



— APL – Exercice d'application

— SYN – Exercice de synthèse

— THE – Exercice théorique

— APR – Exercice d'approfondissement

★★★ : Difficulté estimée de l'exercice

Exercice 1: Primitives directes | APL-F6-01 | ★

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ sur \mathbb{R}
2. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$
3. $f(x) = 2 \cos(x) - 3 \sin(x)$ sur \mathbb{R}
4. $f(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$
5. $f(x) = \frac{5}{x} + 2x^3$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 2: Primitives et condition initiale | APL-F6-02 | ★

Déterminer l'unique primitive F vérifiant la condition donnée.

1. $f(x) = 2x + 3$ sur \mathbb{R} , $F(0) = 1$
2. $f(x) = e^x - 1$ sur \mathbb{R} , $F(0) = 3$
3. $f(x) = \cos(x)$ sur \mathbb{R} , $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, $F(1) = 2$

Exercice 3: Primitives composées | APL-F6-03 | ★★

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur le domaine indiqué.

1. $f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$ sur \mathbb{R}
2. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ sur $]0; \pi[$
3. $f(x) = \frac{6x^2}{1 + 2x^3}$ sur $]0; +\infty[$
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur \mathbb{R}
5. $f(x) = \sin(2x)e^{\cos(2x)}$ sur \mathbb{R}
6. $f(x) = (3x^2 - 2)\cos(x^3 - 2x)$ sur \mathbb{R}

Exercice 4: Équations différentielles linéaires homogènes | APL-F6-04 | ★

Résoudre les équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} . Déterminer ensuite l'unique solution vérifiant la condition initiale donnée.

1. $y' + 3y = 0, \quad f(0) = 2$
2. $2y' - y = 0, \quad f(0) = -1$
3. $y' = 5y, \quad f(1) = e^5$
4. $3y' + 2y = 0, \quad f(0) = 6$

Exercice 5: Circuit RC — charge d'un condensateur | SYN-F6-05 | ★★

Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$ est relié en série à une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$ et à un générateur de tension $E = 5 \text{ V}$. À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé : $u_C(0) = 0$.

La tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$u'_C(t) + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{E}{RC}$$

1. Identifier a et b dans l'équation $y' + ay = b$. Calculer numériquement a et b .
2. Déterminer la solution générale de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.
3. Déterminer une solution particulière constante φ_0 de l'équation complète.
4. En déduire la solution générale de l'équation complète.
5. Déterminer la solution vérifiant $u_C(0) = 0$.
6. Calculer la constante de temps $\tau = RC$. Que vaut $u_C(\tau)$? $u_C(5\tau)$?
7. Tracer l'allure de $u_C(t)$. Vers quelle valeur $u_C(t)$ tend-elle quand $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 6: Décroissance radioactive | SYN-F6-06 | ★★

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un échantillon vérifie :

$$N'(t) = -\lambda N(t) \quad \text{avec } \lambda > 0 \text{ (constante de désintégration)}$$

On pose $N(0) = N_0$ (nombre initial de noyaux).

1. Résoudre cette équation différentielle et exprimer $N(t)$ en fonction de N_0, λ et t .
2. On appelle **demi-vie** $t_{1/2}$ le temps nécessaire pour que le nombre de noyaux soit réduit de moitié.
Montrer que $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.
3. **Application.** Le carbone 14 a une demi-vie de 5730 ans. Calculer λ (en an^{-1}).
4. Un échantillon archéologique contient 23% du carbone 14 initial. Estimer son âge.

Exercice 7: Principe de superposition | THE-F6-07 | ★★

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, g_1 et g_2 deux fonctions continues sur \mathbb{R} , et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On considère les équations différentielles :

$$(E_1) : y' + ay = g_1(x) \quad (E_2) : y' + ay = g_2(x) \quad (E_3) : y' + ay = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$$

1. Soit f_1 une solution de (E_1) et f_2 une solution de (E_2) .

Montrer que $\alpha f_1 + \beta f_2$ est solution de (E_3) .

2. **Application.** On considère l'équation $y' - y = 3e^{2x} + 2x$.

(a) Vérifier que $\varphi_1(x) = 3e^{2x}$ est solution de $y' - y = 3e^{2x}$.

(b) Vérifier que $\varphi_2(x) = -2x - 2$ est solution de $y' - y = 2x$.

(c) En déduire la solution générale de $y' - y = 3e^{2x} + 2x$.

Exercice 8: Variation de la constante | APR-F6-08 | ★★★

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{2x}$.

1. Résoudre l'équation homogène (H) : $y' - y = 0$.

2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $\varphi(x) = K(x)e^x$, où K est une fonction dérivable.

