Lycée Notre Dame de Boulogne
DM facultatif

L'Algèbre des Directions
Une multiplication impossible ?

Classe de Seconde
Mathématiques

« Dieu créa les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. »
— Leopold Kronecker (1823–1891)

Avant de commencer : à propos de ce document

Ce devoir maison n'est pas une évaluation ordinaire. C'est une **invitation au voyage** dans un territoire mathématique que vous n'avez peut-être jamais exploré.

Quelques principes importants :

— **Ce DM est facultatif.** Tout travail rendu sera valorisé par la note maximale. Ce qui compte, c'est **l'effort authentique et la curiosité**, pas le fait d'avoir tout terminé. Un travail bâclé ne sera pas valorisé ; un travail sincère, même partiel, le sera toujours.

— **Ce document vous accompagnera peut-être plusieurs années.** Certaines questions qui vous semblent inaccessibles aujourd'hui deviendront limpides après quelques mois d'études supplémentaires. Gardez-le : vous pourrez y revenir en Première, en Terminale, ou simplement quand l'envie vous prendra.

— **Un horizon raisonnable : 3-4 semaines.** Il n'y a pas de date limite stricte, mais visez cet horizon. Si vous avez besoin de plus de temps, parlez-en.

— **Si vous bloquez, écrivez.** Expliquez ce que vous avez essayé, où vous êtes bloqué, ce que vous pensez qu'il faudrait faire. C'est aussi du travail mathématique, et souvent le plus formateur.

Niveaux de difficulté

Les questions sont organisées en trois niveaux, comme les étapes d'une ascension :

△ **Niveau I : Fondations**
Calculs et vérifications. Accessible à tous avec les outils du cours.

▲ **Niveau II : Construction**
Compréhension des mécanismes. Demande un peu de recul et d'autonomie.

♦ **Niveau III : Sommet**
Démonstrations rigoureuses et questions ouvertes. Un défi stimulant pour les plus motivés, ou une invitation pour plus tard.

Conseil : Faites toutes les questions △ d'une partie avant de passer aux ▲. Les ♦ sont des défis : ne vous découragez pas si vous n'y arrivez pas cette année.

Prologue : Quand les vecteurs ne suffisent plus

16 octobre 1843. Dublin, Irlande. Un éclair de génie.

Le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton se promène le long du Royal Canal avec sa femme. Depuis des années, il cherche à résoudre un problème qui l'obsède : *comment définir une multiplication entre vecteurs ?*

On sait additionner deux vecteurs (c'est la translation). On sait multiplier un vecteur par un nombre réel (c'est la dilatation). Mais peut-on **multiplier deux vecteurs entre eux** pour obtenir un nouveau vecteur, comme on multiplie deux nombres ?

La difficulté est que cette opération devrait respecter les règles familières de l'algèbre : commutativité ($a \times b = b \times a$), distributivité, existence d'un élément neutre...

Ce 16 octobre, Hamilton trouve enfin la réponse, non pas en dimension 2, mais en dimension 4, avec les **quaternions**. L'émotion est si forte qu'il grave sa formule sur le Pont de Brougham : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

L'objectif de ce document est plus modeste, mais tout aussi surprenant. En nous limitant au plan (dimension 2), nous allons **inventer** une multiplication entre vecteurs. Nous découvrirons qu'elle possède une propriété extraordinaire : le **carré** d'un certain vecteur donne -1. Cette construction, que vous allez bâtir de vos propres mains, porte un nom célèbre que nous révélerons à la fin.

1. Partie I : Fondations, une base pour calculer

Nous posons le cadre : rappels sur les vecteurs, vecteurs de base et nouvelle notation.

Exercice 1: Premiers calculs vectoriels | ★

△ **Q1.** Soient $A(1\,;3)$, $B(4\,;1)$ et $C(-2\,;5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

△ **Q2.** Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Justifier en calculant $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & 6\\-2 & -4\end{vmatrix} = 3 \times (-4) - (-2) \times 6 = -12 + 12 = 0$.

