G1. ÉQUATIONS DE DROITES

Syntaxe de la Droite — de Descartes au calcul analytique

TABLE DES MATIÈRES

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** — Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

♦ **Approfondissement** — Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** — Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

Documents associés : [ACT-G1] Le langage des droites • [EXO-G1] La Gamme • [DM-G1] La Droite Juste • [EVAL-G1] Synthèse

Compagnon numérique du chapitre

Quiz • Vidéos • Flashcards

« J'ai résolu de quitter seulement la Géométrie abstraite [. . .] afin d'étudier une autre sorte de Géométrie, qui se propose pour questions l'explication des phénomènes de la nature. »

— René Descartes, La Géométrie, 1637

En 1637, René Descartes propose une idée révolutionnaire : **toute courbe du plan est un ensemble de points $M(x\,;y)$ dont les coordonnées vérifient une certaine relation $f(x, y) = 0$.** Réciproquement, toute relation entre x et y définit une courbe.
Ce chapitre explore la plus simple de ces courbes : **la droite**. Quelles équations la décrivent ? Quelle information portent-elles ? Comment exploiter ces équations pour étudier les positions relatives de deux droites ?

PORTAIL ACT

ACT-G1 · Phases 1–4 ★★

Découverte de l'équation $y = mx + p$ par Thalès. ■

Descartes n'utilisait pas encore les notations modernes. C'est Euler (1748) qui systématise l'écriture $y = f(x)$.

— Descartes, 1637

1. L'équation réduite : $y = mx + p$

1.1. Définition et unicité

On travaille dans un repère orthonormé $(O\,; I, J)$ du plan.

Définition – Équation réduite d'une droite

Soit d une droite **non verticale** du plan. Il existe un unique couple de réels (m, p) tel que :

$$M(x\,;y) \in d \iff y = mx + p$$

On dit que $y = mx + p$ est l'**équation réduite** de d.
Le réel m est le **coefficient directeur** (ou **pente**) de d.
Le réel p est l'**ordonnée à l'origine** de d.

OBJECTIFS

- ▷ Définir l'équation réduite
- ▷ Interpréter m et p
- ▷ Déterminer m et p à partir de deux points

⟵ **PRÉREQUIS**

Fonctions affines

$f(x) = ax + b$: représentation graphique.

Propriété – Unicité

Par deux points distincts $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ avec $x_A \neq x_B$, il passe une et une seule droite non verticale, dont l'équation réduite est $y = mx + p$ avec :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p = y_A - m \cdot x_A}$$

Coefficient directeur : *Du latin* dirigere, *diriger : m indique la* direction *de la droite.*

Démonstration (unicité de m et p).

Supposons que $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ appartiennent à la droite $d : y = mx + p$. Alors :

$$y_A = mx_A + p \qquad \text{et} \qquad y_B = mx_B + p$$

En soustrayant membre à membre : $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$. Puisque $x_A \neq x_B$, on peut diviser par $(x_B - x_A)$, ce qui donne :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Cette expression ne dépend que des coordonnées de A et B : le coefficient *directeur m est donc **uniquement déterminé**. En substituant dans $y_A = mx_A + p$, on obtient $p = y_A - mx_A$, qui est lui aussi uniquement déterminé. D'où l'unicité du couple (m, p).* ■

ÉCHO EXO

EXO-G1 · Ex. 2–3 ★★

Droite par deux points et tests d'appartenance.

1.2. Interprétation graphique de m : les marches d'escalier

MÉTHODE – LIRE m GRAPHIQUEMENT

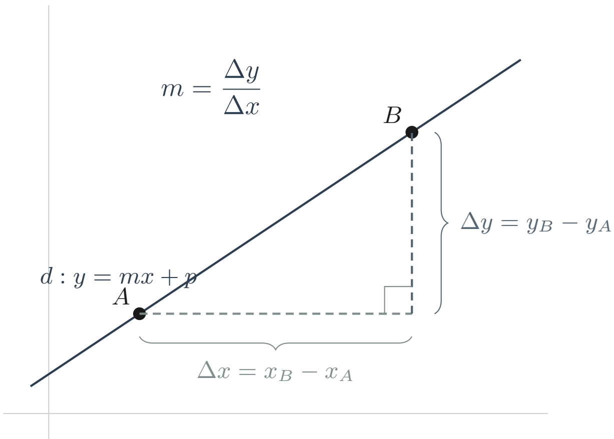
Le coefficient directeur m se lit par la méthode des **accroissements** (ou « marches d'escalier ») :

▷ **1.** Choisir un point A de la droite.

