



# A1. SUITES : LIMITES

*Deux sommes jumelles : l'une explose, l'autre s'arrête*

|                                                                         |                                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>TABLE DES MATIÈRES</b>                                               | <b>4. LA SUITE GÉOMÉTRIQUE, PIÈCE MAÎTRESSE</b>                             | <b>11</b> |
|                                                                         | 4.1. Le lemme, revenu d'AO. . . . .                                         | 11        |
|                                                                         | 4.2. Deuxième démonstration exigible : la limite de $q^n$ . . . . .         | 11        |
|                                                                         | 4.3. Sommer une géométrique. . . . .                                        | 12        |
|                                                                         | 4.4. Archimède, vingt-trois siècles d'avance . . .                          | 13        |
|                                                                         | 4.5. Quand la limite est un plateau . . . . .                               | 14        |
| <b>1. CHANGER DE REGARD</b>                                             | <b>5. LE THÉORÈME QUI RÉPOND À LA QUESTION</b>                              | <b>14</b> |
| 1.1. Le bagage de première, en une page . . . . .                       | 5.1. Troisième démonstration exigible : croissante et non majorée . . . . . | 15        |
| 1.2. Ce que « grandir » veut dire . . . . .                             | 5.2. Le théorème de la limite monotone. . . . .                             | 15        |
| 1.3. Un penny, et le monde en or . . . . .                              | 5.3. Oresme : la somme qui n'en finit pas . . . .                           | 16        |
| <b>2. DÉFINIR LA LIMITE</b>                                             | 5.4. Une divergence d'une lenteur inouïe . . . .                            | 17        |
| 2.1. Trois comportements, pas deux . . . . .                            | 5.5. Le porte-à-faux impossible . . . . .                                   | 17        |
| 2.2. La définition . . . . .                                            | 5.6. Bâle : converger sans savoir vers quoi . . .                           | 18        |
| 2.3. Ce que « à partir d'un certain rang » autorise. . . . .            | 5.7. Et l'existence de $e$ , au passage . . . . .                           | 19        |
| 2.4. Limites de référence . . . . .                                     | <b>6. SUITES RÉCURRENTES, SEUILS ET MACHINES</b>                            | <b>20</b> |
| 2.5. Première démonstration exigible : pousser par en dessous . . . . . | 6.1. La racine carrée, depuis quatre mille ans . .                          | 20        |
| <b>3. CALCULER UNE LIMITE</b>                                           | 6.2. Chercher un seuil . . . . .                                            | 21        |
| 3.1. Les opérations . . . . .                                           | 6.3. Retour au plateau . . . . .                                            | 22        |
| 3.2. Trois fois $\infty - \infty$ , trois réponses . . . . .            | <b>LA RÉPONSE D'EULER</b>                                                   | <b>23</b> |
| 3.3. Encadrer : le théorème des gendarmes . . .                         |                                                                             |           |

## PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. »

Augustin-Louis Cauchy, Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, 1821

Vers 1350, au Collège de Navarre à Paris, un maître ès arts nommé Nicole Oresme, futur évêque de Lisieux, pose sur le papier une affirmation qui a de quoi surprendre : si l'on additionne  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  en poursuivant indéfiniment, on finit par dépasser *n'importe quel* nombre que l'on voudra bien nommer. Cent, mille, un milliard. Et il le démontre, en une demi-page d'une astuce parfaite. Puis son manuscrit disparaît dans les rayons du Vatican, où il dormira six siècles avant d'être redécouvert à la fin des années 1930 et publié en 1961.

Trois siècles plus tard, on s'intéresse à une somme bâtie exactement sur le même modèle, avec des carrés au dénominateur :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

Celle-là refuse obstinément de grandir. Elle reste coincée sous 2. Pietro Mengoli la propose en 1644, Jakob Bernoulli s'y casse les dents et avoue publiquement son échec en 1689, et il faut attendre 1735 pour qu'un jeune homme de vingt-huit ans, un certain Leonhard Euler, annonce la réponse. Voilà deux sommes construites de la même façon : des termes de plus en plus petits, qui tendent tous les deux vers zéro, qu'on ajoute sans jamais s'arrêter. L'une explose, l'autre s'arrête. **Comment savoir laquelle fait quoi, avant de connaître la réponse ?**

Ce chapitre répond à cette question. Il vous donnera un théorème qui garantit qu'une limite *existe* sans jamais dire laquelle : Euler a mis des années à trouver la valeur, mais le théorème, lui, savait immédiatement qu'il y avait quelque chose à trouver. Quant à la réponse d'Euler, vous la découvrirez à la dernière page.

*Le traité d'Oresme, les Questiones super geometriam Euclidis, contient d'autres résultats en avance de plusieurs siècles sur leur temps. Personne ne les a lus avant le XX<sup>e</sup> siècle.*

Redécouvert vers 1938, publié en 1961

## 1. CHANGER DE REGARD

En première, vous avez appris à *calculer* des termes : trouver  $u_{20}$ , reconnaître une raison, sommer vingt termes. Cette année, la question change. Elle devient : *et au bout ?* Non pas le vingtième terme, ni le millionième, mais ce vers quoi la suite se dirige quand on la laisse courir. C'est le point de vue **asymptotique**, et c'est un tout autre métier.

### OBJECTIFS

- ▷ Réactiver les suites de première
- ▷ Majorer, minorer, borner
- ▷ Passer du terme au comportement

**Asymptotique** : Du grec *asumptōtos*, « qui ne coïncide pas ». Étudier le comportement asymptotique, c'est décrire la tendance sans jamais l'atteindre.

### 1.1. Le bagage de première, en une page

*Remarque – Réactivation · tout ceci est supposé acquis*

Une suite  $(u_n)$  est une fonction définie sur un **ensemble d'indices**  $I = [n_0 ; +\infty[ \cap \mathbb{N}$  (avec  $n_0 \in \mathbb{N}$ , et le plus souvent  $I = \mathbb{N}$ ), à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Un tel  $I$  est toujours **infini**, et ce n'est pas un détail : c'est ce qui donne un sens à la question « et au bout ? ». Dans tout le chapitre,  $I$  désigne un ensemble d'indices de cette forme. Deux modes de définition :

— **terme général** (ou forme explicite) :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ , on calcule

directement ;

— **réurrence** : un premier terme, et une relation liant  $u_{n+1}$  à  $u_n$ .

|                          | Arithmétique                   | Géométrie                                        |
|--------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------|
| Relation                 | $u_{n+1} = u_n + r$            | $u_{n+1} = q u_n$                                |
| Terme général            | $u_n = u_0 + nr$               | $u_n = u_0 q^n$                                  |
| D'un rang à l'autre      | $u_n = u_p + (n - p)r$         | $u_n = u_p q^{n-p}$                              |
| Somme $\sum_{k=0}^n u_k$ | $\frac{(u_0 + u_n)(n + 1)}{2}$ | $u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$ |

Sens de variation : on compare  $u_{n+1}$  et  $u_n$ . Le plus souvent, on étudie le **signe de**  $u_{n+1} - u_n$  ; pour une suite à termes strictement positifs, on peut comparer le **quotient**  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

*Ces automatismes s'entretiennent, ils ne se relisent pas. Les fiches du Cahier de calcul consacrées aux suites sont là pour ça : quelques minutes régulières valent mieux qu'une relecture avant le contrôle.*

## 1.2. Ce que « grandir » veut dire

Avant de parler de limite, il faut du vocabulaire pour dire si une suite reste sage ou part à l'aventure.

