F6. Primitives et équations différentielles

De la dérivation inverse aux modèles d'évolution

Table des matières

Parcours du chapitre

- ■ **Essentiel** — Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.
- ♦ **Approfondissement** — Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.
- ★ **Excellence** — Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

Compagnon numérique du chapitre

Quiz • Vidéos • Flashcards

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »

— Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur, 1822

Rachid Guejdad

`https://rguejdad.com`

Introduction – D'où viennent les primitives et les équations différentielles ?

En physique, les lois fondamentales ne donnent presque jamais directement la grandeur cherchée : elles décrivent **comment cette grandeur varie**. La deuxième loi de Newton, par exemple, affirme que la force résultante est égale au produit de la masse par l'accélération :

En 1687, Newton publie les Principia Mathematica, où les lois du mouvement sont formulées comme des relations entre une grandeur et ses taux de variation : les premières équations différentielles.

— Newton, 1687

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

Connaître la force ne donne pas immédiatement la position $\vec{x}(t)$: il faut remonter de l'accélération à la vitesse, puis de la vitesse à la position. Chacune de ces étapes est une **primitivation**.

Prenons un exemple plus simple. Un biologiste observe qu'une population de bactéries croît proportionnellement à sa taille : si $N(t)$ désigne le nombre de bactéries au temps t, alors :

$$N'(t) = r \cdot N(t) \qquad \text{où } r > 0 \text{ est le taux de croissance}$$

Cette relation entre N et sa dérivée N' est une **équation différentielle**. La résoudre, c'est trouver toutes les fonctions N qui vérifient cette égalité. On montrera dans ce chapitre que les solutions sont les fonctions exponentielles $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{rt}$, où $N_0 = N(0)$ est la population initiale.

Leibniz introduit en 1684 le symbole $\int$ (un S allongé, pour summa) et la notation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Dérivation et intégration sont, dès l'origine, conçues comme des opérations inverses.

Ce scénario se reproduit dans des domaines très variés :

— **Radioactivité** : le nombre de noyaux instables vérifie $N' = -\lambda N$;

— **Refroidissement** : la température d'un corps obéit à $T' = -k(T - T_0)$;

— **Électronique** : la tension aux bornes d'un condensateur satisfait $u' + \dfrac{u}{RC} = \dfrac{E}{RC}$.

Dans chacun de ces cas, la démarche est la même : on connaît une relation liant une fonction inconnue y à sa dérivée y', et l'on cherche à en déduire l'expression de y. Cela repose sur deux opérations fondamentales :

1. **La primitivation** : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que $F' = f$. C'est l'opération inverse de la dérivation.
2. **La résolution d'équations différentielles** : trouver les fonctions y vérifiant une équation du type $y' + ay = b$, éventuellement avec une **condition initiale** $y(x_0) = y_0$ qui sélectionne une unique solution.

Ce chapitre est organisé autour de ces deux axes. On commencera par construire le calcul des primitives à partir des formules de dérivation, puis on résoudra les équations différentielles linéaires du premier ordre, en montrant comment elles modélisent concrètement les phénomènes évoqués ci-dessus.

Les frères Bernoulli, élèves de Leibniz, lancent à la fin du XVII[e] siècle des défis célèbres (brachistochrone, chaînette) dont la résolution passe par des équations différentielles.

— Bernoulli, 1696

1. Primitives d'une fonction

1.1. Définition et premières propriétés

Définition – Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Propriété – Unicité à constante près

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme :

$$F(x) + C \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

Démonstration.

Soit G une autre primitive de f sur I. Alors :

$$\forall x \in I, \quad (G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Or, une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante (résultat admis, conséquence du théorème des accroissements finis).
Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $G(x) - F(x) = C$, soit $G(x) = F(x) + C$.

Réciproquement, si $G(x) = F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, alors $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc G est bien une primitive de f. ■

Propriété – Linéarité

Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur un intervalle I, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha F + \beta G \quad \text{est une primitive de} \quad \alpha f + \beta g \quad \text{sur } I$$

Démonstration.

$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$ *par linéarité de la dérivation.* ■

Propriété – Primitive vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

OBJECTIFS

Savoir déterminer les primitives des fonctions usuelles.

Reconnaître les formes $u'e^u$, u'/u, $u' \cos(u)$, etc.

Primitive : *Du latin primitivus : « qui est le premier ». On remonte de la dérivée à la fonction originale.*

⟵ PRÉREQUIS

Dérivées, fonctions usuelles, exponentielle et logarithme.

