Lycée Notre Dame de Boulogne
Version 01

Vecteurs
Chapitre G2

Classe de Seconde
Mathématiques

- APL – Exercice d'application
- THE – Exercice théorique
- SYN – Exercice de synthèse
- APR – Exercice d'approfondissement

★★★ : Difficulté estimée de l'exercice

Exercice 1: Coordonnées et égalité | APL-G2-01 | ★

On donne les points suivants dans un repère orthonormé :

$$A(1\,;3) \quad B(4\,;7) \quad C(-2\,;1) \quad D(1\,;5) \quad E(0\,;-1) \quad F(3\,;3)$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.
2. Quels vecteurs sont égaux parmi ceux calculés ? Justifier.
3. Que peut-on dire des quadrilatères $ABDC$ et $ABFE$?

Exercice 2: Construire des points | APL-G2-02 | ★★

On donne les points $A(1\,;3)$, $B(4\,;1)$ et le vecteur $\vec{u}\binom{2}{-1}$.

1. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \vec{u}$.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme (c'est-à-dire $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$).
4. Placer tous les points dans un repère et vérifier graphiquement.

Exercice 3: Opérations | APL-G2-03 | ★★

On donne les vecteurs $\vec{u}\binom{3}{-1}$ et $\vec{v}\binom{-2}{4}$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\vec{u}+\vec{v} \qquad \vec{u}-\vec{v} \qquad 2\vec{u}+3\vec{v} \qquad -\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$$

2. On donne les points $A(2\,;1)$, $B(5\,;0)$, $C(3\,;5)$. Vérifier la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

3. Calculer $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

Exercice 4: Milieux et médiane | APL-G2-04 | ★★

On considère le triangle ABC avec $A(0\,;4)$, $B(6\,;0)$, $C(4\,;8)$.

1. Calculer les coordonnées des milieux M de $[BC]$, N de $[AC]$ et P de $[AB]$.
2. Calculer les coordonnées du point G d'intersection des médianes (AM) et (BN). On admettra que :
$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,;\,\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$
3. Vérifier que G appartient aussi à la médiane (CP).

Exercice 5: Alignement de trois points | SYN-G2-05 | ★★★

Partie A. On donne les points $A(1\,;2)$, $B(4\,;8)$ et $C(6\,;12)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ? Utiliser le critère de colinéarité : deux vecteurs $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Partie B. On donne les points $D(2\,;3)$, $E(5\,;7)$ et $F(11\,;15)$.
Les points D, E et F sont-ils alignés ?

Partie C. Pour quelle valeur de k le point $G(k\,;3k-1)$ est-il aligné avec $A(1\,;3)$ et $B(3\,;7)$?

Exercice 6: Parallélogramme | SYN-G2-06 | ★★★

On donne les points $A(1\,;1)$, $B(5\,;3)$, $C(6\,;7)$ et $D(2\,;5)$.

1. **Méthode 1 :** Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on conclure sur la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. **Méthode 2 :** Calculer les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Que peut-on conclure sur la nature du quadrilatère $ABCD$?
3. Les deux méthodes donnent-elles le même résultat ? Expliquer pourquoi c'est logique.

Exercice 7: Centre de gravité | THE-G2-07 | ★★★★

Le centre de gravité (ou isobarycentre) d'un triangle est le point de concours des trois médianes. Il possède des propriétés vectorielles remarquables.

Soit ABC un triangle avec $A(1\,;2)$, $B(7\,;4)$ et $C(4\,;8)$.

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC :
$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,;\,\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.
3. Vérifier que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.
Interpréter : le centre de gravité G se situe aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.

Exercice 8: Décomposition vectorielle | **APR-G2-08** | ★★★★★

On donne les vecteurs $\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{1}{3}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Exprimer le vecteur $\vec{w}\binom{7}{8}$ comme combinaison linéaire $a\vec{u} + b\vec{v}$.

   Indication : résoudre le système d'équations $\begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + 3b = 8 \end{cases}$
3. Même question avec le vecteur $\vec{w'}\binom{-1}{5}$.
4. Expliquer pourquoi tout vecteur du plan peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, à condition qu'ils ne soient pas colinéaires.

   Quelle condition sur le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ garantit cela ?