



DM 1 · A1. LE MONSTRE DE 1904

Une figure qui tient dans la main, et dont le bord dépasse la Lune

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. Le périmètre s'échappe	△▲	les préliminaires
II. L'aire se referme	△▲◆	R1 à R4 et la partie I
III. Combien de dimensions ?	△▲◆	la partie I
IV. Le sommet : la géométrie du bord	◆	tout ce qui précède

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

1872 : la plaie lamentable

EN 1872, Karl Weierstrass présente à l'Académie de Berlin une fonction qui n'aurait pas dû exister. Elle est continue en tout point de la droite réelle, on peut donc en tracer la courbe sans lever le crayon ; et pourtant elle n'admet de tangente nulle part. Aucun point, pas un seul, où l'on puisse poser une règle et dire : ici, la courbe va dans cette direction. Pendant deux siècles, les mathématiciens avaient travaillé avec l'idée qu'une courbe continue possède une tangente sauf en quelques points exceptionnels. Weierstrass venait de montrer que cette idée était fausse.

La réaction fut vive. Charles Hermite écrit à Stieltjes, le 20 mai 1893, qu'il se détourne « avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ». La phrase est restée célèbre, et elle est souvent mal lue : c'est une boutade de correspondance, lâchée au détour d'une frustration de calcul, et Hermite enchaîne aussitôt sur des félicitations. Henri Poincaré, lui, écrira que « la logique parfois engendre des monstres ». Le mot restera.

Mais l'exemple de Weierstrass a un défaut, et Helge von Koch le formulera mieux que personne : cette fonction « est définie par une expression analytique qui cache la nature géométrique de la courbe correspondante, de sorte qu'on ne voit pas, en se plaçant à ce point de vue, pourquoi la courbe n'a pas de tangente ». On la calcule, on ne la voit pas.

En 1904, ce mathématicien suédois publie un article au titre limpide : *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*. Son ambition est celle que le titre annonce, et il la dit *pédagogique* : trouver une courbe « où l'apparence géométrique fût en accord avec le fait », assez simple « pour que tout le monde puisse pressentir, déjà par l'intuition naïve, l'impossibilité d'une tangente déterminée ». Il ne voulait pas un monstre de plus : il en voulait un qu'on puisse **dessiner**.

Ce voyage est la visite de ce monstre. Vous allez le construire, le mesurer, et découvrir qu'il refuse de se laisser mesurer. Puis vous chercherez ce qu'il faut inventer pour en venir à bout, et vous trouverez une idée qui n'existait pas en 1904 : une figure peut avoir une dimension qui n'est pas un nombre entier.

BERLIN, 1872

Weierstrass n'était pas tout à fait le premier : Bernard Bolzano avait construit une fonction du même genre vers 1830, mais son manuscrit resta inédit et ne fut retrouvé qu'au début des années 1920. Il n'avait d'ailleurs établi l'absence de dérivée que sur un ensemble dense de points, et la démonstration complète ne vint qu'en 1922. En mathématiques, publier fait partie de la découverte.

△ **Q1. Le pari.** Voici la règle de construction, que vous étudierez dans tout ce document. On part d'un triangle équilatéral. On partage chacun de ses côtés en trois parts égales, on construit vers l'extérieur un triangle équilatéral sur la part du milieu, et on efface la base de ce nouveau triangle. Puis on recommence sur *tous* les côtés de la figure obtenue, indéfiniment.

Avant tout calcul, et sans chercher à vous justifier, écrivez vos réponses aux trois questions suivantes.

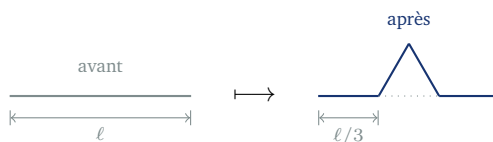
- Le périmètre de la figure augmente-t-il à chaque étape ? Tend-il vers l'infini, ou vers un nombre fini ?
- Même question pour l'aire.
- Les deux réponses peuvent-elles être différentes l'une de l'autre ?

Conservez cette page. Vous la relirez à la fin de la partie II. Votre première intuition est une donnée d'expérience : elle n'est pas évaluée, et se tromper ici n'a jamais coûté un point à personne.

Notations et outils. Les résultats encadrés R1 à R4 ci-dessous, ainsi que R5 introduit en partie III, sont citables partout dans la suite du document, sans avoir à les redémontrer.