L'existence de primitives pour toute fonction ***continue*** *sur I est un résultat profond (théorème fondamental de l'analyse), admis en terminale.*

Justification ■.

Soit F_0 une primitive de f sur I. Toute primitive s'écrit $F(x) = F_0(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

La condition $F(x_0) = y_0$ donne $F_0(x_0) + C = y_0$, soit $C = y_0 - F_0(x_0)$: une seule valeur de C convient. ■

ÉCHO EXO
APL-F6-02 ⋆⋆
Primitives avec condition initiale : 4 questions.

Exemple – ■

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.
Les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^2 + 3x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
On impose $F(0) = 1$, donc $C = 1$. D'où $\boxed{F(x) = x^2 + 3x + 1}$.

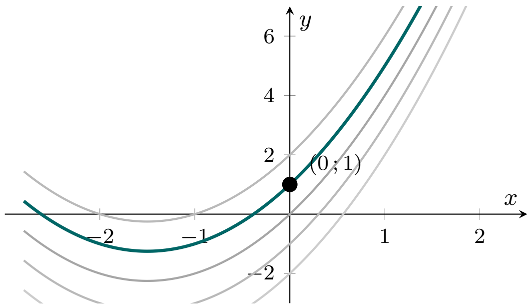

Figure 1 – Primitives de $f(x) = 2x + 3$: la famille $F(x) = x^2 + 3x + C$. Une seule courbe (en couleur) passe par $(0\,;1)$.

1.2. Tableau des primitives usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Intervalle**
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
Formes $ax + b$ $\quad$ **(**$a \neq 0$**)**		
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax+b}$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\,\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\,\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

JALON
Savoir retrouver chaque ligne du tableau par dérivation inverse. Pour les formes $ax + b$, le coefficient $1/a$ provient de la dérivation de $ax + b$.

ÉCHO EXO
APL-F6-01 ⋆
Primitives directes : 5 fonctions à primitiver.

1.3. Primitives de fonctions composées

PROPRIÉTÉ – PRIMITIVES COMPOSÉES FONDAMENTALES

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Primitive	Condition sur I
$u' \, \mathrm{e}^u$	e^u	–
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	–
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	–
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	u ne s'annule pas sur I
$u' \, u^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u > 0$ sur I si $n \notin \mathbb{N}$

La clé : reconnaître $u'(x) \times g\big(u(x)\big)$ et utiliser le fait que la primitive est $G\big(u(x)\big)$.

MÉTHODE – RECONNAÎTRE UNE PRIMITIVE COMPOSÉE

▷ **1.** Identifier un facteur $u'(x)$ dans l'expression.

▷ **2.** Vérifier que le reste est une fonction de $u(x)$ seul.

▷ **3.** Écrire la primitive $G\big(u(x)\big)$ en utilisant le tableau.

▷ **4.** Si un coefficient apparaît, ajuster par multiplication.

ÉCHO EXO
APL-F6-03 ⋆⋆
6 primitives composées avec indications.

Exemple –

Primitiver $f(x) = \dfrac{6x^2}{1+2x^3}$ sur $]0\,;+\infty[$.
On pose $u(x) = 1 + 2x^3$, donc $u'(x) = 6x^2$. Sur $]0\,;+\infty[$, on a $u(x) > 0$.
On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$, dont une primitive est $\ln\lvert u\rvert$.
Donc $\boxed{F(x) = \ln(1 + 2x^3)}$ (valeur absolue inutile car $u > 0$ sur l'intervalle).

Nous savons désormais calculer des primitives à partir de formules de dérivation. Ce calcul va maintenant trouver une application fondamentale : la résolution d'équations différentielles.

2. Équations différentielles $y' + ay = 0$

2.1. Définition et vocabulaire

Définition – Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une **fonction** y, définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et qui fait intervenir y et ses **dérivées successives** y', y'', ...

L'**ordre** d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.

Une équation différentielle **du premier ordre** est une équation où interviennent uniquement y et y' (pas de dérivée d'ordre supérieur).

Définition – Solution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer **toutes** les fonctions y dérivables sur un intervalle I qui vérifient l'équation.

Le problème de Cauchy : trouver l'unique solution vérifiant une **condition initiale** $y(x_0) = y_0$.