▷ **2.** Se déplacer de 1 unité vers la droite (pas horizontal).

▷ **3.** Lire le déplacement vertical correspondant : c'est m.

Si $m > 0$, la droite est *croissante* (de gauche à droite). Si $m < 0$, elle est *décroissante*. Si $m = 0$, la droite est horizontale.



Plus $|m|$ est grand, plus la droite est « raide ». Plus $|m|$ est petit, plus la droite est « plate ».

Exemple – Reprise de l'activité

Pour la droite passant par $A(2\,;3)$ et $B(5\,;9)$:

$$m = \frac{9-3}{5-2} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \text{et} \qquad p = 3 - 2 \times 2 = -1$$

L'équation réduite est $\boxed{y = 2x - 1}$. Pour chaque pas de 1 vers la droite, l'ordonnée augmente de 2.

1.3. Interprétation graphique de p

DÉFINITION – ORDONNÉE À L'ORIGINE

Le nombre p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. C'est la valeur y quand $x = 0$.

ÉCHO EXO

EXO-G1 · Ex. 1 ★

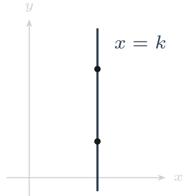
Lecture graphique de m et p.

1.4. Le cas des droites verticales

Attention

Une droite **verticale** ne peut pas s'écrire sous la forme $y = mx + p$. En effet, pour une valeur de x, il existe une infinité de valeurs de y : ce n'est pas une fonction.

L'équation d'une droite verticale est de la forme $\boxed{x = k}$, où k est l'abscisse commune à tous ses points.



pas de pente

Exemple

La droite verticale passant par $C(3\,;1)$ et $D(3\,;7)$ a pour équation $x = 3$. Le quotient $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{6}{0}$ n'est pas défini : il n'y a pas de coefficient directeur.

2. L'ÉQUATION CARTÉSIENNE : $ax + by + c = 0$

2.1. Une écriture universelle

OBJECTIFS

▷ Connaître la forme universelle
▷ Passer d'une forme à l'autre

DÉFINITION – ÉQUATION CARTÉSIENNE

Toute droite du plan admet une équation de la forme :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

où a, b, c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
On dit que $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne** de la droite.

*Contrairement à l'équation réduite, l'équation cartésienne décrit **toutes** les droites du plan, y compris les droites verticales.*

PROPRIÉTÉ – UNIVERSALITÉ

— Si $b \neq 0$: droite non verticale, de pente $m = -\dfrac{a}{b}$ et d'ordonnée à l'origine $p = -\dfrac{c}{b}$.

— Si $b = 0$: droite verticale d'équation $x = -\dfrac{c}{a}$.

2.2. Passage d'une forme à l'autre

MÉTHODE – CONVERSIONS

▷ **1. Réduite $\rightarrow$ cartésienne :** $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$.
On pose $a = m$, $b = -1$, $c = p$.

▷ **2. Cartésienne → réduite** (si $b \neq 0$) : isoler y dans $ax+by+c=0$:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

▷ **3. Droite verticale :** $ax+c=0$ (avec $b=0$) donne $x = -\frac{c}{a}$.

ÉCHO EXO
EXO-G1 · Ex. 2 ★★
Passages entre formes réduite et cartésienne.

Exemple

— $y = 3x - 2 \iff 3x - y - 2 = 0$ (forme cartésienne)
— $2x + 5y - 10 = 0 \iff y = -\frac{2}{5}x + 2$ (forme réduite, car $b = 5 \neq 0$)
— $2x - 8 = 0 \iff x = 4$ (droite verticale, pas de forme réduite)

JALON
Je sais passer d'une forme à l'autre et identifier les droites verticales.

