



« La logique est le fondement de la certitude de toutes les connaissances que nous acquérons. »

— Leonhard Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1768

Comment aborder cette activité ?

En physique, les phénomènes d'évolution (décroissance radioactive, charge d'un condensateur, dynamique des populations) sont décrits par des équations dont **l'inconnue est une fonction**. Ces équations, appelées **équations différentielles**, relient une fonction à sa dérivée.

Dans cette activité, vous allez découvrir **géométriquement** ce que signifie résoudre une telle équation, *avant toute formule algébrique*.

Ce travail n'est pas noté. L'objectif est de vous préparer au cours qui suivra.

Les phases de l'exploration

- ▷ **Explorer** – Manipuler, calculer, observer.
- ◇ **Conjecturer** – Formuler une hypothèse à partir de vos observations.
- ✓ **Valider** – Tester votre conjecture par le calcul numérique.
- **Formaliser** – Vérifier algébriquement.

Objectif

À la fin de cette activité, vous saurez :

- Ce qu'est un **champ de tangentes** et comment il encode une équation différentielle.
- Tracer des **courbes intégrales** (solutions) en suivant le champ.
- Utiliser la **méthode d'Euler** pour approcher numériquement une solution.
- Vérifier algébriquement qu'une fonction proposée est bien solution.

Situation de départ

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$y' = -2y$$

Que signifie cette équation ?

On cherche **toutes les fonctions** f dérivables sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2f(x)$$

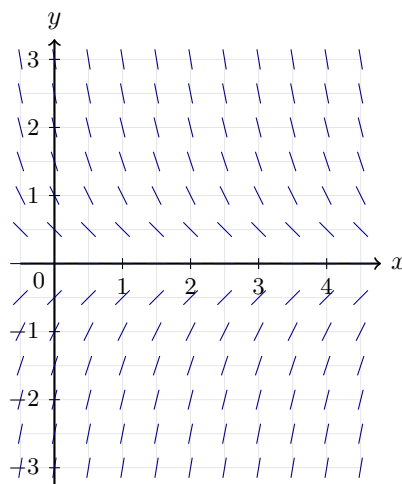
Autrement dit : en chaque point x , la dérivée de f est égale à -2 fois la valeur de f en ce point. La pente de la tangente dépend de la position sur la courbe !

Phase 1 – ▷ **Explorer** — Le champ de tangentes

En chaque point (x, y) du plan, l'équation $y' = -2y$ impose la pente de la tangente : elle vaut $-2y$. L'ensemble de ces pentes forme un **champ de tangentes**.

1. ▷ **Observer le champ de tangentes.**

Le champ ci-dessous représente, en chaque point d'une grille, un petit segment dont la pente vaut $-2y$.



2. ▷ **Tracer des courbes intégrales.**

Une **courbe intégrale** est le graphe d'une solution : c'est une courbe qui, en chaque point, est **tangente** aux flèches du champ.

Sur le champ ci-dessus, tracez à la main (au crayon) quatre courbes partant respectivement des points :

$$(0; 2) \quad (0; 1) \quad (0; -1) \quad (0; -2)$$

Conseil : suivez le courant des flèches, comme un bateau porté par le courant d'une rivière.

3. ▷ **Observer et comparer.**

Complétez le tableau suivant d'après vos tracés :

Point de départ	Comportement observé	Limite quand $x \rightarrow +\infty$
(0 ; 2)		
(0 ; 1)		
(0 ; 0)		
(0 ; -1)		
(0 ; -2)		

4. ▷ **Questions.**

- (a) Que se passe-t-il lorsque $y_0 > 0$? La fonction est-elle croissante ou décroissante ?
- (b) Que se passe-t-il lorsque $y_0 < 0$? La fonction est-elle croissante ou décroissante ?
- (c) Que se passe-t-il lorsque $y_0 = 0$?
- (d) Vers quelle valeur toutes les courbes semblent-elles converger ?