△ **Q3.** Rappeler les coordonnées des deux vecteurs de base du repère orthonormé :

— $\vec{i}$: le vecteur unitaire horizontal. Ses coordonnées sont $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

— $\vec{j}$: le vecteur unitaire vertical. Ses coordonnées sont $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Vérifier que tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ s'écrit comme combinaison linéaire : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exercice 2: Renommer les acteurs | ★★

Dans la suite de ce document, nous allons donner de **nouveaux noms** aux vecteurs de base, mieux adaptés à notre objectif.

Exercice 2: Renommer les acteurs | ★★

Convention fondamentale

Pour la suite de ce document, nous renommons les vecteurs de base :

— Le vecteur $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sera noté $\mathbf{1}$ (le **vecteur-unité**).

— Le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sera noté $\mathbf{J}$ (le vecteur « **quart de tour** »).

Tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ s'écrit alors :

$$\vec{u} = x \cdot \mathbf{1} + y \cdot \mathbf{J}$$

△ **Q4.** Écrire les vecteurs suivants sous la forme $a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{J}$:

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$
3. $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$
4. $\mathbf{1}$ lui-même, puis $\mathbf{J}$ lui-même.

▲ **Q5.** Dans la multiplication des nombres réels, le nombre 1 est l'**élément neutre** : $1 \times a = a$ pour tout réel a.

1. Vérifier que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (ici, 1 est le réel).
2. Expliquer pourquoi il est naturel d'appeler $\mathbf{1}$ le « vecteur-unité » : il correspond au nombre 1 dans la décomposition $\vec{u} = x \cdot \mathbf{1} + y \cdot \mathbf{J}$.

2. Partie II : Construction, l'opération ★

Nous définissons une nouvelle opération entre vecteurs et vérifions qu'elle respecte les règles de l'algèbre.

Définition : l'opération ★ (produit étoile)

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On définit leur **produit étoile** comme le vecteur :

$$\vec{u} \bigstar \vec{v} = \begin{pmatrix}xx' - yy'\\xy' + yx'\end{pmatrix}$$

Cette formule associe à deux vecteurs un *nouveau vecteur*.

Remarque : Cette formule peut sembler « tombée du ciel ». Patience, à la fin de la Partie II, vous comprendrez d'où elle vient !

Exercice 3: Premiers produits ★ | ★★★

▲ **Q6.** Calculer les produits suivants en appliquant la définition.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Indication : ici $x = 2$, $y = 1$, $x' = 3$, $y' = -1$. Donc $xx' - yy' = \dots$ et $xy' + yx' = \dots$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire $\mathbf{1} \bigstar \vec{v}$). Que constate-t-on ?

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire $\vec{u} \bigstar \mathbf{1}$). Même question.

▲ **Q7. Commutativité.**
L'opération ★ est-elle **commutative** ? Autrement dit, a-t-on $\vec{u} \bigstar \vec{v} = \vec{v} \bigstar \vec{u}$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
Démontrer que oui, en calculant les deux membres pour $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

▲ **Q8. Distributivité.**
L'opération ★ est-elle **distributive** sur l'addition ? Autrement dit, a-t-on :

$$\vec{u} \bigstar (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bigstar \vec{v} + \vec{u} \bigstar \vec{w}$$

Démontrer cette propriété pour $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$.
Indication : calculer séparément le membre de gauche et le membre de droite, puis comparer.

Bilan : propriétés de l'opération ★

1. **Élément neutre :** $\mathbf{1} \bigstar \vec{u} = \vec{u} \bigstar \mathbf{1} = \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$.
2. **Commutativité :** $\vec{u} \bigstar \vec{v} = \vec{v} \bigstar \vec{u}$ pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$.
3. **Distributivité :** $\vec{u} \bigstar (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bigstar \vec{v} + \vec{u} \bigstar \vec{w}$.

