



A0. LOGIQUE, RAISONNEMENT ET PYTHON

Les fondations de l'année : dire, prouver, programmer

TABLE DES MATIÈRES

1. LE VOCABULAIRE DU MATHÉMATICIEN	2	4.2. Le contre-exemple.	8
1.1. Des phrases pas comme les autres	2	4.3. La disjonction des cas	8
1.2. La hiérarchie des énoncés	3	4.4. La contraposée	8
2. LES QUANTIFICATEURS	3	4.5. Le raisonnement par l'absurde	9
2.1. Nier un énoncé quantifié	4	4.6. La récurrence	10
3. LES CONNECTEURS LOGIQUES	5	4.7. Quel raisonnement choisir ?	11
3.1. Le test des quatre cartes	5	5. LE LANGAGE DES ENSEMBLES	12
3.2. Et, ou, non	5	6. PYTHON : LA BOÎTE À OUTILS DE L'ANNÉE	13
3.3. L'implication et ses deux sœurs	6	6.1. Variables et types	13
4. L'ART DE LA DÉMONSTRATION : SIX	7	6.2. Tests et connecteurs	13
RAISONNEMENTS	7	6.3. Boucles : parcourir et attendre	14
4.1. Le raisonnement direct	7	6.4. Fonctions	14
		6.5. Listes, et les quantificateurs retrouvés	14
		6.6. La chasse au contre-exemple	14

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. »

André Weil, *L'avenir des mathématiques*, 1947

Juin 1902. À Iéna, le logicien Gottlob Frege s'apprête à publier le second volume de l'œuvre de sa vie : la reconstruction de toute l'arithmétique sur des bases purement logiques. Le livre est sous presse quand arrive une lettre de Cambridge. En quelques lignes, un jeune philosophe nommé Bertrand Russell y pose une question insignifiante en apparence, et l'édifice entier s'effondre. Frege ajoutera au volume un appendice d'une honnêteté devenue légendaire : il n'est guère de sort plus cruel pour un savant, écrit-il en substance, que de voir les fondations de son édifice ébranlées au moment où le travail s'achève.

Que contenait cette lettre ? Vous le découvrirez à la fin de ce chapitre. Ce qu'il faut en retenir dès maintenant, c'est qu'en mathématiques, **la manière de raisonner n'est pas un détail** : c'est elle qui distingue une conviction d'une certitude. Ce chapitre est la boîte à outils de votre année. Vous y apprendrez à dire (le langage des mathématiques), à prouver (six façons de raisonner), et à programmer (Python, votre laboratoire d'expérimentation). Chaque chapitre de l'année puisera dans celui-ci.

Russell dira en 1962 du courage intellectuel de Frege face à sa propre erreur : ce dévouement à la vérité fut « presque surhumain ».

Russell à van Heijenoort, 1962

1. LE VOCABULAIRE DU MATHÉMATICIEN

1.1. Des phrases pas comme les autres

Commençons par un piège vieux de deux mille quatre cents ans. Le philosophe grec Eubulide de Milet proposait ceci : un homme déclare « je mens ». Dit-il vrai ? Si oui, alors il ment, donc il dit faux. Dit-il faux ? Alors il ne ment pas, donc il dit vrai. Cette phrase de trois mots ne peut être ni vraie ni fausse.

La leçon est fondatrice : **toute phrase n'est pas une proposition**. La logique mathématique commence par choisir ses phrases.

OBJECTIFS

- ▷ Distinguer axiome, définition, théorème, conjecture
- ▷ Reconnaître une proposition logique

Le « paradoxe du menteur » a fasciné les logiciens de l'Antiquité au XX^e siècle. Sa version moderne se cache dans la lettre de Russell.

DÉFINITION – PROPOSITION

Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé qui, dans une théorie donnée, admet une et une seule valeur de vérité : **vrai** ou **faux**. On la note souvent P , Q , R . . .

Exemple – Proposition ou non ?

- « 17 est un nombre premier » : proposition, vraie.
- « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » : proposition, fausse (nous le démontrerons en section 4).
- « Il pleuvra demain » : pas une proposition mathématique (indécidable aujourd'hui).
- « Je mens » : pas une proposition (ni vraie ni fausse, comme on vient de le voir).