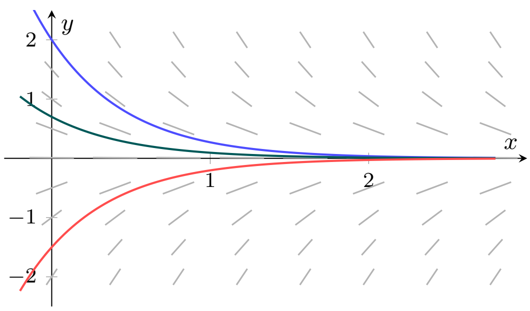

Figure 2 – Champ de tangentes de $y' + 2y = 0$. En chaque point, le segment indique la pente $y' = -2y$. Les courbes solutions épousent le champ.

2.2. Résolution de $y' + ay = 0$

Théorème – Solutions de $y' + ay = 0$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + ay = 0$$

sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}}$$

OBJECTIFS

Résoudre $y' + ay = 0$.

Déterminer la solution vérifiant une condition initiale.

Équation différentielle : *Du latin differentia. Introduite par Leibniz (1684). Notation originale : $dy = f(x)\,dx$.*

*Dans ce chapitre, on traite uniquement les équations différentielles **d'ordre 1 à coefficients constants** : $y' + ay = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.*

PORTAIL ACT

ACT-F6 · Phases 1–3

Découverte par champs de pentes et Euler.

Le problème de Cauchy porte le nom d'Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), qui a rigoureusement démontré l'existence et l'unicité des solutions.

— Cauchy, 1820

Démonstration ⬥.

On procède par double implication ($\Longleftrightarrow$).

— *Sens retour ($\Longleftarrow$).*
Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$. Alors $f'(x) = -aC\,\mathrm{e}^{-ax}$, donc :

$$f'(x) + af(x) = -aC\,\mathrm{e}^{-ax} + aC\,\mathrm{e}^{-ax} = 0$$

Ainsi f est bien solution de $y' + ay = 0$.

— *Sens direct ($\Longrightarrow$).*
Soit f une solution, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' + af = 0$.
Posons :

$$g(x) = f(x)\,e^{ax}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et :

$$g'(x) = f'(x)\,e^{ax} + a\,f(x)\,e^{ax} = \big(f'(x) + af(x)\big)\,e^{ax} = 0 \times e^{ax} = 0$$

Donc $g' = 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne que g est constante (résultat admis) : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, $f(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = C\,\mathrm{e}^{-ax}$.

■

*La démonstration utilise l'astuce de multiplier par le **facteur intégrant** e^{ax}. C'est un outil fondamental en analyse.*

PROPRIÉTÉ – CONDITION INITIALE ■

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique solution de

$$y' + ay = 0 \quad \text{avec} \quad y(x_0) = y_0$$

est : $\boxed{f(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}}$

Vérification ■.

La solution générale est $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$. On impose $f(x_0) = y_0$:

$$C\,\mathrm{e}^{-ax_0} = y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad C = y_0\,e^{ax_0}$$

D'où $f(x) = y_0\,e^{ax_0} \cdot e^{-ax} = y_0\,e^{-a(x-x_0)}$. ■

ÉCHO EXO
APL-F6-04 ⋆⋆
4 EDL homogènes avec conditions initiales.

Exemple – ■

Résoudre $y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 2$.
La solution générale est $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-3x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
On impose $f(0) = C = 2$. Donc $\boxed{f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-3x}}$.

Attention –

L'équation $2y' - y = 0$ doit d'abord être réécrite sous forme canonique :

$$y' - \frac{1}{2}\,y = 0$$

Ici $a = -\frac{1}{2}$, donc les solutions sont $f(x) = C\,\mathrm{e}^{x/2}$.

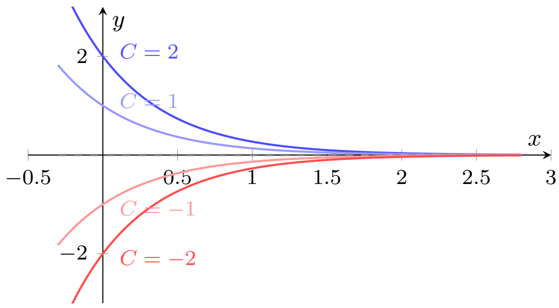

Figure 3 – Solutions de $y' + 2y = 0$: toutes convergent vers 0 quand $x \to +\infty$ ($a = 2 > 0$).

L'équation homogène $y' + ay = 0$ constitue le cas de base. Nous allons maintenant étudier le cas plus général $y' + ay = b$, où un **second membre** constant apparaît.