DÉFINITION – LA CONSTRUCTION DU FLOCON

Soit a un réel strictement positif. On note F_0 le triangle équilatéral de côté a . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la figure F_{n+1} s'obtient à partir de F_n en appliquant à **chacun** de ses côtés l'opération suivante, appelée *générateur* :



Un côté de longueur ℓ est remplacé par **quatre** côtés de longueur $\frac{\ell}{3}$. Le segment en pointillés est effacé.

La figure F_n est appelée le flocon à l'étape n . **L'étape 0 est le triangle de départ.**



UN OBJET SANS PÈRE, 1904-2024

Le titre de ce devoir dit « 1904 », et c'est exact pour la *courbe* : von Koch la construit cette année-là, mais sur un simple **segment**, jamais sur un triangle. La figure fermée que l'on vient de définir, le *flocon*, ne se trouve nulle part dans son œuvre. Elle apparaît en 1940 dans un ouvrage d'Edward Kasner et James Newman, sans que le nom de von Koch y soit prononcé. Il aura fallu attendre un article de 2024 pour que quelqu'un le remarque : le flocon de von Koch n'est pas de von Koch. Un objet mathématique peut porter un nom pendant plus d'un siècle sans que personne aille vérifier.

R1 – AIRE DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

L'aire d'un triangle équilatéral de côté $x > 0$ vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} x^2$. (Démontré à la question Q2.)

R2 – SOMME GÉOMÉTRIQUE

Pour tout réel $\rho \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n \rho^k = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho}$. (Cours A1.)

R3 – COMPORTEMENT DE ρ^n

Soit ρ un réel. Si $|\rho| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = 0$; si $\rho > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = +\infty$. (Cours A1, démontré par l'inégalité de Bernoulli.)

La lettre ρ désigne la raison dans tout ce document ; la lettre q y est réservée aux dénominateurs de fractions.

R4 – THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

Toute suite croissante et majorée converge. (Cours A1, admis.) Ce théorème donne l'**existence** de la limite, jamais sa valeur.

△ Q2. La brique de base. Soit T un triangle équilatéral de côté $x > 0$.

- En traçant une hauteur et en appliquant le théorème de Pythagore, démontrer que cette hauteur mesure $\frac{\sqrt{3}}{2} x$.
- En déduire le résultat R1.

Notations. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

C_n	le nombre de côtés de F_n
L_n	la longueur d'un côté de F_n
P_n	le périmètre de F_n
A_n	l'aire de F_n

On pose $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, l'aire du triangle de départ.

Le périmètre s'échappe

Le générateur remplace chaque côté par quatre côtés trois fois plus courts. Deux effets contraires : le nombre de côtés est multiplié par 4, leur longueur divisée par 3. Le premier l'emporte-t-il sur le second ? C'est toute la question de cette partie, et elle se règle en trois lignes.

△ Q3. Compter les côtés.

- a) Donner C_0 , C_1 et C_2 .
- b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = 4 C_n$, et préciser la nature de la suite (C_n) .
- c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = 3 \times 4^n$.

△ Q4. Mesurer un côté. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = \frac{L_n}{3}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = \frac{a}{3^n}$.

△ Q5. Le périmètre.

- a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = C_n \times L_n$, puis démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = 3a \left(\frac{4}{3} \right)^n.$$

- b) En citant R3, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$. Rédiger la conclusion en une phrase, sans symbole.

▲ Q6. Jusqu'où ? On prend $a = 1$ mètre : le triangle de départ tient dans la main.

- a) Déterminer, à la calculatrice, le plus petit rang n tel que P_n dépasse 1 kilomètre.
- b) Même question pour la distance Terre-Lune, soit environ 384 400 km.
- c) Pour ce rang, calculer L_n et comparer à la taille d'un atome, de l'ordre de 10^{-10} mètre. Commenter en une phrase.

UNE REMARQUE D'ÉCHELLE

La figure ne quitte jamais la feuille : elle reste enfermée dans un hexagone que vous dessinerez à la question Q26. Ce n'est donc pas la figure qui grandit, c'est son *bord* qui se replie de plus en plus finement. Toute la difficulté du monstre est là.

L'aire se referme

Le périmètre est parti à l'infini. L'aire, elle, ne peut pas dépasser celle de la feuille. Que se passe-t-il exactement ? Cette partie demande plus de soin que la précédente : deux erreurs de comptage y sont classiques, et l'énoncé les signale au passage.

△ Q7. Combien de triangles ajoute-t-on ? Soit $n \in \mathbb{N}$. Lors du passage de F_n à F_{n+1} , on construit un petit triangle sur chaque côté de F_n . Combien de triangles ajoute-t-on ? Exprimer ce nombre en fonction de n .