Phase 2 – ◇ **Conjecturer** — De l'observation à la formule

Vous allez transformer vos observations en une conjecture mathématique.

- 5. ◇ D'après vos tracés, les courbes évoquent des fonctions connues. Laquelle ?
Indication : quelle est la seule fonction dont la dérivée est proportionnelle à elle-même ?

- 6. ◇ **Formulez votre conjecture :**

Ma conjecture :

La solution de $y' = -2y$ vérifiant $y(0) = y_0$ semble être :

$$f(x) =$$

Et lorsque $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow \dots\dots\dots$

Phase 3 – ✓ **Valider** — Validation numérique par la méthode d'Euler

Vous allez approcher la solution en suivant le champ de tangentes **pas à pas**, comme une ligne brisée.

Principe de la méthode d'Euler

On part du point (x_0, y_0) . On avance d'un petit pas h en suivant la tangente :

$$y_{n+1} = y_n + h \times F(x_n, y_n)$$

où $F(x, y) = -2y$ est la pente donnée par l'équation différentielle.

On obtient ainsi une suite de points (x_n, y_n) qui approchent la courbe solution.

7. ✓ **Calcul à la main.**

On prend $y_0 = 2$, $x_0 = 0$ et un pas $h = 0,25$. Complétez le tableau :

n	x_n	y_n	$F(x_n, y_n) = -2y_n$	$h \times F$	y_{n+1}
0	0	2	-4	-1	1
1	0,25	1			
2	0,5				
3	0,75				
4	1				
5	1,25				

8. ✓ Placez les points (x_n, y_n) sur le champ de tangentes de la Phase 1 et reliez-les. Que constatez-vous ?

Phase 4 – □ Formaliser — Vérification algébrique

Vous allez vérifier que votre conjecture est correcte par le calcul.

9. □ On vous propose la fonction f définie par $f(x) = Ke^{-2x}$, où K est une constante réelle.

Calculez $f'(x)$:

10. □ Vérifiez que $f'(x) + 2f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

11. □ Déterminez la valeur de K pour que $f(0) = 2$:

12. □ **Synthèse.** Complétez :

L'unique solution de l'équation $y' = -2y$ vérifiant $y(0) = 2$ est :

$f(x) =$

Plus généralement, l'unique solution vérifiant $y(0) = y_0$ est :

$f(x) =$

Bilan

Ce que j'ai découvert :

Résumez, avec vos propres mots, ce qu'est une équation différentielle et comment on peut en « voir » les solutions.

Ce qui me pose encore question :

Y a-t-il des points que vous n'avez pas compris ? Des questions que vous vous posez ?

Lien avec le cours

Cette activité prépare le chapitre : Primitives et équations différentielles

En cours, nous démontrerons que :

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont exactement les fonctions $f : x \mapsto Ke^{-ax}$, $K \in \mathbb{R}$.
- Pour chaque condition initiale $f(x_0) = y_0$, il existe une **unique** solution.
- La méthode d'Euler fournit une approximation dont l'erreur décroît quand le pas h diminue.
- Ces équations modélisent de nombreux phénomènes physiques : décroissance radioactive, circuits électriques, dynamique des populations.

La conjecture que vous avez formulée et validée numériquement sera **démontrée rigoureusement** en cours.

Pour aller plus loin — L'équation logistique

Défi (pour les plus curieux) :

On considère maintenant l'équation différentielle :

$$y' = y(1 - y)$$

Cette équation, appelée **équation logistique**, modélise la croissance d'une population avec une capacité limite.

1. Calculez la pente y' lorsque $y = 0$ et lorsque $y = 1$. Que peut-on dire de ces valeurs ?
2. Calculez la pente lorsque $y = 0,5$. Est-elle positive ou négative ?
3. Quels sont les deux **équilibres** (solutions constantes) de cette équation ? L'un est-il **stable** et l'autre **instable** ?

Fin de l'activité

La suite au prochain cours !