Orthogonalité dans l'espace

Chapitre G1

— APL – Exercice d'application
— THE – Exercice théorique
— SYN – Exercice de synthèse
— APR – Exercice d'approfondissement

★★★ : Difficulté estimée de l'exercice

Exercice 1: Produit scalaire, normes et distances | APL-G1-01 | ★

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on donne les points :

$$A(1\,;-2\,;3) \qquad B(4\,;1\,;-1) \qquad C(0\,;3\,;2) \qquad D(2\,;-1\,;5)$$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.
3. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et la distance AB.
4. Les points A, B et C forment-ils un triangle rectangle ? Justifier.
5. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ (valeur exacte puis approchée au degré près).

Exercice 2: Orthogonalité de vecteurs | APL-G1-02 | ★

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
2. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Déterminer la valeur de m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\m\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
4. Déterminer tous les vecteurs $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
5. Peut-on trouver un vecteur non nul orthogonal à la fois à $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$? Si oui, les déterminer tous.

Exercice 3: Vecteur normal et équation de plan | **APL-G1-03** | ★

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ passant par $A(1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.
2. Le point $B(3\,;0\,;1)$ appartient-il à $\mathcal{P}_1$?
3. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$.
4. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_3$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
5. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_4$ passant par $A(1\,;0\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Que représente géométriquement ce plan ?

Exercice 4: Équation de plan par trois points | **APL-G1-04** | ★★

On donne $A(1\,;0\,;1)$, $B(2\,;1\,;0)$ et $C(0\,;-1\,;3)$.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   On résoudra le système $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ en fixant $a = 1$.
4. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
5. Vérifier que A, B et C satisfont cette équation.

Exercice 5: Plans parallèles et perpendiculaires | **APL-G1-05** | ★★

On donne les plans :

$$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0 \qquad \mathcal{P}_2 : -4x + 2y - 6z + 7 = 0$$

$$\mathcal{P}_3 : x + 3y + z - 2 = 0 \qquad \mathcal{P}_4 : 3x + y - z + 5 = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
2. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont-ils perpendiculaires ? Justifier.
3. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_4$ ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.
4. La droite d passant par $A(0\,;1\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est-elle orthogonale à $\mathcal{P}_1$? Justifier.
5. Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}_5$ passant par $B(1\,;0\,;-1)$ et parallèle à $\mathcal{P}_1$.

Exercice 6: Droite orthogonale à un plan | THE-G1-06 | ★★

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de l'espace.

1. On suppose que $\vec{v} \cdot \vec{u_1} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{u_2} = 0$.
   Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{P}$. Justifier qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha\,\vec{u_1} + \beta\,\vec{u_2}$.
2. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{w}$ en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.
3. Conclure : si $\vec{v}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan, alors $\vec{v}$ est orthogonal à **tout** vecteur du plan.
4. **Application.** Dans le cube $ABCDEFGH$ unitaire (repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$), on pose I le milieu de $[EF]$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   (b) Peut-on en déduire que $\overrightarrow{AI}$ est normal au plan (ABD) ? Pourquoi ?

Exercice 7: Le cube — positions relatives | SYN-G1-07 | ★★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de tous les sommets.
2. Vérifier que les points B, D, H et F sont coplanaires.
   Indication : montrer que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BF}$.
5. En déduire que la droite (AC) est orthogonale au plan $(BDHF)$. Justifier rigoureusement en utilisant le résultat de l'exercice THE-G1-06.
6. Déterminer une équation cartésienne du plan $(BDHF)$.
7. Calculer la distance du point A au plan $(BDHF)$.

Exercice 8: Distance et projeté orthogonal | SYN-G1-08 | ★★

Dans un repère orthonormé, on donne le plan $\mathcal{P}$: $2x + y - 2z + 3 = 0$ et le point $M(1\,;3\,;-1)$.

