Lycée Notre Dame de Boulogne
Activité de découverte

Le langage des droites

Prépare le chapitre : Équations de droites

Classe de Seconde
Mathématiques

« J'ai résolu de quitter seulement la Géométrie abstraite, c'est-à-dire la recherche des questions qui ne servent qu'à exercer l'esprit, et ce afin d'étudier une autre sorte de Géométrie, qui se propose pour questions l'explication des phénomènes de la nature. »

— René Descartes, *La Géométrie*, 1637

Comment aborder cette activité ?

Cette activité vous invite à **découvrir par vous-même** comment traduire une forme géométrique — une droite — en langage algébrique — une équation. Vous utiliserez pour cela un outil que vous connaissez bien : le **théorème de Thalès**.

Ce travail n'est pas noté. L'objectif est de vous préparer au cours qui suivra.

Les phases de l'exploration

▷ **Explorer** – Manipuler, calculer, observer.

◇ **Conjecturer** – Formuler une hypothèse à partir de vos observations.

✓ **Valider** – Tester votre conjecture, chercher des contre-exemples.

☐ **Formaliser** – Démontrer à l'aide du théorème de Thalès.

Objectif

À la fin de cette activité, vous saurez :

— Traduire une droite du plan par une **équation** reliant les coordonnées de ses points.

— Comprendre le rôle du **coefficient directeur** m et de l'**ordonnée à l'origine** p.

— Justifier cette équation à l'aide du **théorème de Thalès** dans le repère.

— Identifier le cas particulier des **droites verticales**.

Contexte historique

1637. René Descartes publie *La Géométrie*.

Avant Descartes, la géométrie et l'algèbre étaient deux disciplines séparées. Les Grecs anciens raisonnaient uniquement avec des figures ; les algébristes arabes manipulaient des équations sans représentation graphique.

L'idée révolutionnaire de Descartes : **associer à chaque point du plan un couple de nombres** (ses coordonnées) et à chaque courbe géométrique une **équation algébrique**. Ainsi naît la *géométrie analytique*, qui permet de démontrer des propriétés géométriques par le calcul.

Question fondatrice : Si je connais deux points d'une droite, puis-je décrire cette droite par une équation, c'est-à-dire une relation entre x et y vérifiée par tous ses points et uniquement par eux ?

Situation de départ

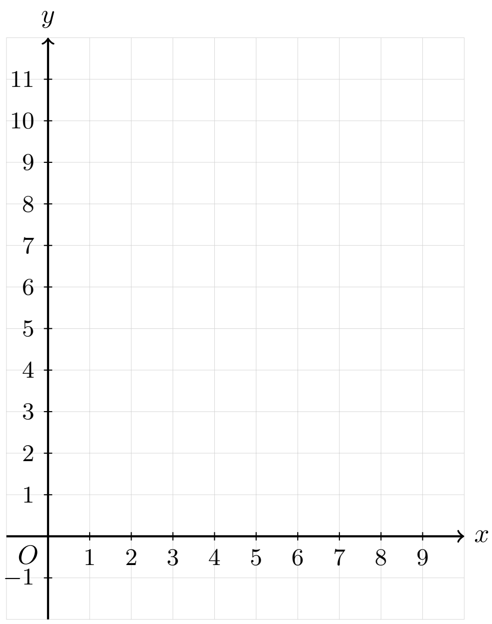
On travaille dans un repère orthonormé $(O\,;I,J)$. On considère les points $A(2\,;3)$ et $B(5\,;9)$.

On cherche à caractériser tous les points $M(x\,;y)$ de la droite (AB) par une relation entre x et y.

Phase 1 – ▷ Explorer — L'observation géométrique

Dans cette phase, vous allez construire des triangles rectangles dans le repère et observer une constante.

1. ▷ **Placer et tracer.**
   Sur le repère ci-dessous, placez les points $A(2\,;3)$ et $B(5\,;9)$, puis tracez la droite (AB).



2. ▷ **Le “pas de côté” : construire un triangle rectangle.**
   À partir de A et B, construisez le point P de coordonnées $(5\,;3)$, c'est-à-dire le point situé à la verticale de B et à l'horizontale de A.

