



DM 2 · A0. LA DIAGONALE INTERDITE

Du scandale pythagoricien à la méthode merveilleuse de Fermat

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. Trois preuves pour un scandale	△▲	les préliminaires
II. La méthode merveilleuse	▲	R1 et la question Q2
III. Le zoo des irrationnels	▲◆	la question Q8
IV. Le sommet : l'existence sans témoin	◆	tout ce qui précède

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Le nombre qui n'aurait pas dû exister

CINQ siècles avant notre ère, la confrérie de Pythagore tient le monde dans une devise : tout est nombre, et tout rapport de grandeurs est un rapport d'entiers. Puis quelqu'un regarde la diagonale d'un carré, et l'édifice tremble : aucune fraction, jamais, n'en mesure la longueur. La tradition attribue la découverte à Hippase de Métaponte, et raconte qu'il aurait péri noyé pour l'avoir divulguée. L'histoire de la noyade est une légende rapportée huit siècles plus tard ; la découverte, elle, est attestée, et elle a changé les mathématiques. Car pour affirmer qu'aucune fraction ne convient, il ne suffit pas d'en essayer beaucoup : il faut démontrer un « jamais ». Ce devoir est consacré à cet art, et à son outil le plus élégant, que Fermat appellera sa « méthode merveilleuse » : la descente infinie.

△ Q1. Vérifier que $1,414^2 < 2 < 1,415^2$. Expliquer ensuite pourquoi aucune calculatrice, si précise soit-elle, ne pourra jamais trancher la question « $\sqrt{2}$ est-il un rapport d'entiers ? » : que peut-elle afficher, et que faudrait-il vérifier ?

Notations et outils. Un rationnel est un réel de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; on peut toujours choisir la fraction irréductible (aucun entier ≥ 2 ne divise à la fois p et q). Un réel non rationnel est dit irrationnel. On rappelle que n est pair s'il s'écrit $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, impair s'il s'écrit $2k + 1$.

R1 – PRINCIPE DU BON ORDRE

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. (*Admis : c'est le socle de tout le devoir.*)

R2 – PRINCIPE DE RÉCURRENCE FORTE

Soit P_n une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si P_0 est vraie, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $((P_0 \text{ et } \dots \text{ et } P_n) \text{ implique } P_{n+1})$, alors P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (*Admis ; le DM 1 l'explore en détail, mais ce devoir s'en sert de façon autonome.*)

▲ **Q2.** Dédurre de R1 qu'il n'existe **aucune** suite (u_n) d'entiers naturels strictement décroissante. (Raisonnement par l'absurde en considérant l'ensemble des valeurs de la suite.) (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

C'est le moteur de tout ce qui suit : si chaque exemple en fabrique un strictement plus petit, alors il n'y a aucun exemple.

PARTIE I

s'appuie sur les préliminaires

Trois preuves pour un scandale

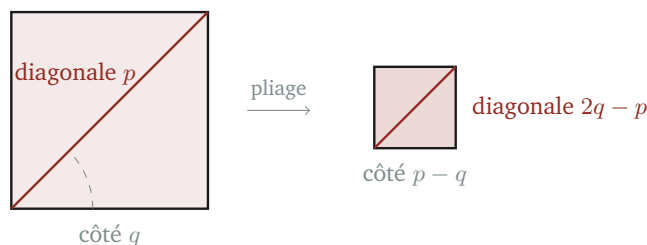
Un théorème capital mérite plusieurs démonstrations : chacune éclaire une facette. En voici trois pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire pour l'énoncé : *aucun couple $(p; q)$ d'entiers naturels non nuls ne vérifie $p^2 = 2q^2$.*

△ **Q3. La preuve du chapitre.** Rédiger entièrement, *de mémoire et sans consulter le cours*, la démonstration par l'absurde vue en classe (parité de p , puis de q , contradiction avec l'irréductibilité). Comparer ensuite avec le cours : chaque étape était-elle justifiée ?

Q4. Deuxième preuve : le chiffre des unités. On suppose par l'absurde que $p^2 = 2q^2$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible.

- △ Dresser la table du chiffre des unités de n^2 selon le chiffre des unités de n . En déduire que le chiffre des unités d'un carré appartient à $\{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$.
- ▲ Montrer que le chiffre des unités de $2q^2$ appartient à $\{0; 2; 8\}$.
- ▲ En déduire que p^2 et $2q^2$ se terminent par 0, puis que 5 divise p et q . Conclure.

Q5. Troisième preuve : le carré qui rétrécit. On suppose qu'il existe un carré dont le côté q et la diagonale p sont des entiers naturels non nuls. En repliant un coin du carré le long d'un pli bien choisi (figure), on fait apparaître un carré plus petit dont le côté vaut $p - q$ et la diagonale $2q - p$; on admet cette lecture géométrique.



Le pliage du coin : du carré $(q; p)$ naît un carré $(p - q; 2q - p)$, entier lui aussi, et strictement plus petit.

- ▲ Contrôle algébrique de la figure : montrer que si $q\sqrt{2} = p$, alors $(p - q)\sqrt{2} = 2q - p$.

