



La rigueur et la clarté de vos raisonnements ainsi que le soin apporté à votre copie seront pris en compte dans la notation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

**Bon courage !**

**Exercice 1: Questions à choix multiples – 4 points**

*Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.*

*Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

**Réponses à compléter :**

Question	1	2	3	4
Réponse				

N°	Question	A	B	C	D
1	Une primitive de $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ est :	$F(x) = 6x - \frac{2}{x^3}$	$F(x) = x^3 - \frac{1}{x}$	$F(x) = x^3 + \frac{1}{x}$	$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$
2	La solution de $y' + 2y = 0$ vérifiant $f(0) = 3$ est :	$f(x) = 3e^{2x}$	$f(x) = 3e^{-2x}$	$f(x) = -2e^{3x}$	$f(x) = 2e^{-3x}$
3	Soit $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ . Une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$ est :	$G(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$G(x) = \ln(1+x^2)$	$G(x) = (1+x^2)^2$	$G(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
4	La solution générale de $y' - 3y = 6$ est :	$f(x) = Ce^{3x} - 2$	$f(x) = Ce^{-3x} + 2$	$f(x) = Ce^{3x} + 2$	$f(x) = Ce^{3x} + 6$

**Exercice 2: Calcul de primitives – 5 points**

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué. (2,5 pt)

(a)  $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$  sur  $\mathbb{R}$

(b)  $f(x) = e^x + \frac{3}{x}$  sur  $]0; +\infty[$

(c)  $f(x) = \cos(x) - \frac{2}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$

(d)  $f(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$  sur  $\mathbb{R}$

Indication : on pourra reconnaître la forme  $\frac{u'}{u^2}$ .

(e)  $f(x) = (6x - 2)e^{3x^2 - 2x}$  sur  $\mathbb{R}$

2. Déterminer l'unique primitive  $F$  de  $f(x) = 2x - 1 + e^x$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 4$ . (1 pt)

3. Soit  $g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$  définie sur  $]0; \pi[$ . (1,5 pt)

(a) Reconnaitre la forme  $\frac{u'}{u}$  et en déduire une primitive  $G$  de  $g$ .

(b) Déterminer l'unique primitive  $G_0$  de  $g$  telle que  $G_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

**Exercice 3: Loi de refroidissement de Newton – 5 points**

Une tasse de café, initialement à  $90^\circ\text{C}$ , est posée dans une pièce à température constante  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

La température  $T(t)$  du café (en  $^\circ\text{C}$ ), au temps  $t$  (en minutes), vérifie l'équation différentielle :

$$T'(t) = -k(T(t) - T_0)$$

avec  $k = 0,05$  (en  $\text{min}^{-1}$ ) et la condition initiale  $T(0) = 90$ .

1. On pose  $\theta(t) = T(t) - T_0$  (écart de température avec le milieu ambiant). (1 pt)

(a) Montrer que  $\theta'(t) = T'(t)$ .

(b) En déduire que  $\theta$  vérifie l'équation différentielle  $\theta' = -k\theta$ .

(c) Quelle est la condition initiale  $\theta(0)$  ?

2. Résoudre l'équation différentielle  $\theta' = -k\theta$  et déterminer l'unique solution vérifiant la condition initiale. (1 pt)

3. En déduire que : (0,5 pt)

$$T(t) = 20 + 70 e^{-0,05 t}$$

4. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ . Interpréter physiquement ce résultat. (1 pt)

5. À quel instant le café atteint-il la température de  $50^\circ\text{C}$  ? (1 pt)

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à la minute près.

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $T$  en précisant : (0,5 pt)
- la valeur initiale,
  - l'asymptote horizontale,
  - la convexité de la courbe.

**Exercice 4: Étude complète d'une équation différentielle – 6 points**

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + y = 3e^{-2x}$ .

**Partie A – Résolution**

1. Résoudre l'équation homogène associée (H) :  $y' + y = 0$ . (1 pt)
2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme  $\varphi(x) = \alpha e^{-2x}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (1,5 pt)
  - (a) Calculer  $\varphi'(x)$ .
  - (b) Substituer dans (E) et déterminer la valeur de  $\alpha$ .
  - (c) Vérifier que  $\varphi$  est bien solution de (E).
3. En déduire la solution générale de (E). (0,5 pt)
4. Déterminer la solution  $f$  de (E) vérifiant  $f(0) = 1$ . (1 pt)

**Partie B – Étude de la solution particulière**

On considère la fonction  $f$  déterminée à la question 4 de la partie A.

5. Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . (1 pt)
6. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . (1 pt)