L'opération ★ se comporte donc comme une **multiplication** !
*Remarque : on peut aussi vérifier que ★ est **associative** ($(\vec{u} \bigstar \vec{v}) \bigstar \vec{w} = \vec{u} \bigstar (\vec{v} \bigstar \vec{w})$), mais le calcul est long. Nous l'admettrons.*

Exercice 4: Le carré de J | ★★★★

C'est le moment clé de tout le document.

▲ **Q9.** Calculer $\mathbf{J} \bigstar \mathbf{J}$ en utilisant la définition, avec $\mathbf{J} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Indication : ici $x = 0$, $y = 1$, $x' = 0$, $y' = 1$.

Le résultat fondamental

$$\boxed{\mathbf{J} \bigstar \mathbf{J} = -\mathbf{1}}$$

Le « carré » du vecteur $\mathbf{J}$ pour l'opération $\bigstar$ donne $-\mathbf{1}$, c'est-à-dire le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **opposé** du vecteur-unité.
Autrement dit, il existe un vecteur dont le carré est négatif !

Exercice 5: D'où vient la formule ? | $\bigstar\bigstar\bigstar\bigstar$

▲ **Q10.** Retrouver la formule de $\bigstar$.
En utilisant les propriétés établies (distributivité, commutativité) et le résultat $\mathbf{J} \bigstar \mathbf{J} = -\mathbf{1}$, développer le produit :

$$(a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{J}) \bigstar (c \cdot \mathbf{1} + d \cdot \mathbf{J})$$

Indication : développer comme un produit algébrique $(a+b)(c+d)$, en remplaçant la multiplication par $\bigstar$ et en utilisant $\mathbf{J} \bigstar \mathbf{J} = -\mathbf{1}$.

Vérifier que l'on retrouve bien un vecteur dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$, c'est-à-dire la formule de définition.

♦ **Q11. L'inverse.**
On cherche le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} \bigstar \vec{v} = \mathbf{1}$, où $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur **non nul** ($x^2 + y^2 \neq 0$).

1. Écrire le système de deux équations à deux inconnues (x' et y') que l'on obtient en développant $\vec{u} \bigstar \vec{v} = \mathbf{1}$.
2. Résoudre ce système.

   Indication : le système est $\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases}$. *Multiplier la première équation par x, la seconde par y, puis additionner.*
3. En déduire que l'inverse de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour $\bigstar$ est le vecteur :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

4. Vérifier sur l'exemple $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Partie III : Sommet, la géométrie cachée

L'opération $\bigstar$ a des propriétés algébriques remarquables. Mais que fait-elle ***géométriquement*** *?*

Rappel : norme d'un vecteur

La **norme** (ou longueur) du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 6: Norme et produit ★ | ★★★★★

♦ **Q12. La norme est multiplicative.**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. Écrire les coordonnées du vecteur $\vec{u} \bigstar \vec{v}$.
2. Calculer $\|\vec{u} \bigstar \vec{v}\|^2$, c'est-à-dire la somme des carrés des deux coordonnées.
3. Développer $(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$ et montrer que :

$$\|\vec{u} \bigstar \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$$

4. En déduire que $\|\vec{u} \bigstar \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

   *Remarque : cette identité s'appelle l'**identité de Brahmagupta–Fibonacci**. Elle est connue depuis le VII^{e} siècle !*

Exercice 7: Multiplier par J : une rotation ! | ★★★★★

♦ **Q13.** On considère un vecteur quelconque $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on calcule $\mathbf{J} \bigstar \vec{v}$.

1. Calculer les coordonnées de $\mathbf{J} \bigstar \vec{v}$ en appliquant la définition avec $\mathbf{J}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\|\mathbf{J} \bigstar \vec{v}\| = \|\vec{v}\|$. Que signifie cette égalité géométriquement ?
3. Calculer le **produit scalaire** $\vec{v} \cdot (\mathbf{J} \bigstar \vec{v})$.