1.2. La hiérarchie des énoncés

Un texte mathématique est peuplé d'énoncés aux statuts très différents. Les confondre, c'est ne plus savoir ce qui est admis, ce qui est démontré, et ce qui reste à prouver.

DÉFINITION – AXIOME, DÉFINITION, THÉORÈME, CONJECTURE

- Un **axiome** est un énoncé posé comme vrai au départ, sans démonstration : c'est une règle du jeu.
- Une **définition** donne un nom à un objet ou à une situation ; elle n'est ni vraie ni fausse, elle est une convention.
- Un **théorème** est un énoncé vrai, accompagné d'une **démonstration** qui le déduit des axiomes et des théorèmes déjà établis. Une **proposition** ou une **propriété** sont des théorèmes d'importance plus locale.
- Une **conjecture** est un énoncé que l'on pense vrai, mais que personne n'a encore démontré ni réfuté.

Exemple – Une conjecture vivante

En 1742, Christian Goldbach écrit à Euler : *tout nombre pair supérieur à 2 semble être la somme de deux nombres premiers*. Vérifiez : $28 = 5 + 23$, $100 = 3 + 97$. Des ordinateurs l'ont confirmé pour tous les nombres pairs jusqu'à 4×10^{18} . Et pourtant, presque trois siècles plus tard, **personne ne l'a démontré** : c'est toujours une conjecture. Nous y reviendrons, car cette nuance (vérifié des milliards de fois n'est pas démontré) est l'une des morales de ce chapitre.

Euclide (III^e s. av. J.-C.) fonde sa géométrie sur cinq axiomes seulement. Changer le cinquième, celui des parallèles, engendre d'autres géométries parfaitement cohérentes : celles des surfaces courbes. ♦

Euclide, *Éléments*

2. LES QUANTIFICATEURS

Les propositions intéressantes des mathématiques parlent rarement d'un seul objet. Elles affirment qu'une propriété vaut *pour tous* les éléments d'un ensemble, ou qu'il en *existe au moins un* qui la vérifie. Deux symboles suffisent à formaliser cela.

DÉFINITION – QUANTIFICATEURS

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété portant sur un élément x de E .

- Le **quantificateur universel** $\forall$ se lit « pour tout » : $\forall x \in E$, $P(x)$ signifie que *tous* les éléments de E vérifient P .
- Le **quantificateur existentiel** $\exists$ se lit « il existe (au moins un) » :

JALON

Je sais dire si un énoncé est un axiome,

OBJECTIFS

une définition, un théorème ou une conjecture.

▷ Lire et écrire $\forall$ et $\exists$

▷ Nier un énoncé quantifié

▷ Respecter l'ordre des quantificateurs

$\exists x \in E, P(x)$ signifie qu'au moins un élément de E vérifie P .

Exemple – Bien lire, bien écrire

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$: vraie.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0$: vraie ($x = -1$ convient).
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$: **fausse**. Un seul récalcitrant suffit : $x = 0$.

Ce dernier exemple est capital : pour démolir un « pour tout », un seul exemple contraire suffit. Ce sera notre *contre-exemple* (section 4).

Quantificateur : Le symbole $\forall$ est un *A retourné* (All), $\exists$ un *E retourné* (Exists). Ils datent des années 1897–1935.

Attention

L'ordre des quantificateurs change le sens. Comparez :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0 \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

La première est vraie : chaque x a son opposé ($y = -x$, qui dépend de x). La seconde est fausse : elle prétend qu'un *même* y neutralise tous les x à la fois. De même, dans une phrase en français, les quantificateurs ne servent jamais d'abréviations : ils appartiennent aux formules, pas aux phrases.

2.1. Nier un énoncé quantifié

Savoir nier proprement est la compétence la plus utile de ce chapitre : c'est elle qui dit *ce qu'il faut chercher* pour réfuter un énoncé.

PROPRIÉTÉ – NÉGATION DES QUANTIFICATEURS

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) = \exists x \in E, \text{non } P(x)$$

$$\text{non}(\exists x \in E, P(x)) = \forall x \in E, \text{non } P(x)$$

En niant, $\forall$ et $\exists$ s'échangent, et la propriété interne se nie.