△ Q8. Quelle est leur taille ? Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le côté de chacun de ces petits triangles ? Attention : ce n'est pas L_n . En déduire, à l'aide de R1, que l'aire de chacun d'eux vaut $\frac{A_0}{9^{n+1}}$.

▲ **Q9. L'aire ajoutée.** Dédurre des deux questions précédentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} - A_n = \frac{A_0}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Que vaut la limite de la suite $(A_{n+1} - A_n)$?

▲ **Q10. Le piège.** Un camarade raisonne ainsi :

« Les aires ajoutées tendent vers 0. Donc, à partir d'un certain rang, on n'ajoute pratiquement plus rien. Donc l'aire converge. »

- Ce raisonnement est-il valide ? Pour répondre, cherchez dans le cours A1 une suite dont les accroissements tendent vers 0 et qui tend pourtant vers $+\infty$.
- La conclusion de votre camarade est pourtant exacte ici. Expliquer en une phrase pourquoi une conclusion juste peut reposer sur un argument faux, et ce qu'il aurait fallu invoquer à la place.

▲ **Q11. L'existence de l'aire limite.** On admet provisoirement le résultat suivant, que vous démontrerez à la question Q26 : *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la figure F_n est contenue dans un même hexagone régulier, d'aire $2A_0$. (ce résultat peut être admis pour la suite)*

- Justifier que la suite (A_n) est croissante.
- En déduire, en citant R4, que (A_n) converge.
- Cette question donne-t-elle la valeur de la limite ?

▲ **Q12. La valeur de l'aire.**

- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = A_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{k+1} - A_k)$.
- À l'aide de Q9 et de R2, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = A_0 \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right].$$

- Vérifier que cette formule redonne bien A_0 au rang 0, puis calculer A_1 et A_2 en fonction de A_0 .
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ en fonction de A_0 , puis en fonction de a .

△ **Q13. Le paradoxe.** Relisez maintenant vos réponses à la question Q1.

- Vérifier l'encadrement $\frac{4}{3} < \frac{8}{5} < 2$ et l'interpréter : entre quelles deux figures connues l'aire du flocon est-elle coincée ?
- Énoncer en une phrase, sans aucun symbole, ce que les parties I et II établissent ensemble. C'est cette phrase qui a rendu cette figure célèbre.

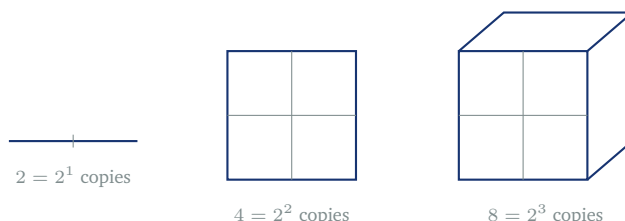
◆ **Q14. À quelle vitesse ?**

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{8}{5}A_0 - A_n = \frac{3}{5}A_0 \left(\frac{4}{9}\right)^n$, puis que l'erreur relative commise en confondant A_n et l'aire limite vaut $\frac{3}{8} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
- Déterminer le plus petit rang à partir duquel cette erreur est inférieure à 1 %.
- Comparer avec le rang trouvé en Q6.b). Rédiger la conclusion : à ce rang-là, où en est l'aire, et où en est le périmètre ?

Combien de dimensions ?

Une longueur infinie, une aire finie : les deux instruments dont nous disposons donnent l'un $+\infty$, l'autre un nombre. C'est le signe que *nous n'avons pas le bon instrument*. Cette partie en construit un troisième, et la réponse sera surprenante : le bord du flocon n'est ni une courbe, ni une surface. Il est entre les deux.

△ Q15. Ce que fait un agrandissement. On agrandit une figure d'un facteur $k = 2$.



- Combien de copies de la figure initiale faut-il pour remplir l'agrandie, dans chacun des trois cas ?
- Compléter : dans un agrandissement de facteur k , une figure de dimension D donne ... copies d'elle-même.

△ Q16. Le flocon dans la machine. On agrandit la courbe de Koch d'un facteur $k = 3$.

- En regardant le générateur, justifier qu'elle contient alors exactement 4 copies d'elle-même.
- D'après Q15, quel nombre d devrait donc vérifier $3^d = 4$?
- Calculer 3^1 et 3^2 . Que peut-on déjà dire de d ?
- La vraie difficulté.* L'écriture 3^d a-t-elle seulement un sens pour vous à ce stade ? Vous savez élever 3 à une puissance entière ; savez-vous l'élever à une puissance quelconque ? Tant que cette question n'est pas réglée, l'égalité de la question b) n'est pas une équation : c'est une intention.