### DÉFINITION – MAJORANT, MINORANT, SUITE BORNÉE

Soient  $I$  un ensemble d'indices infini (voir 1.1) et  $(u_n)_{n \in I}$  une suite réelle.

- $(u_n)$  est **majorée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in I, u_n \leq M$ .  
Un tel  $M$  est un **majorant**.
- $(u_n)$  est **minorée** s'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in I, u_n \geq m$ .  
Un tel  $m$  est un **minorant**.
- $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

### Attention

Deux réflexes à installer tout de suite.

1. Un majorant est un **nombre réel fixe**. Une quantité qui dépend de  $n$  n'est pas un majorant : écrire «  $u_n \leq n + 3$  donc  $(u_n)$  est majorée » n'a aucun sens.
2. Un majorant n'est **jamais unique**. Si  $M$  majore, alors  $M + 1$ ,  $M + 100$  et  $M + 10^{12}$  majorent aussi. Le majorant que vous exhibez n'a aucune raison d'être la limite : nous verrons au paragraphe 5 un cas où l'écart est spectaculaire.

*Exemple – Bornée ne veut pas dire monotone*

Soit  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ , donc  $|u_n| \leq 2$ , c'est-à-dire  $-2 \leq u_n \leq 2$  : la suite est bornée. Pourtant elle saute d'un signe à

l'autre à chaque rang : elle n'est ni croissante, ni décroissante. Bornée et monotone sont deux propriétés indépendantes.

### 1.3. Un penny, et le monde en or

CONTEXTE HISTORIQUE – RICHARD PRICE, 1772

En 1772, le philosophe et actuaire gallois Richard Price plaide devant l'opinion britannique pour un fonds d'amortissement de la dette publique. Son argument est arithmétique. Un penny placé à la naissance du Christ à 5 % d'intérêt composé, écrit-il, se serait multiplié au point de produire plus d'or que n'en contiendraient **cent cinquante millions de globes de la taille de la Terre, tous en or massif**. Et il ajoute, pour faire bonne mesure, qu'un shilling placé à 6 % dépasserait une sphère d'or du diamètre de l'orbite de Saturne.

Le calcul est juste. C'est l'économie qui ne suit pas : Marx s'en moquera un siècle plus tard, en faisant observer qu'aucune société n'a jamais produit de quoi honorer une telle créance.

Ce que Price met en scène, c'est la différence de nature entre deux croissances. Une suite arithmétique ajoute toujours la même chose : elle monte le long d'une droite. Une suite géométrique de raison  $q > 1$  multiplie : elle finit par écraser tout ce qui l'entoure, y compris les nombres qui semblaient l'écraser au départ. Toute la suite de ce chapitre repose sur ce contraste.

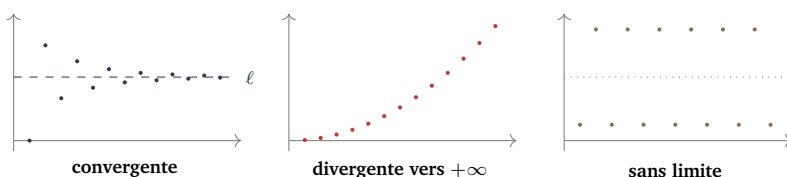
#### JALON

*Je sais dire si une suite est majorée, minorée, bornée, et je n'appelle jamais « majorant » une expression qui dépend de  $n$ .*

## 2. DÉFINIR LA LIMITE

### 2.1. Trois comportements, pas deux

Lâchez une suite et regardez-la courir. Trois scénarios, et trois seulement.



#### OBJECTIFS

- ▷ Écrire une définition quantifiée
- ▷ Distinguer les trois comportements
- ▷ Exploiter « à partir d'un certain rang »

Le troisième cas est celui qu'on oublie, et c'est une faute lourde : **une suite qui ne converge pas ne tend pas forcément vers l'infini**. Elle peut simplement refuser de se décider.

CONTEXTE HISTORIQUE – GRANDI, 1703, ET UNE SUITE QUI REND FOU

En 1703, le père Luigi Guido Grandi, alors professeur de philosophie à Pise, considère la suite des sommes de  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Ces sommes valent 1, puis 0, puis 1, puis 0... indéfiniment. Grandi applique alors la formule de la somme géométrique avec  $q = -1$  et trouve  $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ . Euler lui-même, par d'autres manipulations, retrouve  $\frac{1}{2}$ .

Un demi ? Une somme de nombres entiers qui vaudrait  $\frac{1}{2}$  ? Le débat occupera

les mathématiciens pendant deux siècles. La leçon, elle, est immédiate : **on n'a pas le droit de manipuler une somme dont on n'a pas d'abord prouvé qu'elle converge**. La suite  $((-1)^n)$  n'a pas de limite, et c'est tout.

## 2.2. La définition

Nous allons dire les choses deux fois : d'abord avec des symboles, ensuite avec des mots. Les deux énoncés disent *exactement* la même chose. Le premier est celui que vous retrouverez dans l'enseignement supérieur ; le second est celui que vous lirez dans un sujet de baccalauréat. Autant les posséder tous les deux.

### DÉFINITION – CONVERGENCE VERS UN RÉEL

Soient  $(u_n)$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $(u_n)$  **converge vers**  $\ell$  lorsque :

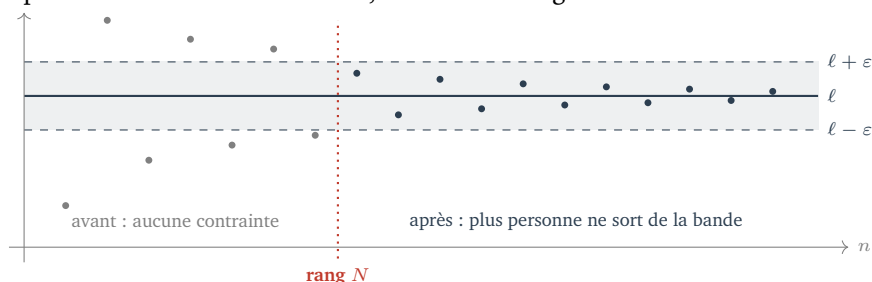
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , ou  $u_n \rightarrow \ell$ . Une suite qui converge vers un réel est dite **convergente** ; sinon elle est **divergente**.

### Attention – Le quantificateur qu'on oublie

Le  $\forall n \geq N$  est le cœur de la définition, et c'est celui qu'on escamote. Écrire  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| < \varepsilon$  signifierait que *tous* les termes, dès le premier, sont à moins de  $\varepsilon$  de  $\ell$  : ce serait une tout autre propriété, et elle serait fausse pour presque toutes les suites convergentes. La convergence ne dit rien du début de la suite. Elle ne parle que de sa fin.

Lisez la définition comme un défi en deux temps. Quelqu'un vous impose une tolérance  $\varepsilon$ , aussi minuscule qu'il le souhaite. Vous devez répondre par un rang  $N$ , à partir duquel *plus aucun* terme ne s'écarte de  $\ell$  de plus de  $\varepsilon$ . Si vous savez répondre à toutes les tolérances, la suite converge.



