 = 1,10$.

Taux global : $1,10 - 1 = 0,10$.

Sur deux ans, la fréquentation a augmenté de 10 %.

La hausse de 25 % et la baisse de 12 % ne se « compensent » pas en +13 % : l'addition des taux est fautive dès la première ligne.

Exemple – À vous · jumeau

Une action gagne 40 % puis perd 25 %. Les coefficients sont écrits : 1,4 puis 0,75. À vous le produit, le taux global et la phrase.

ÉCHO EXO

EXO-P1 · Ex. 9-12 ★★

Enchaîner sans additionner, prouver que

l'ordre est indifférent, retrouver le maillon

manquant d'une chaîne. ■ ◆

L'aller-retour piège : +50 % puis
−50 % donne $1,5 \times 0,5 = 0,75$.
On ne revient pas au départ : on a
perdu un quart.

3.2. Revenir : l'évolution réciproque

Reste la question de l'ouverture : défaire une évolution. La commerçante connaît le prix *après* la TVA et veut le prix *d'avant*.

PROPRIÉTÉ – ÉVOLUTION RÉCIPROQUE

L'évolution qui ramène toute valeur d'arrivée à sa valeur de départ s'appelle l'évolution **réciproque**. Son coefficient est l'**inverse** du coefficient de l'évolution subie : défaire une évolution de coefficient k , c'est multiplier par $\frac{1}{k}$, c'est-à-dire diviser par k .

Pourquoi. Enchaîner l'évolution et sa réciproque doit tout laisser en place : le coefficient global doit valoir 1. Or $k \times \frac{1}{k} = 1$, et c'est le seul candidat · à condition que k ne soit pas nul, et c'est pourquoi une baisse de 100 %, de coefficient zéro, ne se défait pas.

MÉTHODE – M5 · DÉFAIRE UNE ÉVOLUTION

- ▷ 1. Écrire le coefficient de l'évolution *subie* : $CM = 1 + t$.
- ▷ 2. Le coefficient réciproque est son inverse : $\frac{1}{CM}$.
- ▷ 3. Diviser la valeur d'arrivée par CM (ce qui revient à multiplier par l'inverse).
- ▷ 4. Contrôler en refaisant l'évolution directe, et conclure.

Exemple – La méthode, entièrement déroulée · le ticket de 1954

Un article vaut 120 euros TTC, avec une TVA de 20 %. Quel est son prix hors taxe ?

L'évolution subie par le prix hors taxe est une hausse de 20 % : coefficient 1,2.

Défaire cette hausse, c'est diviser par 1,2 : $\frac{120}{1,2} = 100$.

Contrôle : $100 \times 1,2 = 120$.

Le prix hors taxe est 100 euros.

Et l'erreur de la commerçante s'explique enfin : en calculant « 120 moins 20 % », elle retranchait 20 % de 120, alors que la TVA avait été calculée sur 100. Mauvais référent, donc mauvais compte : les fameux 4 euros sont 20 % de la TVA elle-même, c'est-à-dire 20 % de l'écart entre les 120 euros TTC et les 100 euros hors taxe. Enlever 20 % ne défait pas ajouter 20 %.

ÉCHO EXO

EXO-P1 · Ex. 13–15 ★★

Le fact-checking, le dossier Insee sans étiquettes, et Venise 1494 en facultatif.



Le vrai taux qui défait +20 % :
le coefficient réciproque vaut
 $\frac{1}{1,2} \approx 0,833$, soit une baisse
d'environ 16,7 %. Jamais –20 %.

Exemple – À vous · jumeau

Après une hausse de 10 %, le litre de carburant coûte 1,87 euro. Combien coûtait-il avant ? Le coefficient subi est écrit : 1,1. À vous la division, le contrôle et la phrase.

LE TICKET ET L'ÉTIQUETTE

Revenons une dernière fois au ticket de Maurice Lauré. La commerçante de 1954 et le client de la file d'attente faisaient la même erreur, celle que ce chapitre démonte : traiter les pourcentages comme des quantités qui s'ajoutent et se retranchent. Ils ne le font jamais : une évolution est une multiplication déguisée, deux évolutions s'enchaînent par un produit, et l'on n'en défait une qu'en divisant. Quant aux proportions, elles s'emboîtent en se multipliant, et ne s'additionnent qu'à la stricte condition de compter sur le même tout.

Le symbole %, lui, continuera d'exercer ses deux métiers sans prévenir. À vous désormais de lui demander, à chaque rencontre : de quoi parles-tu, et est-ce une photographie ou un film ? C'est la question que posent les journalistes trop pressés pour la poser, et le compagnon numérique vous attend avec quelques titres de presse authentiques à disséquer, l'histoire de l'indice des prix que l'Insee tient depuis 1914, et les réponses des six jumeaux de ce cours.

JALON

Je sais enchaîner des évolutions en multipliant leurs coefficients, et en défaire une en divisant par le sien.

SUITE →

Ch. P3 · Croisement de variables

Les fréquences conditionnelles reprendront la part d'une part, dans des tableaux à double entrée nourris de données réelles.

Fin du chapitre

[ACT-P1] [EXO-P1]