DÉFINITION – LES PUISSANCES À EXPOSANT FRACTIONNAIRE

Vous ne connaissez x^s que pour s entier. Voici comment lui donner un sens lorsque s est une fraction, et cela suffira pour tout ce document.

Soient $b > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^q$ étant continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, il existe un unique réel positif x tel que $x^q = b^p$ (on l'admet : c'est une conséquence d'un théorème que vous verrez au chapitre F1). On le note $b^{p/q}$. Autrement dit :

$$\forall b > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad b^{p/q} \text{ est l'unique réel positif dont la puissance } q\text{-ième vaut } b^p.$$

On admet que cette définition est cohérente (deux écritures de la même fraction donnent le même nombre) et que les règles de calcul habituelles restent valables. **Dans toute la partie III, la lettre s désigne un rationnel strictement positif.**

DÉFINITION – LA MESURE EN DIMENSION s

Pour tout rationnel $s > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose (en prenant $a = 1$)

$$M_n(s) = \underbrace{4^n}_{\text{nombre de morceaux}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{3^n}\right)^s}_{\text{taille}^s}.$$

L'idée : pour mesurer une courbe on additionne des longueurs (exposant $s = 1$), pour mesurer une surface on additionne des aires (exposant $s = 2$). La quantité $M_n(s)$ est la mesure, à l'étape n , de la **courbe de Koch bâtie sur un seul côté** du triangle, si l'on décide de la mesurer en dimension s . Le bord du flocon en compte trois.

△ Q17. Les deux instruments habituels.

- Calculer $M_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis vérifier que $P_n = 3 M_n(1)$: on retrouve le périmètre du flocon, aux trois côtés près. Quelle est la limite de $M_n(1)$?
- Calculer $M_n(2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer sa limite.
- Traduire : mesurée en dimension 1, la courbe de Koch est ... ; mesurée en dimension 2, elle est ... Conclure que la bonne dimension, si elle existe, est strictement comprise entre 1 et 2.

▲ Q18. L'instrument général.

- Démontrer que, pour tout rationnel $s > 0$, la suite $(M_n(s))$ est géométrique de raison $\rho = \frac{4}{3^s}$.
- En citant R3, discuter selon la position de 3^s par rapport à 4 : quelle est la limite de $M_n(s)$? (Ne pas oublier le cas $\rho = 1$, où la suite est constante.)
- Les deux comportements sont donc séparés par un seuil. Justifier que si $s < s'$ alors $3^s < 3^{s'}$, et en déduire que les rationnels s tels que $3^s < 4$ forment le début de la demi-droite, et ceux tels que $3^s > 4$ la fin.

DÉFINITION – LA DIMENSION

On **admet** pour l'instant qu'il existe un réel $d > 0$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{Q}, s > 0, \quad s < d \iff 3^s < 4.$$

Ce réel est appelé la **dimension** de la courbe de Koch. Son existence sera établie à la question Q30, à l'aide de la seule propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

Remarquez la prudence de cette définition : on n'écrit *jamais* 3^d , car d ne sera pas une fraction (Q21) et vous ne savez pas encore élever un nombre à une puissance irrationnelle. On ne définit d que par la frontière qu'il trace entre deux familles de fractions.

▲ Q19. Encadrer sans calculatrice. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

- Justifier que la fonction $x \mapsto x^q$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. En déduire l'équivalence

$$\frac{p}{q} < d \iff 3^p < 4^q.$$

- Calculer 3^5 et 4^4 . Conclure.
- Calculer 3^4 et 4^3 . Conclure.
- Écrire l'encadrement de d obtenu, sous forme de fractions, puis en valeurs décimales approchées par défaut pour la borne inférieure et par excès pour la borne supérieure : arrondir dans le mauvais sens rendrait l'encadrement faux.

DEUX NOMBRES DE TROIS CHIFFRES

L'encadrement de la question Q19 repose sur deux comparaisons, dont $243 < 256$. Des nombres que tout le monde connaît suffisent à enfermer la dimension d'une fractale. On peut faire mieux, mais il faut des entiers à quatorze chiffres : la question Q33 vous y emmène en Python.

▲ **Q20. Voir la dimension.** Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de $M_n(s)$, arrondies au millième.

s	$M_0(s)$	$M_2(s)$	$M_4(s)$	$M_6(s)$	$M_8(s)$
1	1,000	1,778	3,160	5,619	9,989
1,25	1,000	1,026	1,053	1,081	1,110
1,2619	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,3333	1,000	0,855	0,731	0,624	0,534
2	1,000	0,198	0,039	0,008	0,002

- Pour chaque ligne, dire si la suite croît ou décroît, et retrouver ce comportement à l'aide de Q18.
- Une seule ligne ne bouge pas, aux arrondis près. Que vaut alors, approximativement, la raison ρ ? Quelle information cela donne-t-il sur d ?
- Vérifier que cette valeur appartient bien à l'encadrement de Q19.