(a) Calculer $\varphi'(x)$.

(b) Substituer φ et φ' dans (E) et montrer que $K'(x) = e^x$.

(c) En déduire $K(x)$, puis $\varphi(x)$.

3. Donner la solution générale de (E).

4. Déterminer la solution vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 9: L'équation logistique | APR-F6-09 | ★★★

L'équation logistique modélise la croissance d'une population avec capacité limite :

$$y' = r y \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

avec $r > 0$ le taux de croissance et $K > 0$ la capacité maximale du milieu.

Pour simplifier, on prend $r = 1$ et $K = 1$: $y' = y(1 - y)$.

1. Quelles sont les solutions constantes (équilibres) de cette équation ?

2. Si $0 < y < 1$, quel est le signe de y' ? La population croît-elle ou décroît-elle ?

3. Si $y > 1$, quel est le signe de y' ? Interpréter.

4. On admet que la solution vérifiant $y(0) = y_0$ (avec $y_0 \in]0; 1[$) est :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1 - y_0}{y_0} e^{-x}}$$

(a) Vérifier que $f(0) = y_0$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(c) Vérifier par le calcul que f est bien solution de $y' = y(1 - y)$.

Exercice 10: Étude d'une fonction définie par une primitive | APR-F6-10 | ★★

On considère les fonctions $g(x) = \ln(x)$ et $f(x) = x \ln(x) - x$ définies sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que f est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa valeur exacte.

Exercice 11: Croissance d'un capital — modèle discret vs continu | APR-F6-11 | ★★★

Un capital initial $C_0 = 1\,000$ euros est placé à un taux annuel $r = 0,05$ (soit 5%).

Partie A – Modèle discret (suites)

On note (u_n) la suite des capitaux : $u_0 = C_0$ et $u_{n+1} = (1+r)u_n$.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 2\,000$.

Partie B – Modèle continu (équation différentielle)

On modélise la croissance continue du capital par l'EDL $y' - r y = 0$ avec $y(0) = C_0$.

3. Résoudre cette équation différentielle et exprimer $y(t)$.
4. Déterminer l'instant t_1 auquel le capital a doublé. Comparer avec le résultat de la question 2.
5. Soit $h(x) = x - \ln(1+x)$ définie sur $[0; +\infty[$.
 - (a) Montrer que $\forall x \geq 0, h(x) \geq 0$.
 - (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq y(n)$. Interpréter.

Exercice 12: Méthode d'Euler et nombre e | APR-F6-12 | ★★★

On considère l'équation différentielle $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$. On note φ sa solution.

1. Déterminer φ . Que vaut $\varphi(1)$?

On approxime φ sur $[0; 1]$ par la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{n}$ ($n \geq 2$). Comme $y' = -y$, la relation de récurrence s'écrit :

$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{k+1} = y_k - h y_k = y_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

2. Montrer que (y_k) est une suite géométrique et exprimer y_k en fonction de k et n .
3. En déduire que l'approximation d'Euler de $\varphi(1)$ est $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
4. On pose $v_n = \ln(y_n) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
 - (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -1$.
 - (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.
5. Montrer de façon analogue que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 13: Suite issue d'une équation différentielle | APR-F6-13 | ★★

On considère l'équation différentielle $y' + y = 1$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle et exprimer la solution f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. On pose $u_n = f(n) = 1 - e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
 - (b) Montrer que (u_n) est majorée par 1.
 - (c) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq 0,99$.
5. On pose $v_n = \ln(1 - u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.

Exercice 14: Pharmacocinétique | APR-F6-14 | ★★★

Un patient prend un comprimé toutes les 6 heures. Chaque prise augmente instantanément la concentration sanguine de $D = 100$ mg/L. Entre deux prises, la concentration vérifie l'équation différentielle $y' + ky = 0$ où $k > 0$.

On note C_n la concentration juste après la n -ième prise ($n \geq 1$). On pose $C_1 = 100$ et $q = e^{-6k}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + ky = 0$ avec la condition initiale $y(0) = C_0$.
2. Exprimer la concentration juste avant la deuxième prise en fonction de C_1 et q .
3. Montrer que $\forall n \geq 1, C_{n+1} = qC_n + 100$.
4. On pose $L = \frac{100}{1 - q}$ et $v_n = C_n - L$.
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison q .
 - (b) Exprimer C_n en fonction de n, q et L .
 - (c) Justifier que (C_n) converge et calculer sa limite.
5. On suppose $k = \frac{\ln 2}{6}$.
 - (a) Vérifier que $q = \frac{1}{2}$ et que $L = 200$.
 - (b) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $C_{n_0} \geq 190$.