3. Équations différentielles $y' + ay = b$

3.1. Solution particulière constante

Objectifs

Résoudre $y' + ay = b$.

Structure : homogène + particulière.

Modéliser des phénomènes physiques.

On cherche φ constante : $\varphi' = 0$, donc $a\varphi = b$, soit $\varphi = b/a$. La condition $a \neq 0$ est essentielle ici.

Propriété –

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. L'équation $y' + ay = b$ admet la **solution particulière constante** :

$$\varphi_0 = \frac{b}{a}$$

3.2. Solution générale

Théorème – Solutions de $y' + ay = b$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + ay = b$$

sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a} \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}}$$

Démonstration ⬩.

On procède par double implication ($\Longleftrightarrow$).

— *Sens retour ($\Longleftarrow$).*
Soit $C \in \mathbb{R}$ et $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + b/a$. Alors $f'(x) = -aC\,\mathrm{e}^{-ax}$, donc :

$$f'(x) + af(x) = -aC\,\mathrm{e}^{-ax} + aC\,\mathrm{e}^{-ax} + b = b$$

Ainsi f est bien solution de $y' + ay = b$.

— *Sens direct ($\Longrightarrow$).*
Soit f une solution de $y' + ay = b$. Posons $h(x) = f(x) - b/a$. Alors :

$$h'(x) + ah(x) = f'(x) + af(x) - b = b - b = 0$$

Donc h est solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$.
D'après le théorème précédent, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$.
Par conséquent, $f(x) = h(x) + b/a = C\,\mathrm{e}^{-ax} + b/a$.

■

JALON

Retenir la structure : solution générale = solution homogène + solution particulière.

Propriété – Condition initiale ■

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. L'unique solution de

$$y' + ay = b \quad \text{avec} \quad y(x_0) = y_0$$

est : $\boxed{f(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}}$

Vérification ■.

La solution générale est $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + b/a$. On impose $f(x_0) = y_0$:

$$C\,\mathrm{e}^{-ax_0} + \frac{b}{a} = y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad C = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{ax_0}$$

D'où $f(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}$. ■

Exemple – ■

Résoudre $y' - 3y = 6$ avec $y(0) = 0$.
Identification : $a = -3$, $b = 6$. Solution particulière constante : $\varphi_0 = 6/(-3) = -2$.
Solution générale : $f(x) = C\,\mathrm{e}^{3x} - 2$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Condition initiale : $f(0) = C - 2 = 0$, donc $C = 2$.
Conclusion : $\boxed{f(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x} - 2}$.

3.3. Comportement asymptotique

PROPRIÉTÉ – LIMITE DES SOLUTIONS ♦

Soit $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + b/a$ une solution de $y' + ay = b$.

— Si $a > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{b}{a}$ (convergence vers l'équilibre), quelle que soit la valeur de C.

— Si $a < 0$ et $C \neq 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ (divergence).

— Si $a < 0$ et $C = 0$: f est la solution constante b/a.

Dans les modèles physiques, $a > 0$ correspond à un système stable : la solution converge vers l'équilibre b/a, indépendamment de la condition initiale.

Justification ♦.

On a $f(x) = C\,e^{-ax} + b/a$.
Si $a > 0$, alors $-a < 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ (croissance comparée).
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C \times 0 + \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{a}$.
Si $a < 0$ et $C \neq 0$, alors $-a > 0$ et $e^{-ax} \to +\infty$, donc $|f(x)| \to +\infty$.
■

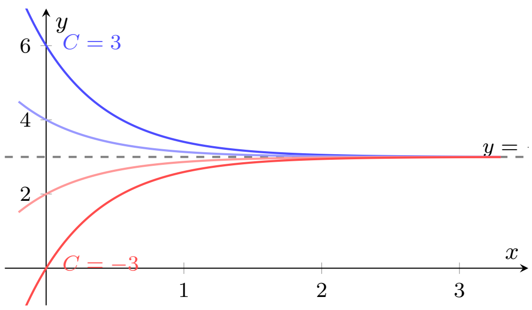

Figure 4 – Solutions de $y' + 2y = 6$: toutes convergent vers l'équilibre $b/a = 3$.

ÉCHO EXO
SYN-F6-05 ⋆⋆⋆
Circuit RC : charge d'un condensateur.

ÉCHO EXO
SYN-F6-06 ⋆⋆⋆
Décroissance radioactive et carbone 14.