### Remarque – Deux façons de dire la même chose

La bande grisée de la figure,  $]l - \varepsilon ; l + \varepsilon[$ , est un intervalle ouvert contenant  $\ell$ . Et réciproquement, tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient une bande de ce type. D'où la formulation équivalente, celle des programmes et des sujets :

$(u_n)$  converge vers  $\ell$  lorsque tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

#### DÉFINITION – DIVERGENCE VERS L'INFINI

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{lorsque} \quad \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{lorsque} \quad \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < -A$$

Autrement dit : tout intervalle  $[A ; +\infty[$  (respectivement  $]-\infty ; -A]$ ) contient tous les termes à partir d'un certain rang.

*Exemple – Répondre au défi, pour de vrai*

Montrons que la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$  converge vers 0. Soit  $\varepsilon > 0$ . Cherchons à partir de quel rang  $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ . Comme  $n > 0$ , cela s'écrit  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , c'est-à-dire  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Il suffit donc de poser  $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$  : pour tout  $n \geq N$ , on a bien  $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ .

Le défi est relevé pour toute tolérance, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Concrètement, pour  $\varepsilon = 10^{-3}$ , le rang  $N = 1001$  convient.

*Cauchy, en 1821, définit la limite en français, sans un seul symbole (voir la page de garde). Il faudra attendre Weierstrass, vers 1861, pour que le  $\varepsilon$  apparaisse sous la forme que vous venez de lire. Quarante ans pour transformer une phrase en formule.*

Cauchy 1821, Weierstrass 1861

### 2.3. Ce que « à partir d'un certain rang » autorise

Cette clause a l'air anodine. Elle est en réalité d'une tolérance redoutable : une suite peut se comporter n'importe comment pendant très, très longtemps sans que sa limite en soit affectée.

#### Attention – La suite qui trompe la calculatrice ♦

Considérons la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^{100}}{2^n}$ .

Explorez-la numériquement. Elle **croît**. Elle croît au rang 10, au rang 50, au rang 100. Elle atteint son maximum au rang 144, où elle vaut environ  $3 \times 10^{172}$ , un nombre qui dépasse de loin le nombre d'atomes de l'univers observable. Toute conjecture raisonnable tirée de ces valeurs dirait : cette suite tend vers  $+\infty$ .

Elle tend vers 0. Au rang 1000, elle vaut déjà moins de 0,1 ; au rang 2000, environ  $10^{-272}$ .

Aucune exploration numérique ne pouvait le deviner, parce que le comportement asymptotique commence là où les tableurs s'arrêtent. Nous le démontrerons dans le chapitre F1, avec les croissances comparées. Retenez dès maintenant la morale : **en analyse, calculer n'est pas démontrer.**

SUITE  $\longrightarrow$

F1 · Limites de fonctions et continuité

Les croissances comparées y régleront le sort de  $\frac{n^{100}}{2^n}$ .

## 2.4. Limites de référence

### PROPRIÉTÉ – LES BRIQUES DE BASE

Pour tout entier  $k \geq 1$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0.$$

Ces limites se démontrent toutes sur le modèle de l'exemple ci-dessus : on se donne  $\varepsilon$  (ou  $A$ ), on résout l'inégalité, on exhibe le rang.

## 2.5. Première démonstration exigible : pousser par en dessous

### THÉORÈME – DIVERGENCE PAR MINORATION

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que  $v_n \leq u_n$  à partir d'un certain rang. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

*Démonstration guidée.*

*L'idée tient en une image : si  $(v_n)$  pousse  $(u_n)$  par en dessous et que  $(v_n)$  monte au ciel,  $(u_n)$  n'a pas le choix. Rédigeons-la. Notons  $n_0$  un rang à partir duquel  $v_n \leq u_n$ .*

1. Soit  $A > 0$ . Traduisez  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$  : justifiez qu'il existe un rang  $N_1$  tel que  $\forall n \geq N_1, v_n > A$ .
2. Posez  $N = \max(n_0, N_1)$ . Expliquez pourquoi les deux propriétés (la minoration et le dépassement de  $A$ ) sont vraies simultanément à partir de ce rang.
3. Concluez : pour tout  $n \geq N$ , encadrez  $A < v_n \leq u_n$ , et reconnaissez la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .



*Le max de l'étape 2 est un geste que vous referez toute l'année : quand deux conditions valent chacune à partir d'un certain rang, elles valent ensemble à partir du plus grand des deux.*

## 3. CALCULER UNE LIMITE

Revenir à la définition à chaque fois serait épuisant. On construit donc les limites comme on construit les suites : par assemblage.

### OBJECTIFS

- ▷ Opérer sur les limites
- ▷ Reconnaître et lever une indétermination
- ▷ Encadrer pour conclure

### 3.1. Les opérations

#### PROPRIÉTÉ – SOMME, PRODUIT, INVERSE

Dans les tableaux,  $\ell$  et  $\ell'$  désignent des réels, et le symbole **F.I.** signale une **forme indéterminée** : non pas une absence de limite, mais l'impossibilité de conclure en toute généralité.

| Somme                                      |                |                     |                     |             |
|--------------------------------------------|----------------|---------------------|---------------------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$         | $\ell$         | $\ell$ ou $+\infty$ | $\ell$ ou $-\infty$ | $+\infty$   |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$         | $\ell'$        | $+\infty$           | $-\infty$           | $-\infty$   |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$           | $-\infty$           | <b>F.I.</b> |

| Produit                                  |             |                              |                              |             |
|------------------------------------------|-------------|------------------------------|------------------------------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$       | $\ell$      | $\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$ | $\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$ | 0           |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$       | $\ell'$     | $+\infty$                    | $-\infty$                    | $\pm\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$ | $\ell\ell'$ | $\pm\infty$                  | $\mp\infty$                  | <b>F.I.</b> |

dans les colonnes 3 et 4, le signe est donné par la règle des signes

| Inverse                                      |                  |             |                |                   |
|----------------------------------------------|------------------|-------------|----------------|-------------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$           | $\ell \neq 0$    | $\pm\infty$ | $0^+$ ou $0^-$ | 0 sans signe fixe |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$ | $\frac{1}{\ell}$ | 0           | $\pm\infty$    | pas de limite     |

$0^+$  (resp.  $0^-$ ) signifie : tend vers 0 par valeurs strictement positives (resp. négatives) ;  
les signes  $\pm\infty$  se correspondent respectivement

#### Remarque

Il y a exactement quatre formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Les trois dernières se ramènent d'ailleurs les unes aux autres. Le mot « indéterminée » est à prendre au pied de la lettre : la forme ne détermine pas le résultat, il faut aller voir.

### 3.2. Trois fois $\infty - \infty$ , trois réponses

#### Exemple – Pourquoi on dit « indéterminée »

Les trois suites suivantes présentent toutes la forme  $\infty - \infty$ . Observez le résultat.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - n = n(n-1)$ . Par produit de deux facteurs tendant vers  $+\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n - n^2 = -n(n-1)$ . Le même calcul au signe près :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ . Multiplions par la quantité conju-

guée :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers  $+\infty$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

Trois fois la même forme, trois réponses :  $+\infty$ ,  $-\infty$ , 0. La forme ne décide de rien.