MÉTHODE – NIER PAS À PAS

- ▷ 1. Repérer la structure : quantificateurs, puis propriété.
- ▷ 2. Échanger chaque $\forall$ contre un $\exists$ et réciproquement, *sans changer leur ordre*.
- ▷ 3. Nier la propriété finale (= devient $\neq$, $\leq$ devient $>$, etc.).

Exemple – Le Crétois d'Épiménide

La tradition prête au Crétois Épiménide la phrase « tous les Crétois sont des menteurs » et y voit un paradoxe. Vérifions avec notre

méthode. Notons $M(x)$: « x ment toujours ». L'énoncé s'écrit $\forall x \in \mathcal{C}, M(x)$. Sa négation est :

$\exists x \in \mathcal{C}, \text{non } M(x)$: il existe un Crétois qui dit parfois la vérité.

Si Épiménide ment, cette négation est vraie ; il suffit qu'un autre Crétois soit parfois honnête, ou même qu'Épiménide le soit une autre fois. Aucune contradiction : **le paradoxe s'évapore dès qu'on nie correctement**. La négation de « tous mentent » n'est pas « tous disent la vérité ».

3. LES CONNECTEURS LOGIQUES

3.1. Le test des quatre cartes

Avant toute théorie, une expérience. Quatre cartes sont posées devant vous ; chacune porte une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre.



On vous propose la règle suivante : *si une carte porte une voyelle d'un côté, alors elle porte un chiffre pair de l'autre*. **Quelles cartes faut-il retourner, au minimum, pour vérifier la règle ?** Prenez trente secondes avant de lire la suite.

La plupart des gens répondent « A et 4 ». La bonne réponse est **A et 7**. Le A, évidemment : s'il cache un chiffre impair, la règle tombe. Mais le 4 ne peut rien révéler : la règle ne dit rien des consonnes, et une consonne derrière le 4 ne la violerait pas. Le 7, lui, est décisif : *si une voyelle se cache derrière, la règle est morte*. Vous venez de rencontrer la contraposée. Ce que ce test montre, c'est que notre cerveau ne la voit pas spontanément ; ce chapitre est là pour corriger cela.

3.2. Et, ou, non

DÉFINITION – CONNECTEURS ÉLÉMENTAIRES

Soient P et Q deux propositions.

- « P **et** Q » est vraie lorsque P et Q sont vraies *simultanément*.
- « P **ou** Q » est vraie dès que *l'une au moins* l'est (ou inclusif : les deux à la fois, c'est permis).
- « **non** P » (notée $\overline{P}$) est vraie lorsque P est fausse.

JALON

Je sais nier un énoncé quantifié sans changer l'ordre des quantificateurs.

OBJECTIFS

- ▷ Manipuler et, ou, non
- ▷ Comprendre l'implication
- ▷ Distinguer réciproque et contraposée

Cette expérience, due au psychologue Peter Wason (1966), est l'un des tests de raisonnement les plus étudiés au monde : moins de 10 % des adultes donnent la bonne réponse.

Wason, 1966

PORTAIL ACT

ACT-A0 · Phases 1–4 ★

Le test des quatre cartes et sa version « contrôle d'âge ». ■

On résume tout dans une **table de vérité**, en balayant les quatre situations possibles :

P	Q	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	non P
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

PROPRIÉTÉ – LOIS DE DE MORGAN

Nier échange « et » et « ou » : ♦

$$\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q} \qquad \overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$$

Démonstration.

Exercice guidé : dressez la table de vérité de $\overline{P \text{ et } Q}$ (quatre lignes), puis celle de $\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$. Constatez qu'elles coïncident ligne à ligne ; c'est exactement ce que signifie l'égalité de deux propositions. La seconde loi se traite de même. ■

3.3. L'implication et ses deux sœurs

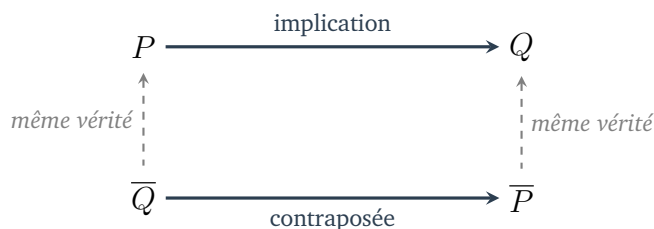
DÉFINITION – IMPLICATION, RÉCIPROQUE, CONTRAPOSÉE, ÉQUIVALENCE

Soient P et Q deux propositions.