Tracez le triangle APB sur votre figure. Ce triangle est-il rectangle ? En quel sommet ?

3. ▷ **Calculer les côtés du triangle.**

   (a) Calculez la longueur AP (déplacement horizontal) : $AP = x_B - x_A =$ ....

   (b) Calculez la longueur PB (déplacement vertical) : $PB = y_B - y_A =$ ....

   (c) Calculez le quotient $\dfrac{PB}{AP} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ ....

   Ce quotient mesure la « pente » de la droite : pour chaque pas horizontal de 1, de combien l'ordonnée augmente-t-elle ?

4. ▷ **Recommencer avec d'autres points.**
   Choisissez **3 autres points** M sur la droite (AB) (avec des coordonnées entières si possible). Pour chacun, construisez le triangle rectangle avec A comme sommet de référence, et calculez le quotient $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$.

Point	x_M	y_M	$y_M - 3$	$x_M - 2$	$\dfrac{y_M - 3}{x_M - 2}$
A	2	3	0	0	—
B	5	9			
M_1					
M_2					
M_3					

5. ▷ **Observation.**
   Examinez la dernière colonne. Que constatez-vous ?

Phase 2 – ◇ Conjecturer — De la constante à l'équation

Vous allez transformer votre observation en une équation.

6. ◇ D'après vos calculs, pour tout point $M(x\,;y)$ de la droite (AB), le quotient $\dfrac{y-3}{x-2}$ semble toujours égal à un même nombre.

   Notez cette constante : $\dfrac{y-3}{x-2} =$ ....

7. ◇ **Isoler y.**
En partant de l'égalité $\dfrac{y-3}{x-2} = \ldots$, isolez y en fonction de x.

   (a) Multipliez les deux membres par $(x-2)$:

   (b) Développez le membre de droite :

   (c) Ajoutez 3 des deux côtés pour isoler y :

8. ◇ Formulez votre conjecture :

Ma conjecture :

Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si ses coordonnées vérifient :

$$y =$$

Phase 3 – ✓ Valider — Tests et cas particuliers

Testez votre équation et explorez ses limites.

9. ✓ **Test avec un point de la droite.**
Le point $G(4\,;7)$ semble être sur la droite (AB) (vérifiez graphiquement).

   Ses coordonnées vérifient-elles votre équation ? Calculez :

10. ✓ **Test avec un point hors de la droite.**
Le point $H(4\,;5)$ n'est **pas** sur la droite (AB).

    Ses coordonnées vérifient-elles votre équation ? Calculez :

11. ✓ **Le point A lui-même.**
On ne peut pas calculer $\dfrac{y-3}{x-2}$ pour $A(2\,;3)$ (division par zéro !). Mais les coordonnées de A vérifient-elles votre équation $y = \ldots$? Calculez :

12. ✓ **L'ordonnée à l'origine.**
D'après votre équation, quel point de la droite a pour abscisse $x = 0$? Placez-le sur le repère et vérifiez graphiquement.

13. ✓ **Le cas limite : une droite verticale.**

Considérons maintenant la droite verticale passant par les points $C(3\,;1)$ et $D(3\,;7)$.

(a) Essayez de calculer le quotient $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$. Que se passe-t-il ?

(b) Peut-on écrire une équation de la forme $y = mx + p$ pour cette droite ?

(c) Quelle équation simple caractérise tous les points de cette droite ? ....

Phase 4 – ☐ **Formaliser** — La démonstration par Thalès

Vous allez démontrer votre conjecture à l'aide du théorème de Thalès.