Et le meilleur reste à venir : une différence de ce type peut très bien tendre vers un réel non nul.

*Exemple – La limite que personne ne devine* ♦

Soit  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ .

Quantité conjuguée, une fois de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}.$$

Factorisons par  $n$  au dénominateur (licite car  $n > 0$ , donc  $\sqrt{n^2 + n} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ ) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Comme  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , le dénominateur tend vers  $\sqrt{1} + 1 = 2$ , d'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right) = \frac{1}{2}}$$

Ni 0, ni l'infini. Pour vous en convaincre : la suite vaut 0,4881 au rang 10 et 0,499 88 au rang 1000. Plus généralement, pour tout réel  $a > 0$ , on a  $\sqrt{n^2 + an} - n \rightarrow \frac{a}{2}$  : un seul levier, toutes les réponses.

#### MÉTHODE – LEVER UNE INDÉTERMINATION

- ▷ 1. **Identifier** la forme indéterminée (ne pas se lancer sans l'avoir nommée).
- ▷ 2. **Factoriser par le terme prépondérant**, celui qui écrase les autres :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^3 - 5n^2 + 2 = n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^3}\right)$ .
- ▷ 3. Pour un **quotient de polynômes**, factoriser haut et bas par la plus haute puissance, puis simplifier.
- ▷ 4. Devant une **différence de racines**, multiplier par la quantité conjuguée.
- ▷ 5. Si rien ne marche : **encadrer** (paragraphe suivant).

### 3.3. Encadrer : le théorème des gendarmes

Certaines suites résistent au calcul direct, souvent parce que leur terme général contient un morceau qui n'a lui-même aucune limite. On les prend alors en étau.

#### THÉORÈME – GENDARMES, MINORATION, MAJORATION

Soient  $(u_n)$ ,  $(m_n)$  et  $(M_n)$  trois suites, et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

1. **Théorème des gendarmes.** Si  $m_n \leq u_n \leq M_n$  à partir d'un certain rang, et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \ell$ , alors  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .
2. **Minoration.** Si  $m_n \leq u_n$  à partir d'un certain rang et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
3. **Majoration.** Si  $u_n \leq M_n$  à partir d'un certain rang et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

#### Remarque

Le point 1 est un théorème d'existence déguisé : il ne se contente pas de calculer la limite, il **prouve que la suite converge**, ce qui n'allait pas de soi. Le point 2 a été démontré au paragraphe 2.5 ; le point 3 s'en déduit en l'appliquant aux suites  $(-u_n)$  et  $(-M_n)$ .

#### Exemple – Neutraliser une oscillation

Soit  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ .

Le numérateur n'a pas de limite, le calcul direct est donc hors de portée. Mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , et  $n^2 + 1 > 0$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{-1}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Les deux gendarmes tendent vers 0, donc  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$ .

#### Exemple – Une somme dont le nombre de termes bouge ♦

Soit  $(S_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$ .

Ici, ce n'est pas seulement la taille des termes qui varie : c'est *leur nombre*. Impossible d'opérer terme à terme. Encadrons chaque terme. Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on a  $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ , donc, en passant aux inverses (tous les termes sont strictement positifs, l'ordre s'inverse) :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Sommons ces  $n$  inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \times \frac{n}{n^2 + n} \leq S_n \leq n \times \frac{n}{n^2 + 1},$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2}{n^2 + n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Les deux encadrants tendent vers 1 (factorisation par  $n^2$ ), donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1}.$$

#### JALON

*Je nomme la forme indéterminée avant de calculer, et je sais que sommer des inégalités est licite.*

## 4. LA SUITE GÉOMÉTRIQUE, PIÈCE MAÎTRESSE

Toutes les suites de ce chapitre finiront par se ramener à une seule :  $(q^n)$ . Comprendre son comportement, c'est tenir le chapitre entier.

### 4.1. Le lemme, revenu d'A0

#### PROPRIÉTÉ – INÉGALITÉ DE BERNOULLI

Pour tout réel  $a > 0$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Vous l'avez démontrée par récurrence dans l'Atelier du chapitre A0. Elle vous semblait alors un exercice de technique parmi d'autres. La voici en pleine lumière : c'est elle, et elle seule, qui va faire tomber le théorème suivant. Un outil forgé en septembre, utilisé en octobre : c'est ainsi que fonctionne une année de mathématiques.

#### OBJECTIFS

- ▷ Démontrer la limite de  $q^n$
- ▷ Sommer une géométrie
- ▷ Modéliser une évolution

#### ← PRÉREQUIS

A0 · Logique et raisonnement

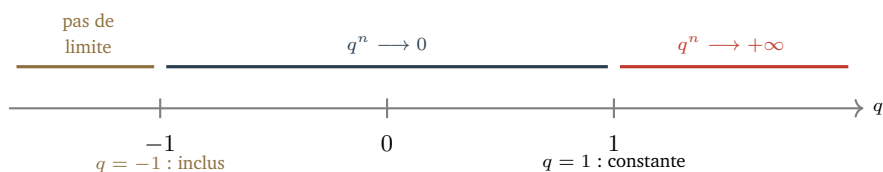
L'inégalité de Bernoulli, démontrée par récurrence dans l'Atelier du chapitre A0.

### 4.2. Deuxième démonstration exigible : la limite de $q^n$

#### THÉORÈME – COMPORTEMENT DE $(q^n)$

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . La suite  $(q^n)$  se comporte selon la position de  $q$  :

| Valeur de $q$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ |
|---------------|------------------------------------|
| $q > 1$       | $+\infty$                          |
| $q = 1$       | 1                                  |
| $-1 < q < 1$  | 0                                  |
| $q \leq -1$   | pas de limite                      |



*Démonstration.*

Traitons les cas l'un après l'autre.

**Cas  $q > 1$ .** Posons  $a = q - 1$ , de sorte que  $a > 0$  et  $q = 1 + a$ . L'inégalité de Bernoulli donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Or  $a > 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ . La suite  $(q^n)$  est minorée par une suite qui diverge vers  $+\infty$  : par le théorème de minoration démontré au paragraphe 2,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

**Cas  $q = 1$ .** La suite est constante égale à 1, donc elle converge vers 1.

**Cas  $q = 0$ .** La suite est nulle à partir du rang 1, elle converge vers 0.

**Cas  $0 < |q| < 1$ .** Posons  $Q = \frac{1}{|q|}$ . Alors  $Q > 1$ , donc, d'après le premier cas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = +\infty$ . Par passage à l'inverse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{Q^n} = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$ . Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n,$$

et les deux encadrants tendent vers 0. Le théorème des gendarmes conclut :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

**Cas  $q \leq -1$ .** Alors  $|q| \geq 1$ , donc  $|q^n| = |q|^n \geq 1$  pour tout  $n$  : la suite ne peut converger vers 0. Par ailleurs,  $q^n$  est positif pour  $n$  pair et négatif pour  $n$  impair : la suite change de signe indéfiniment. Elle ne peut donc converger vers un réel  $\ell \neq 0$  (si  $\ell > 0$ , tous les termes seraient strictement positifs à partir d'un certain rang, et symétriquement si  $\ell < 0$ ), ni tendre vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Elle n'a pas de limite. Pour  $q = -1$ , on retrouve la suite  $((-1)^n)$ , celle dont les sommes partielles ont fait le paradoxe de Grandi. ■

#### 4.3. Sommer une géométrie

##### PROPRIÉTÉ – SOMME ET LIMITE

Soit  $q \in \mathbb{R}$  avec  $q \neq 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarquez l'enchaînement : Bernoulli sert au cas  $q > 1$ , qui sert au cas  $|q| < 1$  par passage à l'inverse. Un seul cas est réellement démontré ; les autres s'y ramènent. C'est une architecture de preuve typique.