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ affirme : si P est vraie, alors Q l'est aussi. Elle n'est fausse que dans un seul cas : P vraie et Q fausse.
- Sa **réci-proque** est $Q \Rightarrow P$: c'est une *autre* proposition, indépendante.
- Sa **contraposée** est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.
- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ signifie $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

George Boole, fils de cordonnier et autodidacte, n'a jamais été étudiant à l'université : il y entre directement comme professeur, à Cork en 1849. Son idée : calculer avec VRAI et FAUX comme avec 1 et 0. Son ami Augustus De Morgan formule les lois ci-contre.

Boole, Les Lois de la pensée, 1854



PROPRIÉTÉ – LE THÉORÈME CLÉ DE CE CHAPITRE

Une implication et sa contraposée sont **équivalentes** :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

Démontrer l'une, c'est démontrer l'autre. En revanche, **la réciproque est indépendante** : elle peut être vraie ou fausse quand l'implication est vraie.

Démonstration.

$P \Rightarrow Q$ n'est fausse que dans le cas (P vraie, Q fausse). Et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ n'est fausse que dans le cas ($\overline{Q}$ vraie, $\overline{P}$ fausse), c'est-à-dire... (Q fausse, P vraie) : exactement le même cas. Deux propositions fausses dans les mêmes situations et vraies dans les mêmes situations sont équivalentes. ■

Exemple – Sur le terrain

Prenons : « s'il pleut, le trottoir est mouillé » (vraie, admettons).

- *Contraposée* : « si le trottoir est sec, il ne pleut pas ». Vraie, automatiquement.
- *Réciproque* : « si le trottoir est mouillé, il pleut ». **Fausse** : pensez au voisin qui arrose.

Retour aux quatre cartes : la règle est « voyelle $\Rightarrow$ pair ». Sa contraposée, « impair $\Rightarrow$ consonne », est ce que teste la carte 7. La carte 4, elle, ne teste que la réciproque, dont la règle ne dit rien.

Attention

$P \Rightarrow Q$ vraie ne dit **rien** de $Q \Rightarrow P$. Confondre une implication et sa réciproque est l'erreur logique la plus fréquente en Terminale, notamment : « f dérivable $\Rightarrow f$ continue » est vraie, sa réciproque est fausse (vous verrez des fonctions continues non dérivables cette année).

4. L'ART DE LA DÉMONSTRATION : SIX RAISONNEMENTS

Vous connaissez maintenant le langage. Passons à l'action : comment *prouve-t-on* ? Voici les six outils qui vous serviront toute l'année, chacun avec son mode d'emploi et son exemple.

4.1. Le raisonnement direct

Le plus naturel : une chaîne d'implications qui part d'un fait établi et avance pas à pas vers la conclusion.

ÉCHO EXO

EXO-A0 · Ex. 4–6 ★★

Implication, réciproque, contraposée :
vrai ou faux. ■

JALON

Je sais énoncer la contraposée et la
réciproque d'une implication, et je ne les
confonds plus.

OBJECTIFS

- ▷ Choisir et rédiger un raisonnement
- ▷ Maîtriser la récurrence
- ▷ Réfuter par contre-exemple

Exemple – Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$

Partons d'un fait sûr : un carré est toujours positif. Pour tout réel x :

$$(x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + 1 \geq 2x}$$

Tout le travail créatif tenait dans le choix du point de départ : reconnaître $(x - 1)^2$ derrière $x^2 - 2x + 1$.

4.2. Le contre-exemple

Pour prouver qu'un énoncé universel est **faux**, inutile de longues pages : la négation de $\forall x, P(x)$ est $\exists x, \text{non } P(x)$. **Un seul témoin suffit.**

Exemple – Le polynôme trompeur d'Euler

Considérons $n^2 + n + 41$. Pour $n = 0$: 41, premier. Pour $n = 1$: 43, premier. Pour $n = 2$: 47, premier. Cela continue... jusqu'à $n = 39$: quarante nombres premiers d'affilée ! La conjecture « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41$ est premier » semble solide. Elle est fautive :

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \times 41 + 41 = 41^2.$$

Un seul contre-exemple, $n = 40$, et quarante confirmations n'y peuvent rien.