3.4. Applications à la physique

Remarque – Modèles classiques ♦

L'équation $y' + ay = b$ modélise de nombreux phénomènes :

— **Circuit RC** : $u' + \dfrac{1}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$ (charge d'un condensateur)

— **Radioactivité** : $N' = -\lambda N$ (décroissance exponentielle)

— **Newton** : $T' = -k(T - T_0)$ (refroidissement)

— **Pharmacocinétique** : $C' = -\dfrac{C}{\tau} + \dfrac{D}{V\tau}$ (concentration d'un médicament)

4. COMPLÉMENT : ÉQUATIONS $y' + ay = f(x)$

4.1. Structure des solutions

OBJECTIFS

Résoudre $y' + ay = f(x)$ par variation de la constante.

Extension au cas où le second membre n'est pas constant.

PROPRIÉTÉ – PRINCIPE DE SUPERPOSITION ♦

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur un intervalle I. Si y_p est **une** solution particulière de $y' + ay = f(x)$, alors les solutions de cette équation sont exactement les fonctions :

$$\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax} + y_p(x) \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}}$$

Démonstration ♦.

Soit y_1 et y_2 deux solutions de $y' + ay = f(x)$. Posons $h = y_1 - y_2$. Alors :

$$h'(x)+ah(x) = \big(y_1'(x)+ay_1(x)\big)-\big(y_2'(x)+ay_2(x)\big) = f(x)-f(x) = 0$$

Donc h est solution de l'équation homogène : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$.
Par conséquent, $y_1(x) = y_p(x) + C\,\mathrm{e}^{-ax}$. ■

Cette section prolonge l'étude de la section 3 au cas où le second membre n'est plus une constante. La méthode dépasse le programme de terminale.

JALON

*C'est la même structure que pour $y' + ay = b$ (section 3) : solution générale = homogène + particulière. La difficulté est de **trouver** y_p.*

4.2. Méthode de variation de la constante

MÉTHODE – VARIATION DE LA CONSTANTE ★

Pour trouver une solution particulière de $y' + ay = f(x)$:

▷ **1.** On part de la solution homogène $y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-ax}$.

▷ **2.** On « fait varier la constante » : on cherche $y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.

▷ **3.** On substitue dans l'équation : on obtient $C'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = f(x)$.

▷ **4.** On en déduit $C'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.

▷ **5.** On primitive : $C(x)$ est une primitive de $f(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.

*La méthode de variation de la constante est due à Joseph-Louis Lagrange (1774). L'idée : transformer la constante C de la solution homogène en une **fonction** $C(x)$.*

— Lagrange, 1774

Justification ♦.

On pose $y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$ avec C dérivable. Alors :

$$y_p'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - a\,C(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$$

En substituant dans $y' + ay = f(x)$:

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} \underbrace{-a\,C(x)\,\mathrm{e}^{-ax} + a\,C(x)\,\mathrm{e}^{-ax}}_{=0} = f(x)$$

D'où $C'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{ax}$. ■

Remarque – ◆

Lorsque $f(x) = b$ (constante) et $a \neq 0$, on retrouve le résultat de la section 3 :
$C'(x) = b\,\mathrm{e}^{ax}$, d'où $C(x) = \frac{b}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$, et $y_p(x) = \frac{b}{a}\,\mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{-ax} = \frac{b}{a}$.

4.3. Exemples

Exemple – ⋆

Résoudre $y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$.

Étape 1 – Homogène. Les solutions de $y' + 2y = 0$ sont $y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}$.
Étape 2 – Variation de la constante. On cherche $y_p(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec :

$$C'(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{5x} \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{5}$$

D'où $y_p(x) = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{5} \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{5}$.

Solution générale : $\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\mathrm{e}^{3x}}{5}}$

Exemple – ⋆

Résoudre $y' + y = 2\,\mathrm{e}^{-3x}$ avec $y(0) = 1$.

Étape 1 – Homogène. Solutions de $y' + y = 0$: $y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-x}$.
Étape 2 – Variation de la constante.

$$C'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot \mathrm{e}^{x} = 2\,\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = -\mathrm{e}^{-2x}$$

D'où $y_p(x) = -\mathrm{e}^{-2x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-3x}$.
Solution générale : $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}$.
Condition initiale : $y(0) = C - 1 = 1$, donc $C = 2$.
Conclusion : $\boxed{y(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}}$