



DM 2 · A1. LE JOUR OÙ LA MACHINE A DIT QUE π VALAIT 6

Deux suites qui se rejoignent, et un ordinateur qui les perd en route

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. La règle, le compas et Pythagore	△▲	les préliminaires
II. Deux suites qui se rejoignent	△▲◆	R1 à R5 et la partie I
III. La machine ment	△▲◆	les parties I et II
IV. Le mode caché	△▲◆	la partie II ; indépendante de III, sauf Q24.b) et Q28.c)
Épilogue et laboratoire	▲◆	les parties I à IV

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Vers 250 avant notre ère : mesurer ce qui n'est pas droit

UN cercle n'a pas de côtés. C'est ce qui le rend beau, et c'est ce qui le rend impossible à mesurer. On sait depuis toujours calculer le périmètre d'un triangle ou d'un carré : on additionne des longueurs droites. Mais un cercle ne se laisse pas découper en segments, et pendant des siècles les géomètres ont su que le rapport entre sa circonférence et son diamètre était le même pour tous les cercles, sans savoir dire lequel.

Archimède, dans un traité de trois propositions intitulé *Mesure du cercle*, propose une idée qui va traverser vingt-deux siècles. Puisqu'on ne sait pas mesurer le cercle, on va le prendre en tenaille. On l'enferme entre un polygone régulier inscrit, dont le périmètre est certainement trop petit, et un polygone régulier circonscrit, dont le périmètre est certainement trop grand. Puis on double le nombre de côtés, et on recommence. Les deux polygones se rapprochent du cercle par les deux bords à la fois, et ils enferment la vérité dans un intervalle qui rétrécit.

Il part de l'hexagone et double quatre fois : 6, 12, 24, 48, 96 côtés. Chaque doublement lui coûte une extraction de racine carrée, à la main, sur des fractions à plusieurs chiffres. Il s'arrête là, et il annonce un

résultat qu'on écrit aujourd'hui

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Vous allez refaire ce calcul, puis démontrer que la méthode fonctionne, ce qu'Archimède ne pouvait pas faire faute des outils que vous possédez. Ensuite vous la programmerez, et c'est là que le voyage bascule : l'ordinateur, à qui l'on demande de poursuivre le doublement bien au-delà de ce qu'Archimède pouvait rêver, va vous annoncer successivement que π vaut 3,3541, puis 6, puis 0. Il n'aura pas planté. Il aura calculé, proprement, docilement, une réponse fausse.

SYRACUSE, III^e SIÈCLE AVANT NOTRE ÈRE

La *Mesure du cercle* qui nous est parvenue est un texte mutilé : trois propositions seulement, dans un état que les spécialistes jugent abrégé et remanié par des copistes tardifs. Le raisonnement d'Archimède suppose des valeurs approchées de racines carrées, dont $\sqrt{3}$, qu'il utilise sans dire d'où il les tire. Comment il les obtenait reste une question ouverte.

△ **Q1. La tenaille se referme.** On travaille dans tout le document sur un cercle de rayon 1, de centre O .

- Justifier que le côté de l'hexagone régulier inscrit dans ce cercle vaut exactement 1. (*Regarder le triangle formé par le centre et deux sommets consécutifs.*)
- En déduire le demi-périmètre de cet hexagone.
- Le demi-périmètre de l'hexagone régulier *circonscrit* vaut $2\sqrt{3}$. En admettant ce résultat, écrire l'encadrement de π que donne l'hexagone, avec trois décimales pour chaque borne, la borne basse arrondie par défaut et la borne haute par excès. (*On admet ici que le demi-périmètre inscrit minore π et que le circonscrit le majore : ce sera le résultat R5 des préliminaires.*)
- Combien de décimales de π cet encadrement permet-il d'affirmer ? Commenter.

PRÉLIMINAIRES

Notations et outils

Les notations ci-dessous valent pour tout le document, et chaque résultat encadré R1 à R5, ainsi que le résultat R6 établi à l'issue de la question Q12, peut être cité partout dans la suite.

DÉFINITION – LES DEUX POLYGONES ET LEURS DEMI-PÉRIMÈTRES

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Dans le cercle de centre O et de rayon 1, on note :

- c_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés **inscrit** dans le cercle
- a_n le **demi-périmètre** de ce polygone, donc $a_n = \frac{n c_n}{2}$
- b_n le **demi-périmètre** du polygone régulier à n côtés **circonscrit** au cercle, c'est-à-dire dont tous les côtés sont tangents au cercle
- h_n l'**apothème** du polygone inscrit, c'est-à-dire la distance de O à l'un quelconque de ses côtés

Le demi-périmètre plutôt que le périmètre : c'est une commodité, puisque le cercle de rayon 1 a pour diamètre 2, et que la quantité cherchée est le rapport de la circonférence au diamètre.

DÉFINITION – L'ANGLE AU CENTRE, EN DEGRÉS

On note θ_n la mesure, **en degrés**, de l'angle au centre qui intercepte un *demi-côté* du polygone inscrit à n côtés. Ainsi

$$\theta_6 = 30^\circ \quad \text{et} \quad \forall n \geq 3, \quad \theta_{2n} = \frac{\theta_n}{2}.$$

Ce choix des degrés n'est pas une coquetterie, et il vaut la peine de dire pourquoi tout de suite. La mesure d'un angle en radians se définit à partir de la longueur d'un arc de cercle, donc à partir de π . Or π est précisément ce que ce document construit. Écrire $\theta_n = \frac{\pi}{n}$ reviendrait à se servir de la réponse pour poser la question. En degrés, aucun cercle de vices : $\theta_6 = 30^\circ$ est une donnée de la géométrie du triangle équilatéral, et tout le reste s'en déduit par divisions par deux.

