



« L'extension est l'espace, mais plus encore que l'espace, elle est la synthèse des positions en une forme de pensée géométrique. »

— Hermann Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, 1844

Comment aborder cette activité ?

Cette activité vous invite à **découvrir par vous-même** comment traduire des déplacements géométriques — les translations — en objets algébriques — les vecteurs. Vous utiliserez pour cela un outil simple : la **différence de coordonnées**.

Ce travail n'est pas noté. L'objectif est de vous préparer au cours qui suivra.

Les phases de l'exploration

- ▷ **Explorer** – Manipuler, calculer, observer.
- ◇ **Conjecturer** – Formuler une hypothèse à partir de vos observations.
- ✓ **Valider** – Tester votre conjecture, chercher des contre-exemples.
- **Formaliser** – Démontrer et établir des formules générales.

Objectif

À la fin de cette activité, vous saurez :

- Calculer les **coordonnées** d'un vecteur à partir de deux points.
- Tester l'**égalité** de deux vecteurs.
- **Additionner** deux vecteurs et calculer un **produit par un scalaire**.
- Calculer les coordonnées du **milieu** d'un segment à l'aide des vecteurs.

Contexte historique

1844. Hermann Grassmann publie *Die lineale Ausdehnungslehre*.

Avant Grassmann, les mathématiciens manipulaient des points, des segments, des angles. Mais il manquait un concept unificateur pour décrire les **déplacements** eux-mêmes comme des objets mathématiques à part entière.

L'idée révolutionnaire de Grassmann : **formaliser le déplacement d'un point A vers un point B comme un objet indépendant**, un « vecteur », qui peut être représenté par un couple de nombres (ses **coordonnées**), et qui obéit à des règles de calcul (addition, multiplication par un nombre).

Question fondatrice : Si je me déplace de A vers B , puis de B vers C , le résultat est-il le même que si je me déplace directement de A vers C ? Comment traduire cela en termes de calcul ?

Situation de départ

On travaille dans un repère orthonormé $(O; I, J)$. On considère les points $A(1; 2)$ et $B(4; 5)$.

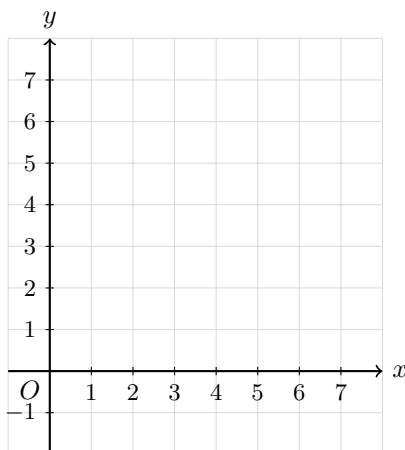
On cherche à caractériser le **déplacement** (la translation) qui fait passer de A à B , et à comprendre comment ce déplacement peut s'appliquer à d'autres points.

Phase 1 – **Explorer** — Observer les translations

Dans cette phase, vous allez observer comment un même déplacement peut s'appliquer à différents points.

1. **Placer et calculer les variations.**

Sur le repère ci-dessous, placez les points $A(1; 2)$ et $B(4; 5)$.



Calculez les variations de coordonnées :

— $\Delta x = x_B - x_A = \dots\dots\dots$

— $\Delta y = y_B - y_A = \dots\dots\dots$

Ces deux nombres décrivent le déplacement : “aller 3 cases vers la droite et 3 cases vers le haut”.

2. ▷ **Appliquer le même déplacement à d'autres points.**

Considérons maintenant les points $C(0; 1)$, $D(3; 0)$ et $E(2; 4)$.

Pour chaque point, **appliquez le même déplacement** (“+3 en x , +3 en y ”) pour obtenir un nouveau point :

— Point C' image de C : $C'(0 + 3; 1 + 3) = C'(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$

— Point D' image de D : $D'(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$

— Point E' image de E : $E'(\dots\dots\dots; \dots\dots\dots)$

3. ▷ **Tableau récapitulatif.**

Pour chaque paire de points (M, M') , calculez les variations $x_{M'} - x_M$ et $y_{M'} - y_M$:

Paire	x_M	y_M	$x_{M'} - x_M$	$y_{M'} - y_M$
$A \rightarrow B$	1	2		
$C \rightarrow C'$	0	1		
$D \rightarrow D'$	3	0		
$E \rightarrow E'$	2	4		

4. ▷ **Observation.**

Examinez les deux dernières colonnes. Que constatez-vous ?

Phase 2 – ◊ **Conjecturer** — Égalité de vecteurs

Vous allez introduire la notion de vecteur et formuler un critère d'égalité.

5. ◊ **Introduction de la notation vectorielle.**

Le couple de nombres $(3; 3)$ que vous avez trouvé s'appelle le **vecteur** \overrightarrow{AB} .

On le note en colonne : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le premier nombre est la **coordonnée en x** du vecteur, le second est la **coordonnée en y** .

6. ◊ **Formuler une conjecture sur l'égalité des vecteurs.**

D'après vos observations, complétez :

Ma conjecture :

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si

.....

7. **◇ Vérification.**

Calculez les vecteurs suivants :

— $\overrightarrow{CC'}$ ($\begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix}$) Calcul : ()

— $\overrightarrow{DD'}$ =

— $\overrightarrow{EE'}$ =

Ces vecteurs sont-ils égaux à \overrightarrow{AB} ? Votre conjecture est-elle vérifiée?

Phase 3 – **✓ Valider** — Opérations sur les vecteurs

Testez les opérations d'addition et de multiplication par un nombre.