- b) ▲ Montrer que $q < p < 2q$ (on pourra comparer p^2 à q^2 et à $4q^2$), et en déduire que le nouveau côté vérifie $0 < p - q < q$.
- c) ▲ Conclure à l'aide de Q2 : aucun tel carré n'existe, et $\sqrt{2}$ est irrationnel.

LA PLUS VIEILLE PREUVE DU MONDE, AN 2000

Cette descente géométrique circulait, sous forme de triangle, chez les Grecs ; le mathématicien Tom Apostol en a publié une variante limpide en... l'an 2000, dans l'*American Mathematical Monthly*. Une preuve peut avoir deux mille cinq cents ans et rester une nouvelle.

PARTIE II

s'appuie sur R1 et la question Q2

La méthode merveilleuse

Le 14 août 1659, Pierre de Fermat écrit à son ami Carcavi pour décrire la méthode dont il est le plus fier, qu'il nomme *descente infinie* ou *indéfinie*. Le schéma, en langage moderne, tient en trois temps : pour prouver qu'aucun entier n'a une certaine propriété, on associe à chaque exemple hypothétique une **taille** (un entier naturel) ; on montre que de tout exemple on peut **fabriquer un exemple strictement plus petit** ; et l'on conclut par Q2 : la chute sans fin est impossible, donc il n'y avait aucun exemple.

▲ **Q6. Relecture.** Pour chacune des trois preuves de la partie I, identifier précisément : quelle est la taille ? comment fabrique-t-on l'exemple plus petit ? (Pour Q3 et Q4, on pourra remarquer que « fraction irréductible » cache un plus petit élément : lequel ?)

▲ **Q7.** Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. (Adapter la preuve par parité : montrer d'abord que si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3, résultat démontré à l'exercice 16 de la feuille, par disjonction $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$.)

◆ **Q8. Le théorème général.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\sqrt{n}$ est soit un entier naturel, soit un irrationnel. On suppose $\sqrt{n}$ rationnel, et l'on considère l'ensemble $A = \{q \in \mathbb{N}^* : q\sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$.

- Justifier que A est non vide, puis (R1) qu'il possède un plus petit élément q_0 .
- On note e la partie entière de $\sqrt{n}$, c'est-à-dire l'entier tel que $e \leq \sqrt{n} < e + 1$, et l'on pose $r = q_0\sqrt{n} - q_0 e$. Vérifier que $r \in \mathbb{N}$ et que $0 \leq r < q_0$.
- Montrer que $r\sqrt{n} = q_0 n - e(q_0\sqrt{n})$ est un entier naturel.
- En déduire que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors $r \in A$ avec $r < q_0$: contradiction. Conclure. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

Q9. Le piège de la somme.

- △ Le théorème Q8 dit que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels. Permet-il d'en déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ l'est ? (Penser à l'exercice 16 de la feuille : la somme de deux irrationnels peut être rationnelle.)
- ▲ Le démontrer vraiment : supposer $s = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationnel, calculer s^2 , en déduire que $\sqrt{6}$ serait rationnel, et conclure avec Q8.

Le zoo des irrationnels

L'irrationalité n'est pas une curiosité de racines carrées : elle traverse les logarithmes, le nombre d'or, les équations. Trois spécimens, trois techniques.

▲ **Q10. Un logarithme.** On rappelle que $\log_2 3$ est le réel $x > 0$ tel que $2^x = 3$. Montrer que $\log_2 3$ est irrationnel. (Supposer $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, élever à la puissance q , et opposer pair et impair.)

Q11. La descente du nombre d'or. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

a) △ Justifier que $1 < \varphi < 2$ et que $\varphi^2 = \varphi + 1$ (calcul direct, ou renvoi au DM 1).

b) ▲ En déduire que $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$.

c) ◆ On suppose φ rationnel, et l'on choisit une écriture $\varphi = \frac{p}{q}$ dont le dénominateur q est le plus petit possible (pourquoi existe-t-il?). Montrer qu'alors $\varphi = \frac{q}{p - q}$, avec $0 < p - q < q$. Conclure.

◆ **Q12. Une équation qui s'effondre.** On veut montrer que l'équation

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$$

n'a aucune solution en entiers autres que $x = y = z = 0$. On suppose qu'il en existe une, $(x; y; z) \neq (0; 0; 0)$.

a) Montrer que x est pair. (Le cube d'un impair est impair : conséquence de l'exercice 9 de la feuille, le produit d'impairs.)

b) On pose $x = 2a$. Montrer que l'équation devient $4a^3 + y^3 + 2z^3 = 0$, puis que y est pair, puis, en posant $y = 2b$, que z est pair.

c) En posant $z = 2c$, vérifier que $(a; b; c)$ est une solution de l'équation de départ, non nulle, avec $|a| + |b| + |c| < |x| + |y| + |z|$.

d) Conclure par descente infinie.

Le sommet : l'existence sans témoin

Tout ce devoir a démontré des « jamais ». Le dernier mouvement renverse la perspective : démontrer un « il existe »... sans jamais dire qui.