◆ **Q21. La dimension n'est pas une fraction.** Démontrer par l'absurde que d est irrationnel.

On pourra supposer $d = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, établir d'abord l'égalité $3^p = 4^q$, puis conclure par un argument de parité.

LA TROISIÈME DE L'ANNÉE

Vous venez de démontrer votre troisième irrationalité : $\sqrt{2}$ au chapitre A0, le nombre e à l'exercice 27 de l'atelier, et maintenant la dimension du flocon. Les trois démonstrations sont par l'absurde, et les trois reposent sur un fait d'arithmétique élémentaire.

▲ **Q22. Les cousins.** La méthode de Q18 vaut pour toute figure faite de N copies d'elle-même, avec $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, réduites d'un même facteur $r \in]0; 1[$. Sa dimension d est alors, exactement comme pour le flocon, l'unique réel vérifiant

$$\forall s \in \mathbb{Q}, s > 0, \quad s < d \iff \left(\frac{1}{r}\right)^s < N.$$

- L'ensemble de Cantor.** On part de $[0; 1]$, on retire le tiers du milieu, et on recommence sur les deux segments restants. Ici $N = 2$ et $r = \frac{1}{3}$. Montrer, à l'aide de $3 < 4 = 2^2$ et de $3^2 = 9 > 8 = 2^3$, que $\frac{1}{2} < d \leq \frac{2}{3}$. (La caractérisation de Q22 donne une inégalité large à droite; la rendre stricte demanderait une comparaison de plus.)
- Le tapis de Sierpinski** (exercice 14 de l'atelier). Un carré est découpé en neuf, on retire celui du centre, et l'on recommence. Donner N et r , puis démontrer, à l'aide de $3^{15} = 14\,348\,907$ et de $8^8 = 16\,777\,216$, que $d > \frac{15}{8}$.
- Vous aviez démontré dans cet exercice que l'aire du tapis tend vers 0. Sa dimension est pourtant proche de 2. Ces deux faits sont-ils contradictoires?

◆ **Q23. Une dimension exacte.** Certaines fractales ont une dimension parfaitement calculable à la main. On considère la figure obtenue en remplaçant chaque segment par 8 segments de longueur le quart du segment initial.

- a) Écrire la caractérisation de sa dimension donnée par Q22 : ici $N = 8$ et $\frac{1}{r} = 4$.
- b) Vérifier que $4^{3/2} = 8$. En déduire d'abord que $d \leq \frac{3}{2}$, puis, en considérant un rationnel $s < \frac{3}{2}$, que $d \geq \frac{3}{2}$. Conclure à la valeur exacte de d .
- c) Généraliser : si $N = m^j$ et $\frac{1}{r} = m^i$ pour un même entier $m \geq 2$ et des entiers $i \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}^*$, que vaut d ?

R5 – LA VALEUR EXACTE, ADMISE

La dimension du flocon vaut exactement

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261\,859\,5$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien, qui est l'outil permettant de résoudre exactement une équation de la forme $3^x = 4$. Vous l'étudierez au **chapitre F3**. (*Admis ici.*)

♦ **Q24. Rendez-vous en F3.** Après avoir étudié le chapitre F3, revenez sur cette page. Vérifiez que la valeur exacte donnée par R5 appartient bien à l'encadrement que vous avez établi en Q19, puis retrouvez cette valeur à partir de l'équation $3^d = 4$.

PUBLIÉ EN 1961, HUIT ANS APRÈS SA MORT

Lewis Fry Richardson étudiait les causes des guerres. Cherchant si la longueur d'une frontière commune influait sur le risque de conflit, il constata que les pays ne s'accordaient pas sur cette longueur : pour la seule frontière entre l'Espagne et le Portugal, les chiffres déclarés différaient de près d'un quart. La raison n'était pas politique. Plus la règle utilisée est courte, plus on épouse les détails, plus la frontière s'allonge, exactement comme le périmètre de la partie I. Ces mesures dormaient dans un article posthume lorsque Benoît Mandelbrot les exhuma en 1967, dans *How Long Is the Coast of Britain ?* Il forgea en 1975 le mot *fractal*, du latin *fractus*, brisé, et il le forgea en français, dans *Les objets fractals*. Le monstre était devenu un instrument de mesure du monde.