   Rappel admis : le produit scalaire de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ vaut $ac + bd$. Deux vecteurs sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.
4. Que peut-on en conclure sur l'angle entre $\vec{v}$ et $\mathbf{J} \bigstar \vec{v}$?
5. **Conclusion :** multiplier un vecteur par **J** au sens de ★ revient à effectuer une **rotation de 90°** dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

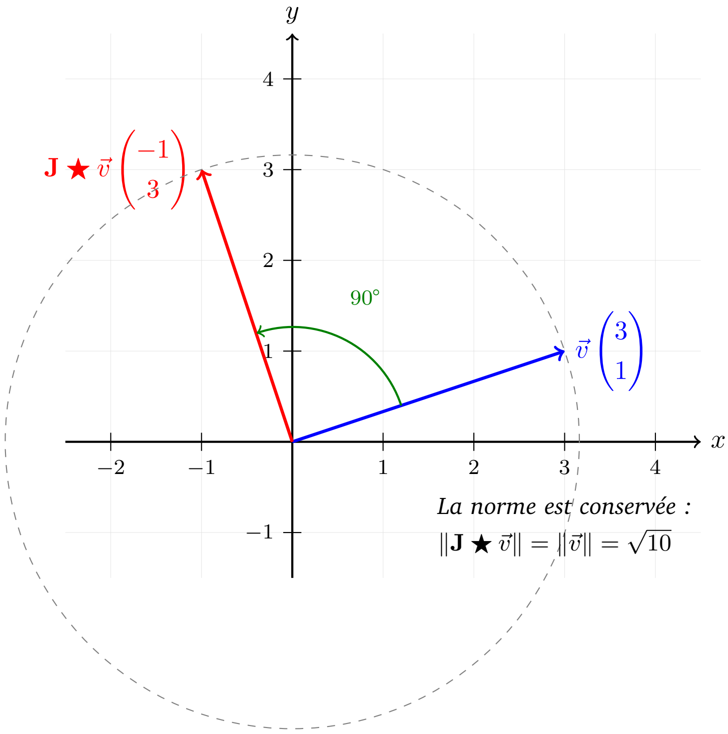

FIGURE 1 – Multiplier par $\mathbf{J}$ effectue une rotation de $90°$.

Exercice 8: Les puissances de J | ★★★★★

♦ **Q14.** On part du vecteur $\vec{u}_0 = \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on calcule itérativement :

$$\vec{u}_1 = \mathbf{J} \bigstar \vec{u}_0, \qquad \vec{u}_2 = \mathbf{J} \bigstar \vec{u}_1, \qquad \vec{u}_3 = \mathbf{J} \bigstar \vec{u}_2, \qquad \vec{u}_4 = \mathbf{J} \bigstar \vec{u}_3$$

1. Calculer les coordonnées de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_4$.
2. Que vaut $\vec{u}_4$? Combien de multiplications par $\mathbf{J}$ faut-il pour revenir au vecteur initial ?
3. Compléter le tableau :

Vecteur	$\mathbf{J}^0 = \mathbf{1}$	$\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}$	$\mathbf{J}^2$	$\mathbf{J}^3$	$\mathbf{J}^4$
Coordonnées	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$			
En nombres	1		-1		

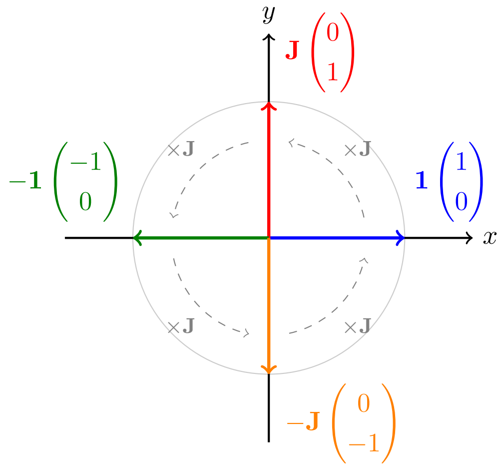

FIGURE 2 – Les quatre « puissances » de $\mathbf{J}$: une rotation de $90°$ à chaque étape. Après 4 multiplications, on revient au point de départ.