En 1966, Lander et Parkin réfutent une conjecture d'Euler vieille de deux siècles en exhibant $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$, trouvé par ordinateur. Leur article tient en deux phrases : l'un des plus courts de l'histoire des mathématiques. Quand on tient un contre-exemple, tout est dit.

Bull. AMS, 1966

4.3. La disjonction des cas

Quand une preuve directe se heurte à une propriété qui change de visage selon les valeurs (un signe, une parité), on découpe l'ensemble en morceaux et on traite chaque morceau.

Exemple – $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 3n$ est pair

Un entier est pair ou impair : deux cas, aucun oublié.

- Si $n = 2k$: $n^2 + 3n = 4k^2 + 6k = 2(2k^2 + 3k)$, pair.
- Si $n = 2k + 1$: $n^2 + 3n = 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 = 2(2k^2 + 5k + 2)$, pair.

Dans les deux cas, $n^2 + 3n$ est pair, donc c'est vrai pour tout n . $\square$

Une disjonction n'est valable que si les cas couvrent tout l'ensemble. Pair/impair, positif/négatif/nul : des découpages sans trou.

4.4. La contraposée

Parfois l'implication $P \Rightarrow Q$ résiste, mais sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ se laisse démontrer directement. Comme les deux sont équivalentes (section 3), le tour est joué.

Exemple – Si n^2 est pair, alors n est pair

Tentons l'attaque directe : « n^2 pair » donne $n^2 = 2k$, donc $n = \sqrt{2k} \dots$ et nous voilà coincés avec une racine carrée. Passons à la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair. Là, tout roule :

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \text{ impair.}$$

La contraposée est démontrée, donc l'implication aussi. $\square$

Retenez le signal : quand l'hypothèse est *pauvre* (n^2 pair, on sait peu de choses sur n) et la conclusion *riche*, la contraposée renverse la situation à votre avantage.

4.5. Le raisonnement par l'absurde

MÉTHODE – RAISONNER PAR L'ABSURDE

- ▷ 1. Supposer que la proposition à démontrer est **fausse** (c'est-à-dire supposer sa négation, bien écrite !).
- ▷ 2. En déduire, par un raisonnement valide, une **contradiction** : un énoncé manifestement faux.
- ▷ 3. Conclure : la supposition était intenable, la proposition est vraie.

Avant l'exemple roi, une mise en jambes visuelle. Tracez un carré de 12 cm de côté et mesurez sa diagonale : vous lirez 17 cm, à moins d'un tiers de millimètre près. Faut-il en conclure que $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$? Votre règle ne tranchera jamais ; seul un raisonnement le peut.

THÉORÈME – IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel : il n'existe aucun couple d'entiers p, q tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Démonstration.

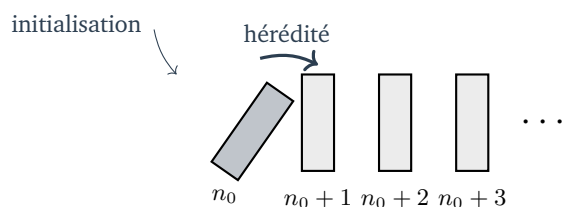
Exercice guidé ; chaque étape tient en une ligne, à vous de les justifier.

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers non nuls, la fraction étant irréductible.
2. Élevez au carré : montrez que $p^2 = 2q^2$.
3. Déduisez-en que p^2 est pair, puis, grâce à la contraposée démontrée plus haut, que p est pair : $p = 2k$.
4. Remplacez : montrez que $q^2 = 2k^2$, donc que q est pair lui aussi.
5. Concluez : p et q tous deux pairs contredisent l'irréductibilité de la fraction. La supposition s'effondre : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

La découverte de l'irrationalité, au V^e siècle avant notre ère, a ruiné le dogme pythagoricien « tout est nombre ». La légende veut qu'Hip-pase de Métaponte ait péri noyé pour l'avoir divulguée ; la noyade

4.6. La récurrence

Le dernier raisonnement est une machine à démontrer une infinité d'énoncés d'un coup : un pour chaque entier. Imaginez une file infinie de dominos. Pour être certain que *tous* tombent, deux vérifications suffisent : le premier tombe ; et chaque domino, en tombant, renverse le suivant.