◆ **Q13. La disjonction légendaire.** On pose $t = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, et l'on veut démontrer l'énoncé suivant : *il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel*. On rappelle la règle $(x^y)^z = x^{yz}$ (pour $x > 0$).

a) Cas 1 : t est rationnel. Trouver a et b qui conviennent.

b) Cas 2 : t est irrationnel. Calculer $t^{\sqrt{2}}$, et trouver a et b qui conviennent.

c) Conclure. Puis répondre honnêtement : la démonstration dit-elle dans quel cas nous sommes ? Que faudrait-il, pour le savoir ?

LE FIN MOT, POUR LES CURIEUX

Le théorème de Gelfond et Schneider (1934) tranche : t est en réalité irrationnel (et même transcendant), c'est donc le cas 2 qui est le vrai. Mais la beauté de la question Q13 est précisément de s'en passer : une disjonction des cas peut prouver une existence sans identifier le témoin. Certains mathématiciens, dits constructivistes, refusent ce genre de preuve ; la controverse est toujours vivante.

♦ **Q14. Le panorama, en trois lignes.** Rédiger un court bilan comparant : réfuter un énoncé universel (qu'exhibe-t-on ?), démontrer un « jamais » (quelle machine avons-nous utilisée dans ce devoir ?), démontrer un « il existe » (faut-il toujours un témoin ?).

Le voyage s'achève à la frontière : Johann Lambert prouve en 1761 que π est irrationnel ; Charles Hermite, en 1873, que e est transcendant ; Roger Apéry, en 1978, arrache l'irrationalité de $\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ devant une salle incrédule. Et aujourd'hui encore, personne au monde ne sait si $\pi + e$ est irrationnel. La frontière de la connaissance passe au milieu de nombres qui s'écrivent en une ligne.



Vingt-cinq siècles de « jamais », et une question toujours ouverte.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2. L'ensemble $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: R1 lui donne un plus petit élément u_N . Que dire alors de u_{N+1} ?

Q4a. Il suffit d'examiner les dix chiffres possibles : $0^2, 1^2, \dots, 9^2$.

Q4c. Un carré qui se termine par 0 est le carré d'un multiple de 10 ; et si $2q^2$ finit par 0, alors q^2 finit par 0 ou 5.

Q5b. $p^2 = 2q^2$ donne $q^2 < p^2 < 4q^2$; passer aux racines carrées, qui conservent l'ordre des positifs.

Q6. Dans Q3 et Q4, l'irréductibilité s'obtient en choisissant, parmi toutes les écritures p/q , celle dont le dénominateur est minimal : R1 encore.

Q7. Si 3 divise p^2 , alors 3 divise p (exercice 16 de la feuille) ; écrire $p = 3r$ et faire rejaillir la même équation sur $(q ; r)$.

Q8b. $r = q_0(\sqrt{n} - e)$, et $0 \leq \sqrt{n} - e < 1$; si de plus $\sqrt{n}$ n'est pas entier, l'inégalité de gauche est stricte.

Q8c. Remplacer r par sa définition et développer : les deux termes obtenus sont entiers.

Q9b. $s^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $\sqrt{6} = \frac{s^2-5}{2}$ serait rationnel. Or 6 n'est pas un carré parfait.

Q10. $2^{p/q} = 3$ donne $2^p = 3^q$. Le membre de gauche est pair dès que $p \geq 1$; le membre de droite est un produit d'impairs.

Q11c. Remplacer φ par $\frac{p}{q}$ dans $\varphi = \frac{1}{\varphi-1}$ et simplifier l'étage ; les inégalités de a) encadrent $p - q$.

Q12b. Après division par 2, isoler à chaque fois le cube de parité forcée. La cascade touche x , puis y , puis z .

Q13b. $t^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$.

ANNEXE • LE LABORATOIRE PYTHON

Trois expériences, et une morale : la machine encadre, cherche et échoue ; elle ne démontre pas un « jamais ».

```

1  def dichotomie(n, precision):
2      """Encadre la racine de n a precision pres... sans jamais conclure."""
3      a, b = 0, n
4      while b - a > precision:
5          m = (a + b) / 2
6          if m * m < n:
7              a = m
8          else:
9              b = m
10         return a, b
11
12 # Force brute sur  $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 0$  : aucune solution non nulle
13 # dans  $[-50, 50]^3$ ... ce qui ne prouve rien (voir Q12 pour la preuve).
14 solutions = [(x, y, z)
15               for x in range(-50, 51)
16               for y in range(-50, 51)
17               for z in range(-50, 51)
18               if x**3 + 2*y**3 + 4*z**3 == 0 and (x, y, z) != (0, 0, 0)]
19 print(solutions)    # -> []
20

```

```
21 # L'entier qui ne s'annule jamais :  $p^2 - 2q^2$  vaut au mieux 1 en  
22 # valeur absolue (conséquence de Q3 : jamais 0).  
23 print(min(abs(p*p - 2*q*q)  
24           for q in range(1, 1000)  
25           for p in range(1, 2*q)))    # -> 1
```

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les preuves de Lambert et d'Apéry racontées, la controverse constructiviste et la chasse aux irrationnels vous attendent sur le compagnon numérique.

DM A0.2 · ANNÉE 2026-2027