Si de plus  $|q| < 1$ , alors  $q^{n+1} \rightarrow 0$ , donc :

$$|q| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$$

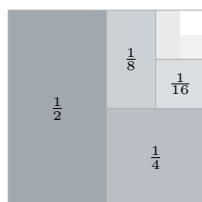
### Attention

La condition  $|q| < 1$  n'est pas décorative. C'est elle qui interdit le calcul de Grandi : avec  $q = -1$ , la formule  $\frac{1}{1-q}$  donnerait  $\frac{1}{2}$ , alors que la suite des sommes ne converge pas. Vérifier l'hypothèse avant d'appliquer le résultat : c'est le premier réflexe que l'on attend d'une copie.

*Exemple – Le carré qui se remplit*

Prenons  $q = \frac{1}{2}$ . Un carré de côté 1 : coupons-le en deux, puis coupons la moitié restante en deux, et ainsi de suite. À chaque étape, la portion coloriée augmente de  $\frac{1}{2^k}$ , et il reste toujours quelque chose. Pourtant le carré finit par être entièrement recouvert :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$



## 4.4. Archimède, vingt-trois siècles d'avance

CONTEXTE HISTORIQUE – LA QUADRATURE DE LA PARABOLE, III<sup>E</sup> SIÈCLE AVANT NOTRE ÈRE

Dans un traité rédigé sous forme de lettre à son ami Dosithée, Archimède s'attaque à un problème que personne ne sait résoudre : calculer l'aire comprise entre une parabole et une corde. Sa méthode, héritée d'Eudoxe et appelée **méthode d'exhaustion**, consiste à remplir la surface avec des triangles de plus en plus petits.

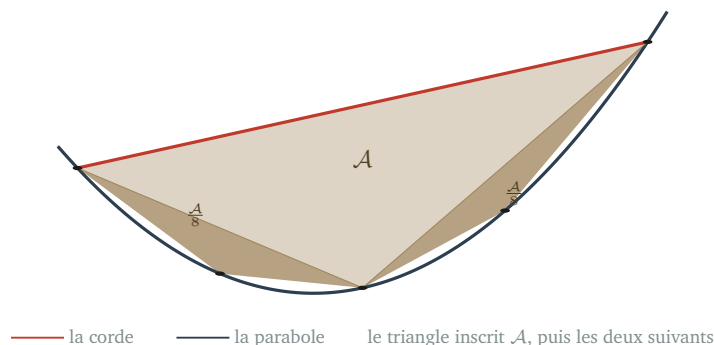
Il inscrit d'abord le plus grand triangle possible. Puis, dans les deux espaces qui restent, deux triangles plus petits. Puis quatre, puis huit. Et il établit un fait remarquable : à chaque étape, les nouveaux triangles ajoutent exactement le quart de ce que l'étape précédente avait ajouté. L'aire totale vaut donc

$$\mathcal{A} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right) = \mathcal{A} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \mathcal{A},$$

où  $\mathcal{A}$  est l'aire du premier triangle. Le segment de parabole vaut les quatre tiers du triangle inscrit.

Archimède n'avait ni la notion de limite, ni le mot « convergence », ni même une notation pour l'infini. Il contourne l'obstacle par un double raisonne-

ment par l'absurde d'une élégance intacte. Vingt-trois siècles plus tard, nous refaisons son calcul en deux lignes.



Les deux triangles de deuxième génération valent chacun  $\frac{A}{8}$ , soit  $\frac{A}{4}$  à eux deux. C'est le quart annoncé par Archimède.

#### 4.5. Quand la limite est un plateau

La somme géométrique ne sert pas qu'aux paraboles et aux paradoxes grecs. Dès qu'une quantité est renouvelée à intervalles réguliers pendant qu'une fraction s'en échappe, elle réapparaît, et elle décide d'un plateau.

*Exemple – Pourquoi un traitement met trois jours à agir*

Un patient prend  $D = 100$  mg d'un médicament à intervalles réguliers. Entre deux prises, l'organisme en élimine 40 % : il reste donc une fraction  $q = 0,6$  de la quantité présente. Notons  $c_n$  la quantité présente juste après la  $n$ -ième prise. Alors :

$$c_1 = 100 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_{n+1} = 0,6 c_n + 100.$$

Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique : on la dit **arithmético-géométrique**. Voici ses premières valeurs :

| Prise $n$  | 1   | 2   | 3   | 5     | 10    | 12    |
|------------|-----|-----|-----|-------|-------|-------|
| $c_n$ (mg) | 100 | 160 | 196 | 230,6 | 248,5 | 249,5 |

La quantité ne cesse de croître, mais de moins en moins, et semble se stabiliser autour de 250 mg. Nous démontrerons au paragraphe 6 que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{D}{1-q} = \frac{100}{0,4} = 250$ .

C'est ce qu'on appelle le **plateau thérapeutique**, et c'est la raison pour laquelle un traitement n'atteint sa pleine efficacité qu'au bout de plusieurs jours : il ne s'agit pas d'un effet retard mystérieux, mais d'une suite qui converge.

Le même calcul règle le paradoxe de Zénon : Achille, lancé à 10 m/s et dix fois plus rapide que la tortue partant cent mètres devant, doit parcourir 100, puis 10, puis 1, puis 0,1... Une infinité d'étapes, certes, mais dont la somme vaut  $\frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}$  mètres. Il la rattrape après 11,1 secondes. L'erreur de Zénon était de croire qu'une infinité d'étapes exige un temps infini.

Zénon d'Élée, V<sup>e</sup> siècle av. J.-C.

#### JALON

Je connais les quatre cas de  $(q^n)$  et je sais démontrer le cas  $q > 1$  avec Bernoulli.

### 5. LE THÉORÈME QUI RÉPOND À LA QUESTION

Nous y voici. Les deux sommes de l'ouverture attendent depuis le début du chapitre.

### 5.1. Troisième démonstration exigible : croissante et non majorée

#### THÉORÈME – CROISSANTE NON MAJORÉE

Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.*

Soit  $(u_n)$  une suite croissante et non majorée. Soit  $A > 0$ .

Dire que  $(u_n)$  n'est pas majorée, c'est dire qu'aucun réel n'en est un majorant. En particulier,  $A$  n'est pas un majorant de  $(u_n)$  : il existe donc un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $u_N > A$ .

Comme  $(u_n)$  est croissante, pour tout  $n \geq N$  on a  $u_n \geq u_N$ , et donc :

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq u_N > A.$$

Nous avons exhibé, pour tout  $A > 0$ , un rang à partir duquel tous les termes dépassent  $A$  : c'est exactement la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . ■

#### Remarque

La démonstration est courte, et c'est ce qui la rend instructive : tout le travail est fait par la négation correcte de « majorée ». Si  $(u_n)$  n'est pas majorée, alors pour tout  $A$  il existe un terme qui dépasse  $A$ . C'est le chapitre A0 qui parle.