THÉORÈME – PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n , et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

- **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Attention

L'hérédité doit être établie **pour tout** $n \geq n_0$, y compris le tout premier passage de n_0 à $n_0 + 1$. Vous verrez plus bas ce qui arrive quand un seul maillon manque.

Exemple – Montrer que $\forall n \geq 6, 2^n \geq 6n + 7$

Notons $P(n)$: « $2^n \geq 6n + 7$ ».

Initialisation. Pour $n = 6$: $2^6 = 64$ et $6 \times 6 + 7 = 43$. Comme $64 \geq 43$, $P(6)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 6$ un entier tel que $P(n)$ soit vraie ; montrons $P(n+1)$. En multipliant l'hypothèse de récurrence par 2 :

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(6n + 7) = 12n + 14 = [6(n+1) + 7] + (6n + 1).$$

Or $6n + 1 > 0$, donc $2^{n+1} \geq 6(n+1) + 7$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $P(6)$ est vraie et P est héréditaire à partir du rang 6 : par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \geq 6, 2^n \geq 6n + 7}$. $\square$

Et maintenant, la promesse : voici ce qui arrive quand l'hérédité a un trou.

Exemple – Tous les chevaux sont de la même couleur ?

« Démontrons » par récurrence que, dans tout groupe de n chevaux, tous ont la même robe. *Initialisation* : un groupe d'un cheval est bien unicolore. *Hérédité* : soit un groupe de $n+1$ chevaux. Retirons le dernier : les n premiers, par hypothèse, ont la même robe. Retirons plutôt le premier : les n derniers aussi. Les chevaux du milieu, com-

Pascal formalise la récurrence en vingt lignes dans son Traité du triangle arithmétique (rédigé en 1654, publié en 1665). L'idée circulait déjà vers l'an 1000 à Bagdad chez al-Karaji ; Pascal est le premier à isoler nettement les deux étapes que vous rédigez aujourd'hui.

Pascal, 1654

muns aux deux groupes, imposent alors la même couleur à tout le monde. Donc tous les chevaux du monde ont la même robe. . .

Où est la faille ? Relisez l'hérédité avec $n = 1$: deux chevaux, deux sous-groupes d'un cheval chacun, et **aucun cheval du milieu** pour transmettre la couleur. L'argument vaut pour $n \geq 2$, mais le passage de 1 à 2 est cassé. Une récurrence est une chaîne : un seul maillon rompu, même le premier, et rien ne tombe.

Remarque – Récurrences double et forte ♦

Certaines suites regardent deux crans en arrière (comme la suite de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) : l'hérédité suppose alors $P(n)$ et $P(n+1)$ pour prouver $P(n+2)$, et l'initialisation porte sur deux rangs. C'est la **récurrence double**, au cœur du DM de ce chapitre. La **récurrence forte** suppose, elle, tous les rangs précédents : c'est ainsi qu'on démontre par exemple que *tout entier* $n \geq 2$ *admet un diviseur premier* (si n n'est pas premier, il se factorise $n = ab$ avec $a, b < n$, et l'hypothèse s'applique à a). ★

Cette fausse récurrence est due à George Pólya (1954) ; la version équine, à Joel Cohen (1961). Elle vaut tous les sermons sur la rigueur de l'hérédité.

4.7. Quel raisonnement choisir ?

MÉTHODE – LA BOUSSOLE DES RAISONNEMENTS

Face à un énoncé à démontrer, posez-vous ces questions dans l'ordre :

- ▷ 1. L'énoncé dépend-il d'un entier n (une infinité de cas en escalier) ? → **récurrence**.
- ▷ 2. Voulez-vous montrer qu'un énoncé universel est *faux* ? → **contre-exemple**.
- ▷ 3. Une propriété change-t-elle de visage selon les valeurs (signe, parité) ? → **disjonction des cas**.
- ▷ 4. L'hypothèse est-elle pauvre et sa négation riche ? → **contraposée**.
- ▷ 5. La conclusion est-elle du type « n'existe pas », « est impossible » ? → **absurde**.
- ▷ 6. Sinon, tentez d'abord le **raisonnement direct** : c'est lui le plus fréquent.