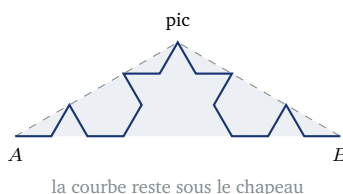
PARTIE IV

s'appuie sur tout ce qui précède

Le sommet : la géométrie du bord

Il reste une dette. À la question Q11, vous avez utilisé sans le démontrer que le flocon tient dans un hexagone. Cette partie paie la dette, et le prix à payer se révèle être le plus beau résultat du voyage : la même démonstration établit que la courbe ne se recoupe jamais, et ouvre la porte à la propriété que von Koch cherchait en 1904.

♦ **Q25. Le chapeau.** Soit $[AB]$ un segment de longueur ℓ . On appelle *chapeau* de $[AB]$ le triangle isocèle de base $[AB]$ et de sommet le pic construit par le générateur, situé à la hauteur $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ au-dessus du milieu de $[AB]$.



- On place $A = (0; 0)$ et $B = (1; 0)$. Donner les coordonnées des cinq points du générateur, puis vérifier que le pic est bien à la hauteur annoncée.
- Le générateur découpe $[AB]$ en quatre segments. Vérifier que les sommets des chapeaux des deux premiers, de coordonnées $\left(\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}}{18}\right)$ et $\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$, appartiennent tous deux à la droite (AS) d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.
- En déduire que les quatre chapeaux engendrés sont contenus dans le chapeau de départ.
- Conclure par récurrence : la courbe de Koch construite sur $[AB]$ est entièrement contenue dans le chapeau de $[AB]$.

♦ **Q26. La dette payée.**

- Appliquer Q25 aux trois côtés du triangle de départ : en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, la figure F_n est contenue dans une même figure fixe. Dessiner cette figure : c'est un hexagone régulier.
- Démontrer que son aire vaut exactement $2A_0$. On pourra remarquer qu'il se décompose en le triangle de départ et trois chapeaux.
- La question Q11 est maintenant entièrement justifiée. Expliquer pourquoi il aurait été maladroit de majorer A_n par la formule de Q12 : qu'avait-on admis sans le dire en établissant la récurrence de Q9 ?
- Les quatre chapeaux de Q25.c) ont des intérieurs deux à deux disjoints. Quelle propriété géométrique de la courbe de Koch peut-on en déduire ?

♦ **Q27. L'anti-flocon.** On reprend la construction en dirigeant tous les triangles vers l'intérieur. On note B_n l'aire obtenue à l'étape n , avec $B_0 = A_0$.

- Justifier que le périmètre de l'anti-flocon à l'étape n est exactement P_n , le même que celui du flocon.
- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n + B_n = 2A_0$. (On retranche exactement ce que l'on ajoutait.)
- En déduire B_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$.
- Calculer le rapport des deux aires limites. Rédiger la conclusion : deux figures de même périmètre à toute étape, et dont les aires sont dans un rapport entier.

Une différence avec le flocon, à signaler : d'après Q26.d), le bord du flocon ne se recoupe jamais, alors que les encoches de l'anti-flocon **se touchent** en des points isolés, et ce dès la première étape. Les aires s'ajoutent tout de même, car ces contacts sont ponctuels : les intérieurs restent disjoints.

♦ **Q28. Deux fourmis.** Soient M et N deux points distincts de la courbe de Koch.

- On admet que l'arc de courbe joignant M à N contient une copie réduite de la courbe entière, de rapport $\frac{1}{3^p}$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Cette copie a déjà été subdivisée $n - p$ fois à l'étape n : justifier que la longueur de l'arc MN est alors minorée par

$$\forall n \geq p, \quad \frac{a}{3^p} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-p} = \frac{a}{4^p} \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

- En déduire que cette longueur tend vers $+\infty$.
- Traduire le résultat : deux fourmis posées sur le bord du flocon, à un millimètre l'une de l'autre, sont séparées par un chemin de quelle longueur ?

♦ **Q29. Ce que von Koch cherchait.** Une courbe admet une tangente en un de ses points S lorsque la direction de la corde $[SM]$ tend vers une direction limite quand le point M de la courbe se rapproche de S . Toute la question est de savoir si, ici, cette direction se stabilise.