3. Positions relatives de deux droites

3.1. Parallélisme et intersection

OBJECTIFS
▷ Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes
▷ Calculer le point d'intersection
▷ Résoudre un système 2×2

Propriété – Critère de parallélisme

Deux droites non verticales $d_1 : y = m_1x + p_1$ et $d_2 : y = m_2x + p_2$ sont :

— **parallèles** (ou confondues) $\iff m_1 = m_2$;
— **sécantes** $\iff m_1 \neq m_2$.

Si $m_1 = m_2$ et $p_1 = p_2$, les droites sont **confondues**. Si $m_1 = m_2$ et $p_1 \neq p_2$, elles sont **strictement parallèles**.

Démonstration (critère de sécance).

Si $m_1 \neq m_2$, montrons que d_1 et d_2 ont exactement un point commun. Résolvons le système $m_1x + p_1 = m_2x + p_2$, soit $(m_1 - m_2)x = p_2 - p_1$. Comme $m_1 \neq m_2$, on peut diviser par $(m_1 - m_2)$:

$$x = \frac{p_2 - p_1}{m_1 - m_2}$$

*Cette valeur de x est **unique**. On en déduit $y = m_1x + p_1$, lui aussi unique. Les deux droites ont donc **exactement un point d'intersection** : elles sont sécantes.* ■

ÉCHO EXO
EXO-G1 · Ex. 5 ★★★
Sommets d'un triangle défini par trois droites.

3.2. Déterminer le point d'intersection

Méthode – Intersection de deux droites sécantes

Pour trouver le point d'intersection de $d_1 : y = m_1x + p_1$ et $d_2 : y = m_2x + p_2$ (avec $m_1 \neq m_2$), on résout le système :

$$\begin{cases} y = m_1x + p_1 \\ y = m_2x + p_2 \end{cases}$$

En égalant : $m_1x + p_1 = m_2x + p_2$, d'où $x = \dfrac{p_2 - p_1}{m_1 - m_2}$, puis $y = m_1x + p_1$.

Exemple

Intersection de $d_1 : y = 2x + 1$ et $d_2 : y = -x + 7$:

$$2x + 1 = -x + 7 \iff 3x = 6 \iff x = 2 \quad \text{puis} \quad y = 2(2) + 1 = 5$$

Le point d'intersection est $\boxed{A(2\,;5)}$.

3.3. Approfondissement : le critère de pente

◆★ *Cette section est optionnelle. Elle introduit un outil puissant pour étudier le parallélisme sans passer par l'équation réduite.*

Propriété – Critère de colinéarité des directions

Soient $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ définissant une direction, et $C(x_C\,;y_C)$, $D(x_D\,;y_D)$ une autre.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si :

$$\boxed{(x_B - x_A)(y_D - y_C) - (y_B - y_A)(x_D - x_C) = 0}$$

Remarque

Ce critère fonctionne même pour les droites verticales, contrairement à la comparaison des pentes. C'est sa force : il est **universel**.

VISA EVAL
EVAL-G1 · Ex. 2 ★★★
Droite d'Euler : intersection de hauteurs.
■◆

CIBLE DA
DM-G1 · Partie II ★★★
Régression linéaire : la meilleure droite.
◆

JALON
Je sais déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes, et calculer leur intersection.

ÉCHO EXO
EXO-G1 · Ex. 6–7 ★★★★
Théorème de Varignon et familles de droites. ◆★

Mémento

Formulaire

Droite non verticale : $y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $p = y_A - m \cdot x_A$

Droite verticale : $x = k$

Forme cartésienne : $ax + by + c = 0$ (universelle)

Conversion : Si $b \neq 0$: $m = -\frac{a}{b}$, $p = -\frac{c}{b}$. Si $b = 0$: droite verticale.

Parallélisme : $d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$

Intersection : Résoudre $m_1 x + p_1 = m_2 x + p_2$

Attention

Une droite verticale n'a **pas** de coefficient directeur et ne peut **pas** s'écrire $y = mx + p$.