CIBLE DA

DM-A0.1 · Parties 1–3 ★★★

Récurrence double, Fibonacci et la formule de Binet. ♦

ÉCHO EXO

EXO-A0 · Ex. 7–13 ★★★

Un exercice par raisonnement, puis des énoncés à l'aveugle. ■ ♦

JALON

Devant un énoncé, je sais proposer un raisonnement adapté et justifier ce choix.

5. LE LANGAGE DES ENSEMBLES

Un dernier morceau de langage avant de programmer. Les ensembles sont les récipients des mathématiques, et leurs opérations sont les connecteurs logiques déguisés.

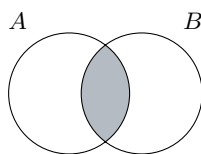
OBJECTIFS

- ▷ Manipuler $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$
- ▷ Relier ensembles et connecteurs

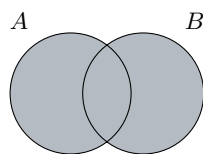
DÉFINITION – VOCABULAIRE DES ENSEMBLES

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

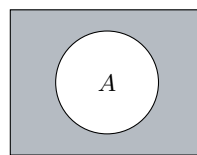
- $x \in A$: x **appartient** à A . $A \subset B$: A est **inclus** dans B (tout élément de A est dans B).
- $A \cap B$ (**intersection**) : les éléments qui sont dans A et dans B .
- $A \cup B$ (**réunion**) : les éléments qui sont dans A ou dans B .
- $\bar{A}$ (**complémentaire**) : les éléments de E qui ne sont pas dans A .
- $\emptyset$: l'**ensemble vide**; $\text{Card}(A)$: le **nombre d'éléments** de A (s'il est fini).
- $A \times B$ (**produit cartésien**) : l'ensemble des couples $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.



$A \cap B$: « et »



$A \cup B$: « ou »



$\bar{A}$: « non »

PROPRIÉTÉ – LE DICTIONNAIRE LOGIQUE-ENSEMBLES

Notons $A = \{x \in E \mid P(x)\}$ et $B = \{x \in E \mid Q(x)\}$ les ensembles où P et Q sont vraies. Alors :

Logique	Ensembles
P et Q	$A \cap B$
P ou Q	$A \cup B$
non P	$\bar{A}$
$P \Rightarrow Q$	$A \subset B$

Les lois de De Morgan se relisent alors : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. ♦

Exemple – La lettre de Russell, enfin

Nous pouvons maintenant lire la lettre de 1902. Russell y considère des ensembles qui peuvent contenir d'autres ensembles, et pose :

La ligne $P \Rightarrow Q \leftrightarrow A \subset B$ éclaire l'implication : « être dans A suffit pour être dans B ». La contraposée devient $\bar{B} \subset \bar{A}$: dessinez-le !

soit R l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Question : R se contient-il ? S'il se contient, il viole sa propre définition, donc il ne se contient pas. S'il ne se contient pas, il vérifie la définition, donc il se contient. C'est le paradoxe du menteur, réécrit dans le langage des ensembles ; et comme ce langage était le fondement du livre de Frege, tout l'édifice tremblait. La solution moderne : encadrer par des axiomes la formation des ensembles. Les règles du jeu, toujours. ★

6. PYTHON : LA BOÎTE À OUTILS DE L'ANNÉE

Pourquoi programmer dans un chapitre de logique ? Parce qu'un programme est de la logique en mouvement : des propositions (les tests), des connecteurs (and, or, not), des quantificateurs (vous allez voir), et une exigence de rigueur absolue, car la machine ne devine jamais votre intention. Nous installons ici, une fois pour toutes, les cinq briques qui serviront dans chaque chapitre de l'année.