- On considère le pic S créé par le générateur sur un segment $[AB]$. Sur la ligne brisée F_1 , justifier que les deux segments qui se rejoignent en S forment un angle de 60° : la ligne brisée y change brutalement de direction.
- Justifier que tout arc de la courbe, si court soit-il, contient un pic apparu à une étape assez grande. (Les côtés de F_n mesurent $a/3^n$.) Les pics sont donc **partout** : dans le moindre voisinage d'un point de la courbe, il y a un coin.
- Soit $[UV]$ un **côté de la ligne brisée** F_n . L'arc de la courbe qui joint U à V est alors une copie réduite de la courbe tout entière : d'après Q25, il reste dans le chapeau de $[UV]$, dont les angles à la base valent 30° . Justifier que ce chapeau a la même forme quel que soit n : la courbe s'écarte de sa corde d'un angle qui ne diminue jamais, si court que soit le côté considéré.
- Les deux côtés de F_n issus de S font entre eux, d'après a), un angle de 60° , et cela à *toute étape*, aussi courts soient-ils devenus. En déduire, en une phrase, pourquoi la direction de la corde $[SM]$ ne peut se stabiliser lorsque M se rapproche de S . On **admet** que cela suffit à conclure : *la courbe n'admet de tangente en aucun de ses points*.
- Relire le titre de l'article de 1904 cité dans le prologue. Qu'a démontré von Koch, et pourquoi tenait-il à ce que sa courbe soit *dessinable* ?

♦ **Q30. Le sommet du sommet : d existe-t-il ?** Toute la partie III repose sur l'existence d'un réel d séparant les s tels que $3^s < 4$ des autres. Rien ne l'a garanti. On pose

$$E = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*, 3^p < 4^q \right\}.$$

- Justifier que E n'est pas vide.
- Démontrer que 2 majore E . (On pourra utiliser $9^q > 4^q$.)
- Démontrer que si $\frac{p}{q} \in E$ et $\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}$, alors $\frac{p'}{q'} \in E$.
- Démontrer que E n'a pas de plus grand élément. (Si $3^p < 4^q$, que dit R3 de la suite $\left(\left(\frac{4^q}{3^p}\right)^k\right)$? En déduire un entier k tel que $\frac{kp+1}{kq}$ soit encore dans E .)
- On admet que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Conclure que $d = \sup E$ existe, et que ce réel vérifie bien l'équivalence admise en partie III.

UNE INVITATION

La construction de la question Q30 s'appelle une *coupure de Dedekind*. C'est ainsi que l'on construit les nombres réels eux-mêmes, à partir des seuls rationnels. Vous la retrouverez en première année d'études supérieures. Remarquez ce que vous venez de faire : définir un nombre irrationnel sans jamais l'écrire, uniquement par la frontière qu'il trace entre deux familles de fractions.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q9. Multipliez le nombre de triangles de Q7 par l'aire d'un seul de Q8, puis faites apparaître $\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Q10. Cherchez du côté de la somme des inverses des entiers, étudiée au paragraphe 5 du cours. Ses accroissements valent $\frac{1}{n}$.

Q12. La somme de la question a) est un télescopage : presque tous les termes se simplifient deux à deux.

Q14. Pour b), il n'est pas nécessaire de résoudre une inéquation : un tableau de valeurs ou un algorithme de seuil suffit.

Q17. Pour a), écrivez $M_n(1) = 4^n \times \frac{1}{3^n}$ et comparez à l'expression de P_n obtenue en Q5, avec $a = 1$. Le facteur 3 qui les sépare est le nombre de côtés du triangle de départ.

Q18. Pour a), formez le quotient $\frac{M_{n+1}(s)}{M_n(s)}$ et simplifiez ; pour b), la raison ρ est un réel strictement positif, donc seuls trois cas se présentent selon sa position par rapport à 1.

Q19. Pour a), élevez les deux membres de $3^{p/q} < 4$ à la puissance q .

Q21. Supposons $d = \frac{p}{q}$. D'une part $\frac{p}{q} < d$ est faux, donc $3^p \geq 4^q$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fraction $\frac{kp-1}{kq}$ est bien inférieure à d : Q19.a) donne alors $\left(\frac{3^p}{4^q}\right)^k < 3$. Que dit R3 si $3^p > 4^q$? Concluez à l'égalité, puis regardez la parité.

Q22. Pour b), un carré découpé en neuf dont on retire le centre en laisse huit, chacun réduit d'un facteur $\frac{1}{3}$.

Q25. Pour c), il suffit de vérifier que les sommets des quatre chapeaux sont dans le chapeau de départ : celui-ci est convexe, donc il contient tout triangle dont les trois sommets lui appartiennent.

Q26. Pour c), la formule de Q12 vient de la récurrence de Q9 ; demandez-vous ce qu'il fallait savoir des petits triangles ajoutés pour avoir le droit d'additionner leurs aires.

Q28. À l'étape n , une copie de rapport $\frac{1}{3^p}$ n'a été subdivisée que $n - p$ fois : sa longueur vaut $\frac{1}{3^p}$ fois celle de la courbe à l'étape $n - p$. Puis c'est une divergence par minoration.