### 5.2. Le théorème de la limite monotone

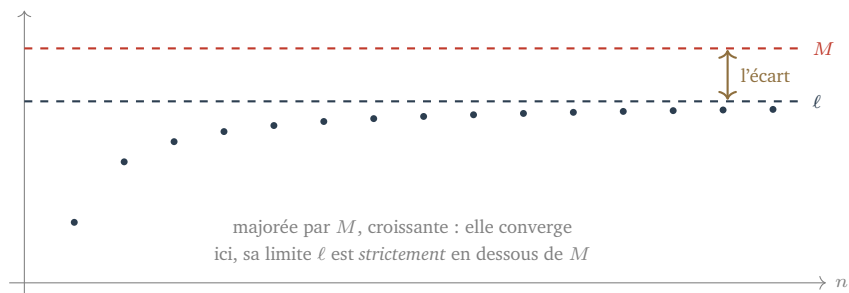
#### THÉORÈME – LIMITE MONOTONE · ADMIS

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.

#### Attention – Lisez bien ce qu'il dit, et ce qu'il ne dit pas

Ce théorème affirme qu'une limite **existe**. Il ne dit *rien* de sa valeur. C'est un **théorème d'existence**, et c'est le premier que vous rencontrez : jusqu'ici, prouver qu'une limite valait  $\ell$  passait toujours par le calcul de  $\ell$ .

En particulier, **la limite n'est pas le majorant**. Si  $M$  majore une suite croissante  $(u_n)$ , on sait seulement que  $\ell \leq M$ . L'écart peut être considérable, comme la suite de ce paragraphe va le montrer.



Remarque – Retour sur l'activité · le calcul du 30 mai 1799

Vous avez rencontré ce théorème avant qu'il ne porte un nom. Dans l'activité, deux suites étaient fabriquées à partir d'un même couple de réels strictement positifs  $a_0$  et  $b_0$ , l'une par la moyenne arithmétique, l'autre par la moyenne géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Vous avez établi que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq b_n$ . Il en découle que  $(a_n)_{n \geq 1}$  décroît et que  $(b_n)_{n \geq 1}$  croît. **Le rang 0 est à part**, et vos écrans vous l'ont montré : une propriété énoncée sans son rang de départ est une propriété fautive. Chacune est alors bornée par un réel fixe :  $b_1$  minore  $(a_n)$ ,  $a_1$  majore  $(b_n)$ . Le théorème ci-dessus conclut : **les deux convergent**.

Vers la même limite ? Oui, car l'écart est au moins divisé par deux à chaque étape. En effet, dès que deux réels sont strictement positifs et rangés dans l'ordre  $b_n \leq a_n$ , leur moyenne géométrique dépasse le plus petit des deux :  $\sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n$ . Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}.$$

De telles suites sont dites **adjacentes**.

Cette limite commune s'appelle la **moyenne arithmético-géométrique** du couple de départ. Pour  $a_0 = 1$  et  $b_0 = \sqrt{2}$ , elle vaut 1,198 140 234 ... , et voici ce qui doit vous arrêter : ce nombre est **transcendant**. Aucune combinaison de 1 et de  $\sqrt{2}$  par sommes, produits, quotients et racines ne peut le produire. Il a bien une écriture, mais il a fallu sortir de l'algèbre élémentaire pour la trouver.

C'est le **premier** des trois moments de ce chapitre où l'on prouve qu'une limite existe avant de savoir la calculer : la somme de Bâle et le nombre  $e$  suivront. Avec une nuance qui a son prix : ces deux-là ont fini par recevoir une valeur close. Celui-ci résiste encore.

### 5.3. Oresme : la somme qui n'en finit pas

Revenons à la première somme de l'ouverture. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La suite  $(H_n)$  est clairement croissante : on ajoute à chaque étape un terme strictement positif. Si elle était majorée, elle convergerait. Elle ne l'est pas,

*Ce que Gauss avait vérifié le 30 mai 1799 à la onzième décimale :  $2\pi$  divisé par cette moyenne donne la longueur d'une courbe en forme de huit, la lemniscate de Bernoulli de demi-largeur 1. Deux mondes sans rapport apparent. Il nota qu'une démonstration ouvrirait « un champ entièrement nouveau de l'analyse », et il avait vu juste. En 1976, Brent et Salamin en tirent, indépendamment l'un de l'autre, un algorithme qui double les décimales de  $\pi$  à chaque tour.*

Journal mathématique de Gauss, 1799

et voici pourquoi.

*L'astuce d'Oresme · démonstration guidée.*

*L'idée : regrouper les termes par paquets dont la taille double, de façon que chaque paquet pèse au moins  $\frac{1}{2}$ .*

$$H_{16} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

1. Le paquet allant de  $\frac{1}{9}$  à  $\frac{1}{16}$  compte 8 termes, tous supérieurs ou égaux à  $\frac{1}{16}$ . Justifiez que sa somme est supérieure ou égale à  $8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ .
2. Généralisez : montrez que, pour tout entier  $m \geq 1$ , le paquet allant de  $\frac{1}{2^{m-1}+1}$  à  $\frac{1}{2^m}$  contient  $2^{m-1}$  termes et que sa somme est supérieure ou égale à  $\frac{1}{2}$ .
3. Dédisez-en par récurrence que :  $\forall m \in \mathbb{N}, H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ .
4. Concluez que  $(H_n)$  n'est pas majorée, puis, par le théorème du paragraphe 5.1, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ .

Chaque paquet double de taille et pèse au moins  $\frac{1}{2}$  : en empilant assez de paquets, on atteint n'importe quelle hauteur.



#### 5.4. Une divergence d'une lenteur inouïe

$(H_n)$  tend vers  $+\infty$ . Voyons à quelle allure.

|       |      |        |                              |
|-------|------|--------|------------------------------|
| $n$   | 100  | $10^6$ | $1,5 \times 10^{43}$ environ |
| $H_n$ | 5,19 | 14,39  | 100                          |

Un million de termes pour dépasser 14. Et pour atteindre 100, il faut environ  $1,5 \times 10^{43}$  termes : un 15 suivi de quarante-deux zéros. Aucun ordinateur ne pourra jamais le vérifier. La suite diverge, mais si lentement qu'aucune expérience numérique ne peut le laisser soupçonner. Là encore : calculer n'est pas démontrer.

#### 5.5. Le porte-à-faux impossible

Cette divergence infiniment lente a une conséquence physique que l'on peut construire sur une table.

*Exemple – Empiler des briques au-dessus du vide*

Empilez des briques identiques au bord d'une table, **une seule par étage**, chacune décalée vers l'extérieur par rapport à celle du dessous. Jusqu'où peut-on aller sans que la pile bascule ?