6.1. Variables et types

Une **variable** est une étiquette posée sur une valeur. Python distingue les entiers (int), les flottants (float), les booléens (bool : True ou False, en écho à Boole) et les chaînes de caractères (str).

```
1 n = 41                # int
2 x = 1.5               # float
3 premier = True        # bool : Boole, 1 et 0, VRAI et
                        FAUX
4 nom = "Euler"         # str
```

6.2. Tests et connecteurs

L'instruction conditionnelle exécute un bloc si une proposition est vraie. Les connecteurs du paragraphe 3 s'écrivent and, or, not.

```
1 if n % 2 == 0 and n > 2:    # n pair ET n > 2
2     print("pair, supérieur a 2")
3 elif not (n % 2 == 0):     # negation : n impair
4     print("impair")
5 else:
6     print("n vaut 2")
```

OBJECTIFS

- ▷ Variables, conditions, boucles
- ▷ Écrire des fonctions
- ▷ Manipuler des listes

Algorithme : Du nom d'al-Khwārizmī, savant persan de Bagdad (IX^e siècle). Ses traducteurs latins ouvraient son traité par « Dixit Algorizmi ». Son autre livre, sur al-jabr (la « restauration »), a donné « algèbre ». Un homme, deux mots de ce chapitre.

Vérifiez les lois de De Morgan à la machine : `not (a and b) == ((not a) or (not b))` renvoie True pour les quatre valeurs possibles du couple.

6.3. Boucles : parcourir et attendre

La boucle `for` parcourt un ensemble fini de valeurs ; c'est l'outil des sommes et des vérifications systématiques. La boucle `while` répète tant qu'une condition reste vraie ; c'est l'outil des seuils.

```
1 S = 0
2 for k in range(1, 101):      # k parcourt 1, 2, ...,
    100
3     S = S + k**2            # somme des carres
4
5 n = 1
6 while 2**n < 10**6:          # tant que 2^n < 1 000
    000
7     n = n + 1                # a la sortie : 2^n >=
    10^6
```

6.4. Fonctions

Une fonction encapsule un calcul : des entrées, une sortie, un nom. C'est la brique de tout programme sérieux.

```
1 def est_premier(n):
2     if n < 2:
3         return False
4     for d in range(2, n):
5         if n % d == 0:
6             return False    # diviseur trouve
7     return True             # aucun diviseur
```

6.5. Listes, et les quantificateurs retrouvés

Une **liste** rassemble des valeurs ordonnées. Et Python offre deux fonctions qui devraient vous rappeler quelque chose : `all` (vrai si *tous* les éléments sont vrais) et `any` (vrai si *au moins un* l'est). Ce sont $\forall$ et $\exists$, en chair et en octets.

```
1 valeurs = [n**2 - n for n in range(100)]    # n^2 -
    n
2
3 all(v % 2 == 0 for v in valeurs)    # forall : True
4 any(v > 9000 for v in valeurs)      # exists : True
```

6.6. La chasse au contre-exemple

Assemblons tout. Réfuter une conjecture, c'est exhiber un témoin : voilà une tâche taillée pour une machine qui teste un million de cas par seconde.

```
1 def contre_exemple(P, N):
2     """Cherche n < N tel que P(n) soit fausse."""
```

```

3     for n in range(N):
4         if not P(n):
5             return n          # témoin : réfutée !
6     return None              # aucun témoin trouvé
7
8 # Le polynôme d'Euler tombe en une milliseconde :
9 contre_exemple(lambda n: est_premier(n**2 + n + 41),
10                100)         # -> 40

```

Attention

Méditez la ligne `return None` : quand la machine ne trouve **pas** de contre-exemple, elle n'a **rien démontré**. La conjecture de Syracuse a été vérifiée pour tous les entiers jusqu'à 2^{71} (plus de deux mille milliards de milliards) : elle n'est toujours pas démontrée, car $\forall n$ porte sur une infinité de cas. Et souvenez-vous du polynôme d'Euler, vrai quarante fois avant de mentir. **L'ordinateur réfute ; seule la démonstration prouve.**

En 1903, F. N. Cole présente à l'American Mathematical Society, sans prononcer un mot, la factorisation $2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \times 761\,838\,257\,287$, fruit, racontera-t-on, de trois ans de dimanches. Aujourd'hui : $193707721 * 761838257287 == 2^{67} - 1$ répond *True* en une microseconde.

Cole, 1903

ÉCHO EXO

EXO-A0 · Ex. 14–16 ★★

Écrire `est_premier`, chasser des contre-exemples, explorer Syracuse.



JALON

Je sais écrire une fonction Python avec test, boucle et retour, et je sais ce qu'un programme peut et ne peut pas prouver.

Fin du chapitre

[ACT-A0] [EXO-A0] [DM-A0.1] [FLASH-A0]