Q29. Pour b), entre deux points distincts de la courbe il y a une distance non nulle ; or les côtés de l'étape n mesurent $a/3^n$, qui finit par être plus petit que cette distance. Pour c), le chapeau d'un segment se déduit de celui d'un autre par un agrandissement suivi d'une rotation : les angles sont conservés.

Q30. Pour c), n'utilisez que des entiers : de $3^p < 4^q$ et $\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}$, tirez $p'q < pq'$, puis élevez à des puissances bien choisies pour comparer $3^{p'}$ et $4^{q'}$.

ANNEXE • LE LABORATOIRE PYTHON

Les quatre programmes ci-dessous se complètent et se testent. Aucun n'est obligatoire, tous éclairent une partie du voyage.

▲ **Q31. Tracer le monstre.** Compléter les trois passages en pointillés du programme suivant, qui renvoie la liste des points de la courbe de Koch de A à B au niveau n . **Dans toute cette annexe, on prend $A = (0; 0)$ et $B = (1; 0)$, c'est-à-dire $a = 1$.**

```

1  from math import cos, sin, pi
2
3  def koch(A, B, n):
4      if n == 0:
5          return [A]
6      (ax, ay), (bx, by) = A, B
7      dx, dy = (bx - ax)/3, (by - ay)/3
8      P1 = (ax + dx, ay + dy)
9      P3 = ...
10     c, s = cos(-pi/3), sin(-pi/3)
11     P2 = (P1[0] + dx*c - dy*s, P1[1] + dx*s + dy*c)
12     return koch(A, P1, n-1) + ... + koch(P2, P3, n-1) + ...

```

a) Compléter, puis vérifier que le niveau 5 renvoie 1 024 points. Retrouver ce nombre par le calcul, et expliquer pourquoi le point B n'y figure jamais. (Regarder le cas de base de la récursion.)

- b) Écrire une fonction qui calcule la longueur de la ligne brisée obtenue. **Attention** : il faut d'abord ajouter B à la liste, sans quoi il manque le dernier segment. Vérifier qu'on retrouve alors $(\frac{4}{3})^n$: vous validez ainsi votre programme *par la théorie*.
- c) Que vaut la longueur si l'on oublie d'ajouter B ? Le vérifier pour $n = 1$, où l'écart est le plus visible.

▲ **Q32. Le seuil.** Écrire une fonction `seuil(cible)` renvoyant le plus petit entier n tel que $P_n > \text{cible}$, pour $a = 1$ mètre. Retrouver les réponses de la question Q6.

◆ **Q33. L'encadrement à quatorze chiffres.** Compléter le programme suivant, qui cherche le meilleur encadrement de d par des fractions de dénominateur au plus $q_{\max}$, en n'utilisant que des entiers.

```

1 def encadrement(qmax):
2     bas, haut = 0, 2
3     for q in range(1, qmax + 1):
4         for p in range(q, 2*q + 1):
5             if 3**p < 4**q and p/q > bas:
6                 bas = ...
7             if 3**p > 4**q and p/q < haut:
8                 haut = ...
9     return bas, haut

```

- a) Compléter et exécuter avec $q_{\max} = 25$.
- b) Python calcule ici $3^{29} = 68\,630\,377\,364\,883$ et $4^{23} = 70\,368\,744\,177\,664$, entiers à quatorze chiffres, de façon *exacte*. Quelle confiance peut-on accorder au résultat, comparée à celle d'un calcul en nombres décimaux ?

◆ **Q34. Mesurer une dimension, vraiment.** On recouvre la courbe par une grille de carrés de côté $\frac{1}{k}$ et l'on compte les carrés rencontrés, noté $B(k)$. Si la dimension est d , alors le rapport $\frac{B(3k)}{B(k)}$ devrait tendre vers 4.

```

1 def comptage(points, k):
2     return len({(int(x*k), int(y*k)) for (x, y) in points})

```

- a) Calculer ces rapports pour $k = 3, 9, 27, 81, 243$ à partir de la courbe de niveau 8, **complétée par le point B** comme en Q31.b) : sans lui, le premier rapport est faux d'une unité entière.
- b) Les valeurs obtenues sont voisines de 4,00 puis 4,50, 4,25, 4,19 et 3,93. Elles devraient valoir 4. Proposer au moins deux explications de cet écart.
- c) Quel rapport ce constat entretient-il avec l'histoire des côtes de Richardson, racontée à la fin de la partie III ?

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Le tracé animé du flocon, les figures en haute résolution, les réponses aux questions du sommet et le récit complet de l'affaire des côtes vous attendent sur le compagne numérique.