1. Vérifier que $M \notin \mathcal{P}$.
2. Calculer la distance de M au plan $\mathcal{P}$.
3. On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
   (a) Justifier que la droite (MH) a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.
   (b) Écrire une représentation paramétrique de (MH).
   (c) Déterminer les coordonnées de H (intersection de (MH) avec $\mathcal{P}$).
4. Vérifier que MH est bien égal à la distance calculée en 2.
5. Soit Q un point quelconque de $\mathcal{P}$. Montrer que $MQ \geqslant MH$.
   Indication : utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle MHQ.

Exercice 9: Intersection de plans | **SYN-G1-09** | ★★

On considère les plans :

$$\mathcal{P}_1 : x + y - z + 1 = 0 \qquad \mathcal{P}_2 : 2x - y + z - 3 = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Trouver un point A appartenant à $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
   On pourra fixer $z = 0$ et résoudre le système.
3. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
   Indication : ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs normaux.
4. Écrire une représentation paramétrique de Δ.
5. Le point $B(1\,;0\,;2)$ appartient-il à Δ ?

Exercice 10: Tétraèdre et orthogonalité *(type bac)* | **APR-G1-10** | ★★

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4\,;0\,;0)$, $B(0\,;4\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$ et $D(0\,;0\,;0)$.

Partie A – Orthogonalité

1. Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire que (DA) et (BC) sont orthogonales.
2. Montrer de même que (DB) et (AC) sont orthogonales.
3. En déduire que (DC) et (AB) sont orthogonales.
   Indication : exprimer $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ à l'aide des résultats précédents.

Partie B – Plan médiateur et sphère

4. Montrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $x - y = 0$.
5. Déterminer de même les équations des plans médiateurs de $[AC]$ et $[BC]$.
6. En déduire les coordonnées du centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ et son rayon.

Exercice 11: Espace et architecture *(type bac)* | **APR-G1-11** | ★★★

Un architecte modélise un toit par un plan $\mathcal{T}$ dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre. Le sol est le plan (xOy).
On donne les points $A(0\,;0\,;3)$, $B(6\,;0\,;5)$ et $C(0\,;8\,;5)$ situés sur le toit.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathcal{T}$.
3. Montrer que le plan $\mathcal{T}$ a pour équation : $4x + 3y - 12z + 36 = 0$.
4. Un poteau vertical part du point $P(3\,;2\,;0)$ au sol. Déterminer la hauteur du poteau, c'est-à-dire la coordonnée z du point d'intersection du poteau avec le plan $\mathcal{T}$.
5. L'architecte souhaite installer un câble vertical depuis le point $S(6\,;6\,;8)$ (sommet d'un mât) jusqu'au toit. Calculer la distance de S au plan $\mathcal{T}$.
6. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de S sur $\mathcal{T}$ (point d'attache du câble).

7. Un ouvrier se tient au point $Q(3\,;4\,;0)$ au sol. Calculer la distance QH.

Exercice 12: Section plane d'un cube *(type bac)* | **APR-G1-12** | ★★★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$. On note I le milieu de $[AE]$, J le milieu de $[BC]$ et K le point de $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$.

1. Donner les coordonnées de I, J et K.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires.
3. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (IJK).
4. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
5. Montrer que la droite (AG) (grande diagonale) n'est pas orthogonale au plan (IJK).
6. Soit L le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (IJK).
   (a) Écrire une représentation paramétrique de (DF).
   (b) Déterminer les coordonnées de L.
7. Calculer la distance du sommet A au plan (IJK).

Exercice 13: Projeté orthogonal sur une droite | **APR-G1-13** | ★★

Soit la droite Δ passant par $A(1\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, et le point $M(4\,;2\,;0)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de Δ.
2. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ.
   (a) Justifier que $\overrightarrow{AH} = t\,\vec{u}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{MH}$ en fonction de t.
   (c) Utiliser la condition $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ pour déterminer t.
   (d) En déduire les coordonnées de H.
3. Calculer la distance MH (distance de M à la droite Δ).
4. **Formule générale.** Montrer que si Δ passe par A avec vecteur directeur $\vec{u}$, alors :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}$$