8. **✓ Somme de vecteurs.**

Le point C' a pour coordonnées celles que vous avez calculées. Calculez maintenant :

— Les coordonnées de $\overrightarrow{BC'}$ sont : $\begin{pmatrix} x_{C'} - x_B \\ y_{C'} - y_B \end{pmatrix}$

— En allant de A à B , puis de B à C' , on va finalement de A à C' . Calculez directement :

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC'}$ sont : $\begin{pmatrix} x_{C'} - x_A \\ y_{C'} - y_A \end{pmatrix}$

— Calculez maintenant la somme des coordonnées : $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (\quad) = \begin{pmatrix} 3+\dots \\ 3+\dots \end{pmatrix} = \dots$

— Que constatez-vous en comparant $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}$?

9. **✓ Produit par un scalaire.**

Si on applique **deux fois** le déplacement de A vers B à partir de A , on obtient un nouveau point.

— On sait que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculez les coordonnées de $2 \cdot \overrightarrow{AB}$: $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 \\ 2 \times 3 \end{pmatrix} = \dots$

— À quelles coordonnées arrive-t-on en partant de $A(1; 2)$ et en se déplaçant selon $2 \cdot \overrightarrow{AB}$?

Point d'arrivée : (..... ;)

10. ✓ **Le vecteur nul.**

Quel est le déplacement qui fait passer de A à A lui-même ?

Calculez les coordonnées de \overrightarrow{AA} : $\begin{pmatrix} x_A - x_A \\ y_A - y_A \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

Ce vecteur s'appelle le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

11. ✓ **Le vecteur opposé.**

Le déplacement de B vers A est « l'inverse » du déplacement de A vers B .

Calculez les coordonnées de \overrightarrow{BA} : $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

Quelle relation observez-vous entre \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{AB} ?

On note : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

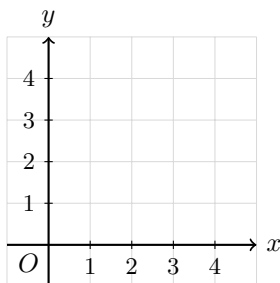
Phase 4 – □ **Formaliser** — Milieu d'un segment

Vous allez établir la formule du milieu à l'aide des vecteurs.

12. □ **Commutativité visuelle.**

Sur le repère ci-dessous, partez du point $O(0;0)$ et effectuez :

- un déplacement de +3 en x , puis +3 en y : vous arrivez au point P_1 .
- un déplacement de +3 en y , puis +3 en x : vous arrivez au point P_2 .



Que constatez-vous ? Les deux chemins mènent-ils au même point ?

*Cela illustre que l'addition vectorielle est **commutative**.*

13. □ **Déterminer le milieu.**

On cherche le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, avec $A(1;2)$ et $B(4;5)$.

Soit $M(x; y)$. Exprimez les deux vecteurs :

- $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 4-x \\ 5-y \end{pmatrix}$

Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors leurs coordonnées sont égales :

$$x - 1 = 4 - x$$

$$y - 2 = 5 - y$$

Résolvez ces équations :

Vous devez trouver : $M(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$

14. **Formule générale du milieu.**

En observant les résultats, déduisez la formule générale :

Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

15. **Vérification.**

Vérifiez cette formule avec deux autres paires de points :

— $G(2; 1)$ et $H(6; 7)$: milieu =

— $K(-1; 3)$ et $L(5; -1)$: milieu =

16. **Interpréter la nature d'un vecteur.**

Attention : Le couple de nombres $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ n'est **pas** un point.

— Un **point** $A(x; y)$ désigne une **position** dans le plan.

— Un **vecteur** $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un **déplacement**.

Le même déplacement peut s'appliquer à partir de n'importe quel point de départ.

Bilan

Ce que j'ai découvert :

Résumez, avec vos propres mots, ce qu'est un vecteur et comment on calcule avec.

Ce qui me pose encore question :

Y a-t-il des points que vous n'avez pas compris ? Des questions que vous vous posez ?

Lien avec le cours

Cette activité prépare le chapitre sur : Vecteurs (approche analytique)

En cours, nous formaliserons :

- La notion de **coordonnées d'un vecteur** : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Le critère d'**égalité** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff$ mêmes coordonnées
- La **somme de vecteurs** (relation de Chasles) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Le **produit par un scalaire** : $k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
- La formule du **milieu** : $M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$
- Le critère de **colinéarité** : \vec{u} et \vec{v} colinéaires $\iff xy' - x'y = 0$

Les observations et calculs que vous avez effectués seront **généralisés** en cours.

Pour aller plus loin — L'alignement de trois points

Défi : tester l'alignement avec les vecteurs

On donne trois points : $R(1; 1)$, $S(3; 5)$ et $T(7; 13)$.

Sans faire de figure, déterminez si ces trois points sont alignés.

*Indication : deux vecteurs issus du même point et dirigés vers deux autres points sont **colinéaires** (portés par la même droite) si et seulement si l'un est un multiple de l'autre.*

Méthode :

1. Calculez les coordonnées de \overrightarrow{RS} : $\begin{pmatrix} x_S - x_R \\ y_S - y_R \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

2. Calculez les coordonnées de \overrightarrow{RT} : $\begin{pmatrix} x_T - x_R \\ y_T - y_R \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

3. Pour tester si \overrightarrow{RS} et \overrightarrow{RT} sont colinéaires, calculez le produit croisé :

Si $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$xy' - x'y =$$

4. Si ce produit vaut **zéro**, les vecteurs sont colinéaires et les points sont alignés. Sinon, ils ne le sont pas.

Conclusion : Les points R , S et T sont-ils alignés?

Fin de l'activité

La suite au prochain cours!