Exercice 9: La spirale | ★★★★★

♦ **Q15.** On considère le vecteur $\vec{r}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\vec{r}\|$. Que vaut cette norme ?
2. On part du vecteur $\vec{w}_0\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et on calcule :

$$\vec{w}_1 = \vec{r} \bigstar \vec{w}_0, \qquad \vec{w}_2 = \vec{r} \bigstar \vec{w}_1, \qquad \vec{w}_3 = \vec{r} \bigstar \vec{w}_2$$

   Calculer les coordonnées de $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$.
   On pourra utiliser : $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ *et* $\frac{1}{2} = 0{,}5$.
3. Vérifier que $\|\vec{w}_k\| = \|\vec{w}_0\|$ pour $k = 1, 2, 3$. Pourquoi ce résultat est-il prévisible ?
4. Placer les points correspondant à $\vec{w}_0$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ dans un repère orthonormé.
   Quel angle de rotation l'opération $\bigstar\,\vec{r}$ semble-t-elle effectuer à chaque étape ?
   Indication : le vecteur $\vec{r}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ *correspond à un angle de* $30°$ *avec l'axe horizontal.*

La révélation

L'opération $\bigstar$ que vous venez de construire a un nom : c'est la **multiplication des nombres complexes**.

— Le vecteur $\mathbf{1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est le nombre **1**.

— Le vecteur $\mathbf{J}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est le nombre i, appelé **unité imaginaire**.

— Le vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ correspond au nombre complexe $z = x + iy$.

— La propriété $\mathbf{J} \bigstar \mathbf{J} = -\mathbf{1}$ s'écrit tout simplement : $i^2 = -1$.

Les **nombres complexes**, introduits au XVI^{e} siècle par Jérôme Cardan pour résoudre des équations du troisième degré, puis formalisés par Euler, Argand et Gauss, sont au programme de Terminale. Vous venez de les redécouvrir en Seconde.

Hamilton, que nous avons rencontré dans le Prologue, cherchait à étendre cette multiplication à la dimension 3. Il échoua : on sait aujourd'hui que c'est *impossible*. Mais il trouva les **quaternions** en dimension 4, qui sont utilisés aujourd'hui dans les jeux vidéo et les systèmes de navigation pour décrire les rotations dans l'espace.

Annexe A : Tableau récapitulatif

Résumé des opérations sur les vecteurs du plan

Opération	Formule	Interprétation géométrique
Somme	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$	Translation
Produit par un réel	$k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$	Dilatation
Produit ★	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bigstar \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx'-yy' \\ xy'+yx' \end{pmatrix}$	Rotation + Dilatation
Déterminant	$\det\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = xy' - x'y$	Aire orientée du parallélogramme

Propriétés du produit ★ :

Propriété	Formule
Élément neutre	$\mathbf{1} \bigstar \vec{u} = \vec{u}$
Commutativité	$\vec{u} \bigstar \vec{v} = \vec{v} \bigstar \vec{u}$
Distributivité	$\vec{u} \bigstar (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bigstar \vec{v} + \vec{u} \bigstar \vec{w}$
Norme multiplicative	$\Vert\vec{u} \bigstar \vec{v}\Vert = \Vert\vec{u}\Vert \cdot \Vert\vec{v}\Vert$
Résultat fondamental	$\mathbf{J} \bigstar \mathbf{J} = -\mathbf{1}$

Fin du devoir

« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. »

— Henri Poincaré (1854–1912)