On démontre que le porte-à-faux maximal vaut alors exactement  $\frac{1}{2} H_n$  **longueurs de brique**. Comme  $(H_n)$  tend vers  $+\infty$ , le porte-à-faux n'est borné par rien : **avec suffisamment de briques, et sans la moindre colle, on peut dépasser le bord de la table d'autant plus loin**

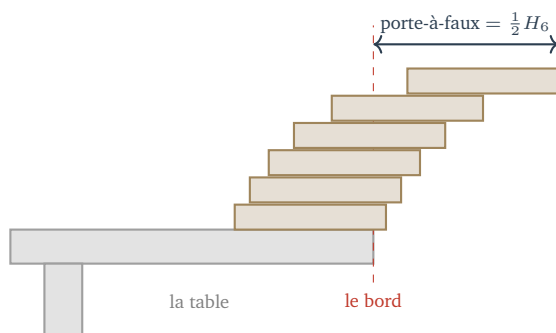
**Constante  $\gamma$**  : On peut montrer que  $H_n - \ln n$  converge vers un nombre  $\gamma \approx 0,5772$ , la constante d'Euler-Mascheroni. On ignore toujours, en 2026, si  $\gamma$  est rationnelle ou non.

qu'on veut.

Avec seulement 4 briques, le porte-à-faux vaut 1,04 longueur : la brique du sommet est déjà *entièrement* au-delà du bord, dans le vide. Mais la lenteur reprend vite ses droits :

|                          |   |    |     |                   |
|--------------------------|---|----|-----|-------------------|
| Nombre de briques        | 4 | 31 | 227 | $2,7 \times 10^8$ |
| Porte-à-faux (longueurs) | 1 | 2  | 3   | 10                |

Doubler le porte-à-faux ne coûte pas le double de briques : il coûte leur exponentielle.



## 5.6. Bâle : converger sans savoir vers quoi

Passons à la seconde somme de l'ouverture. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$B_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Elle est croissante, exactement pour la même raison que  $(H_n)$ . La seule question est donc : est-elle majorée ?

### PROPRIÉTÉ

La suite  $(B_n)$  est croissante et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $B_n < 2$ . Par conséquent,  $(B_n)$  converge.

*Démonstration.*

Le cas  $n = 1$  est immédiat :  $B_1 = 1 < 2$ . Supposons désormais  $n \geq 2$ . L'astuce consiste à majorer chaque terme par une différence qui se télescope. Pour tout entier  $k \geq 2$ , on a  $k^2 > k(k-1) > 0$ , donc, par passage à l'inverse :

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Sommons cette inégalité pour  $k$  allant de 2 à  $n$ . À droite, les termes

s'annulent deux à deux :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Il ne reste donc que le premier et le dernier terme. D'où, en ajoutant le terme  $k = 1$  resté à part :

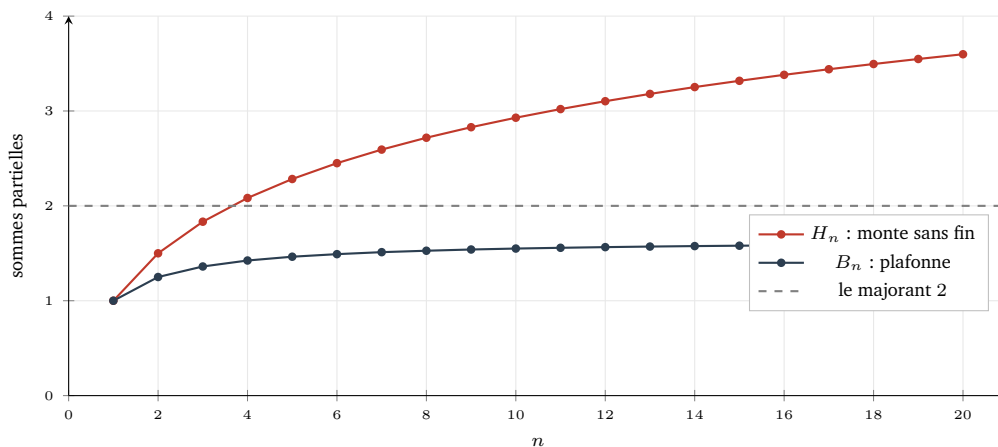
$$B_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite  $(B_n)$  est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. ■

### Attention – Ce que nous venons de faire, et de ne pas faire

Nous avons **démontré** que  $(B_n)$  converge. Nous n'avons **aucune idée** de sa limite. Le majorant 2 ne nous renseigne que sur un point : la limite est inférieure ou égale à 2.

Et l'écart est réel. La somme des mille premiers termes vaut 1,6439 : nous sommes très loin de 2. Voilà pourquoi il ne faut jamais confondre un majorant avec une limite.



Sur ce graphique, les deux suites sont presque indiscernables au départ. C'est bien là toute la difficulté : le comportement asymptotique ne se lit pas sur les premiers termes.

## 5.7. Et l'existence de e, au passage

### Exemple – Le calcul de Jacob Bernoulli, 1683

En 1683, Jacob Bernoulli étudie une question d'intérêts composés : un capital de 1, un taux de 100 % par an. Si les intérêts sont versés en une fois, on obtient 2. En deux fois,  $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$ . En douze fois, 2,613. Chaque jour,  $(1 + \frac{1}{365})^{365} = 2,7146$ . Chaque heure, 2,7181.

Sa question : en capitalisant de plus en plus souvent, peut-on devenir infiniment riche ? La suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  est croissante ; suffit-il d'attendre ?

Non. On peut démontrer qu'elle est majorée par 3. Croissante et majorée, elle **converge** : la richesse plafonne. Sa limite est le nombre qu'Euler notera  $e$  à partir de 1727, et qui vaut 2,718 281 8...

Notez bien ce qui vient de se passer : nous avons prouvé l'existence de  $e$  sans jamais dire ce qu'est  $e$ . C'est le théorème de la limite monotone qui a tout fait.

#### JALON

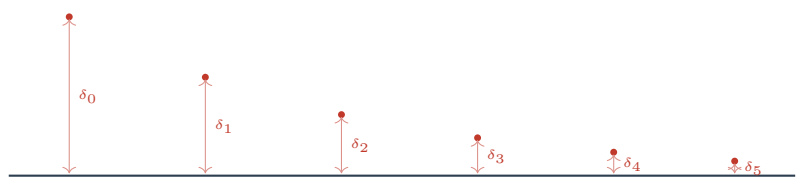
*Je sais prouver qu'une suite converge sans en calculer la limite, et je ne confonds plus majorant et limite.*

## 6. SUITES RÉCURRENTES, SEUILS ET MACHINES

Quand une suite est définie par récurrence, on ne dispose d'aucune formule pour  $u_n$ . Il faut alors une stratégie, et elle est toujours la même.

### MÉTHODE – ÉTUDIER UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

- ▷ **1. Encadrer** : démontrer par récurrence que la suite reste dans un intervalle.
- ▷ **2. Monotonie** : étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .
- ▷ **3. Conclure à l'existence** : monotone et bornée, donc convergente (limite monotone).
- ▷ **4. Contracter** : majorer l'écart à la limite par :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ , où  $0 < k < 1$  est fixé.
- ▷ **5. Itérer** : en déduire par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ , puis conclure par les gendarmes, puisque  $k^n \rightarrow 0$ .