14. ☐ **La construction.**

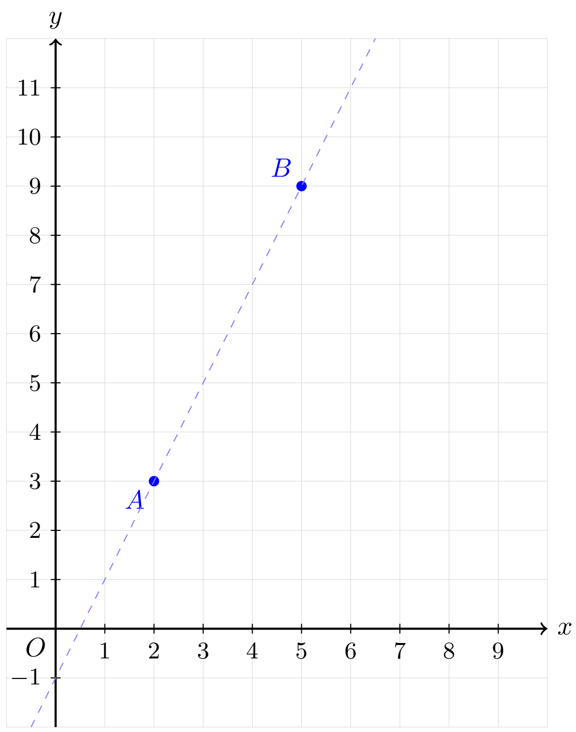
Soit $M(x\,;y)$ un point de la droite (AB) distinct de A, avec $x \neq 2$.

On considère les projetés :

— $P(5\,;3)$: projeté de B sur l'horizontale passant par A ;

— $Q(x\,;3)$: projeté de M sur l'horizontale passant par A.

Placez ces points sur la figure ci-dessous.



15. ☐ **Identifier les droites parallèles.**

(a) Les segments $[QM]$ et $[PB]$ sont tous deux .... (horizontaux / verticaux ?).

(b) En déduire que les droites (QM) et (PB) sont ....

16. □ **Appliquer le théorème de Thalès.**
Dans le triangle APB, la droite (QM) est parallèle à (PB) et coupe (AP) en Q et (AB) en M.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AM}{AB} = \frac{QM}{PB}$$

(a) Exprimez AQ en fonction de x : $AQ = x - 2$

(b) Exprimez QM en fonction de y : $QM =$ ....

(c) On sait que $AP = 3$ et $PB = 6$. Écrivez l'égalité de Thalès avec $\frac{AQ}{AP} = \frac{QM}{PB}$:

(d) Simplifiez pour retrouver $\frac{y-3}{x-2} = 2$.

(e) Isolez y : vous devez retrouver l'équation de votre conjecture.

17. □ **Interpréter les nombres de l'équation.**
Dans l'équation $y = mx + p$ que vous avez obtenue :

— Le nombre m s'appelle le **coefficient directeur**. D'après la construction de Thalès, il correspond au quotient $\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$. C'est la **pente** de la droite.

Quelle est la valeur de m pour notre droite ? $m =$ ....

— Le nombre p s'appelle l'**ordonnée à l'origine**. C'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées (quand $x = 0$).

Quelle est la valeur de p pour notre droite ? $p =$ ....

Bilan

Ce que j'ai découvert :

Résumez, avec vos propres mots, comment on passe d'une droite à une équation.

Ce qui me pose encore question :

Y a-t-il des points que vous n'avez pas compris ? Des questions que vous vous posez ?

Lien avec le cours

Cette activité prépare le chapitre sur : Équations de droites

En cours, nous démontrerons que :

- Toute droite **non verticale** admet une équation de la forme $\boxed{y = mx + p}$
- Le nombre m est le **coefficient directeur** (la pente de la droite)
- Le nombre p est l'**ordonnée à l'origine** (ordonnée du point d'intersection avec l'axe Oy)
- Toute droite **verticale** admet une équation de la forme $\boxed{x = k}$
- Réciproquement, toute équation $y = mx + p$ représente une droite

La conjecture que vous avez formulée et démontrée par Thalès sera **généralisée** en cours.

Pour aller plus loin — L'alignement de trois points

Défi (sans dessin) :

On donne trois points : $R(1\,;1)$, $S(3\,;5)$ et $T(7\,;12)$.

Sans faire de figure, déterminez si ces trois points sont alignés.

Indication : deux points suffisent pour déterminer l'équation d'une droite. Utilisez R et S pour trouver cette équation, puis vérifiez si T la satisfait.

Critère général : Proposez une méthode pour tester l'alignement de trois points $P_1(x_1\,;y_1)$, $P_2(x_2\,;y_2)$ et $P_3(x_3\,;y_3)$ quelconques, sans tracer de figure.

Fin de l'activité

La suite au prochain cours !