L'erreur  $\delta_n = |u_n - \ell|$  est multipliée par  $k$  à chaque pas : elle est écrasée par une suite géométrique

#### OBJECTIFS

### 6.1. La racine carrée, depuis quatre mille ans

#### CONTEXTE HISTORIQUE – LA TABLETTE YBC 7289

Conservée à l'université Yale, une petite tablette d'argile babylonienne, vieille d'environ trente-sept siècles, porte un carré et ses diagonales. Y est inscrite, en écriture cunéiforme sexagésimale, la valeur

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414\,212\,96.$$

La valeur exacte de  $\sqrt{2}$  est 1,414 213 56... Les scribes babyloniens appro-

- ▷ Encadrer par récurrence
- ▷ Majorer une erreur par une géométrique
- ▷ Programmer une recherche de seuil

chaient donc  $\sqrt{2}$  à mieux que le millionième (cinq décimales exactes), plus de mille ans avant Pythagore. Comment ? Très probablement par l'algorithme que nous attribuons aujourd'hui à Héron d'Alexandrie.

#### Exemple – La méthode de Héron

Pour approcher  $\sqrt{a}$  (avec  $a > 0$ ), on part d'une valeur  $u_0 > 0$  et on itère :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

L'idée est limpide : si  $u_n$  est trop petit devant  $\sqrt{a}$ , alors  $\frac{a}{u_n}$  est trop grand, et inversement. La moyenne des deux est meilleure que chacun. Pour  $a = 2$  et  $u_0 = 1$  :

| $n$                                     | $u_n$                   | décimales exactes |
|-----------------------------------------|-------------------------|-------------------|
| 0                                       | 1                       | 0                 |
| 1                                       | 1,5                     | 0                 |
| 2                                       | 1,416 666 666 ...       | 2                 |
| 3                                       | 1,414 215 686 ...       | 5                 |
| 4                                       | 1,414 213 562 374 6 ... | 11                |
| valeur exacte : 1,414 213 562 373 0 ... |                         |                   |

Le nombre de décimales exactes **double à peu près à chaque itération**, dès que l'approximation est lancée. Quatre tours de boucle depuis une estimation aussi grossière que 1, et l'on dépasse la précision d'une calculatrice de poche.

#### Remarque – Ce que fait votre machine ★

Quand vous appuyez sur la touche racine carrée, votre calculatrice n'a pas de table : elle itère, sur ce principe. Et les processeurs graphiques font de même. Le moteur du jeu *Quake III Arena*, en 1999, contenait pour calculer des éclairages une routine devenue célèbre : une estimation initiale obtenue en manipulant directement les bits du nombre, à l'aide d'une constante mystérieuse (0x5f3759df), puis **une seule itération** de la méthode de Newton, dont Héron est le cas particulier. Le tout des dizaines de fois plus rapide qu'un calcul exact, pour une erreur invisible à l'écran.

La légende attribue le code à John Carmack, qui a démenti ; la piste remonte à une note non publiée de William Kahan et K. C. Ng à Berkeley, en 1986. Une suite qui converge vite n'est pas un exercice de terminale : c'est ce qui fait tourner un jeu vidéo.

## 6.2. Chercher un seuil

Une question revient sans cesse : *à partir de quel rang* la suite dépasse-t-elle (ou passe-t-elle sous) une valeur donnée ? C'est un problème de seuil, et il se résout par une boucle.

Listing 1 – Le plus petit rang  $n$  tel que  $0,99^n < 0,01$

```
1 def seuil(q, cible):
2     """Plus petit n tel que q**n < cible."""
```

```

3     n = 0
4     u = 1.0                # u vaut q**n
5     while u >= cible:
6         u = u * q
7         n = n + 1
8     return n
9
10    print(seuil(0.99, 0.01))    # affiche 459

```

La réponse est 459. On le vérifie :  $0,99^{458} \approx 0,010\,02$  et  $0,99^{459} \approx 0,009\,92$ . Notez que la boucle `while` est ici indispensable : on ne sait pas à l'avance combien de tours il faudra, c'est précisément la question posée.

### Attention

Une boucle `while` ne se termine que si la condition finit par devenir fausse. Ici, c'est garanti par le théorème sur  $(q^n)$ , avec  $|q| < 1$ . Sans cette garantie mathématique, le programme pourrait tourner indéfiniment : **c'est la démonstration qui autorise l'algorithme**, et non l'inverse.

## 6.3. Retour au plateau

Reprenons la suite du paragraphe 4 :  $c_1 = 100$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = 0,6 c_n + 100$ .

*Exemple – La suite auxiliaire, ou l'art de se ramener au connu*

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d_n = c_n - 250$ , où 250 est la valeur du plateau conjecturé. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= c_{n+1} - 250 = 0,6 c_n + 100 - 250 \\ &= 0,6 c_n - 150 = 0,6 (c_n - 250) = 0,6 d_n. \end{aligned}$$

La suite  $(d_n)$  est donc **géométrique** de raison 0,6, avec  $d_1 = 100 - 250 = -150$ . D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = -150 \times 0,6^{n-1},$$

puis, en revenant à  $(c_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = 250 - 150 \times 0,6^{n-1}.$$

Comme  $|0,6| < 1$ , on a  $0,6^{n-1} \rightarrow 0$ , et donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 250}$$

Le plateau thérapeutique est atteint, et le détour par  $(d_n)$  a transformé une suite inconnue en une suite géométrique. C'est la manœuvre la plus rentable du chapitre.

Vous aurez remarqué que nous n'avons pas encore utilisé la fonction  $f$  qui se cache derrière  $u_{n+1} = f(u_n)$ . C'est volontaire : cette lecture-là, avec ses escaliers et son point fixe, demande la continuité. Rendez-vous au chapitre F1.

**SUITE** →

*F1 · Limites de fonctions et continuité*

Les suites  $u_{n+1} = f(u_n)$  y seront étudiées par la fonction : stabilité d'un intervalle, lecture en escalier, recherche du point fixe.

## LA RÉPONSE D'EULER

Nous savons désormais que la somme  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$  converge. Nous l'avons prouvé sans rien connaître de sa valeur, et c'est bien là le tour de force du théorème de la limite monotone.

Reste la question qui a résisté quatre-vingt-onze ans, de Mengoli en 1644 à Euler en 1735. En voici la réponse :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644\,934$$

Prenez un instant. Il n'y a aucun cercle dans cet énoncé. Aucune géométrie, aucun angle : rien que les inverses des carrés des entiers, 1, 4, 9, 16. Et pourtant  $\pi$  apparaît. C'est ce genre de rencontre inattendue qui a fait la réputation d'Euler, et qui explique qu'il ait donné son nom à bien des choses.

Un dernier mot d'honnêteté, puisque ce chapitre a beaucoup insisté sur la différence entre calculer et démontrer : la démonstration qu'Euler publie en 1735 repose sur des manipulations qu'il ne sait pas justifier. Il le sait, ses contemporains le lui reprochent, et il lui faudra dix ans de plus pour en donner une preuve rigoureuse. Même les plus grands doivent revenir sur leurs pas.

Ce chapitre vous a donné trois choses. Un langage pour dire ce qu'une suite devient. Une boîte à outils pour le calculer. Et un théorème d'existence, le premier de votre année, qui affirme qu'un objet existe avant qu'on sache le nommer. Vous en rencontrerez d'autres : le théorème des valeurs intermédiaires au chapitre F1, l'existence des primitives au chapitre F5. Chaque fois, la même leçon : en mathématiques, savoir qu'une chose existe est déjà un résultat.

*Fin du chapitre*