R1 – LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Soit ρ un réel tel que $-1 < \rho < 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = 0$.

R2 – COMPARAISON ET ENCADREMENT

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles.

- a. Si $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ et si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
- b. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \leq v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel ℓ , alors (w_n) converge vers ℓ .

R3 – TRIGONOMÉTRIE

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \neq 0 \implies \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

R4 – QUANTITÉ CONJUGUÉE

$$\forall A \geq 0, \forall B \geq 0, \quad A + B > 0 \implies A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}.$$

En particulier, pour tous réels $u \geq 0$ et $v \geq 0$ tels que $\sqrt{u} + \sqrt{v} > 0$: $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$.

Ce résultat est celui que vous avez rencontré dans le cours pour lever la forme indéterminée de $\sqrt{n^2 + n} - n$. Il jouera ici un tout autre rôle, et ce sera l'une des surprises du voyage.

R5 – LE CERCLE EST PRIS EN TENAILLE, ADMIS

On note $\mathcal{P}$ le demi-périmètre du cercle de rayon 1, c'est-à-dire le nombre que l'école appelle π depuis toujours : le rapport de la circonférence au diamètre. Alors

$$\forall n \geq 3, \quad a_n < \mathcal{P} < b_n.$$

(Admis. Ce résultat traduit un fait de convexité : une ligne polygonale inscrite dans un arc est plus courte que cet arc, une ligne circonscrite est plus longue.)

Ce dernier résultat est le seul endroit du document où un savoir antérieur sur π intervienne dans une

démonstration. La valeur décimale de π , utilisée plus loin pour mesurer des écarts, reste elle aussi extérieure au raisonnement, et l'annexe le rappelle.

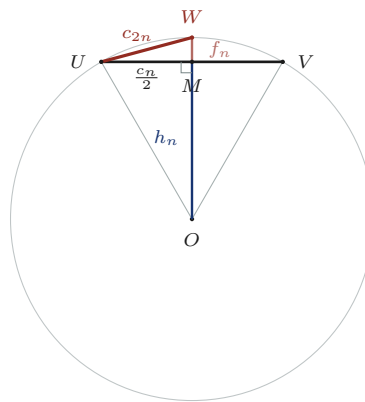
PARTIE I

s'appuie sur les préliminaires

La règle, le compas et Pythagore

Archimède ne dispose ni de la trigonométrie, ni de la notation décimale, ni d'un symbole pour l'inconnue. Il dispose du théorème de Pythagore. Cette partie reconstruit sa méthode avec ce seul outil, et vous conduira à son encadrement.

△ Q2. Doubler le nombre de côtés. Soit $n \geq 3$ un entier, fixé dans toute cette question. Soient $[UV]$ un côté du polygone inscrit à n côtés, M le milieu de $[UV]$, et W le point du cercle situé sur la demi-droite $[OM)$. La figure ci-dessous représente cette configuration pour $n = 6$.



- Justifier que $[UW]$ est un côté du polygone régulier inscrit à $2n$ côtés, c'est-à-dire que $UW = c_{2n}$.
- En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OMU , établir que $h_n = \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{4}}$, et en déduire que cette égalité vaut pour tout entier $n \geq 3$.
- On note $f_n = MW$. Justifier que $f_n = 1 - h_n$.
- En appliquant à nouveau le théorème de Pythagore, cette fois dans le triangle UMW , démontrer que

$$\forall n \geq 3, \quad c_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}.$$

△ Q3. Les premiers doublements.

- En partant de $c_6 = 1$, établir que $c_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, puis que $c_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.
- Écrire de même c_{48} et c_{96} sous forme de radicaux emboîtés. Décrire en une phrase la règle de formation.
- Calculer a_{12} et a_{24} , avec six décimales.

△ **Q4. La table d'Archimède.** Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant six décimales. La dernière colonne se remplira après la question Q5.

n	c_n	a_n	h_n	b_n
6	1	3	...	...
12	...	...	...	...
24	...	...	...	...
48	...	...	...	...
96	...	...	...	...

▲ **Q5. Le polygone du dehors.** Le polygone circonscrit à n côtés est l'image du polygone inscrit à n côtés par une homothétie de centre O .

- Justifier cette affirmation, et déterminer le rapport de cette homothétie en fonction de h_n . (L'apothème du polygone circonscrit vaut 1, puisque ses côtés sont tangents au cercle.)
- En déduire que $\forall n \geq 3, b_n = \frac{a_n}{h_n}$.
- Compléter la dernière colonne du tableau de Q4.
- Justifier que $\forall n \geq 3, a_n < b_n$.

△ **Q6. Retrouver Archimède.**

- Écrire l'encadrement de π fourni par le 96-gone, avec six décimales pour chaque borne, la borne basse arrondie par défaut et la borne haute par excès.
- Vérifier que $\frac{223}{71} < a_{96}$ et que $b_{96} < \frac{22}{7}$. L'encadrement d'Archimède est donc *moins* précis que celui que ses propres polygones autorisent. Proposer une explication.
- Combien de décimales de π le 96-gone permet-il d'affirmer avec certitude ?

▲ **Q7. Le prix d'un doublement.** Chaque passage de n à $2n$ coûte, d'après Q2.d), une extraction de racine carrée, puis une seconde pour obtenir c_{2n} à partir de c_{2n}^2 .

- Combien d'extractions de racines carrées séparent l'hexagone du 96-gone ?
- Ludolph van Ceulen, dont il sera question à la fin de ce document, a poussé le calcul jusqu'à un polygone à 2^{62} côtés. En admettant qu'il soit parti d'un carré et qu'il ait doublé à chaque étape, combien de doublements a-t-il effectués ?
- Sachant qu'il travaillait à la main, avec plus de trente décimales à chaque étape, commenter la décision d'Archimède de s'arrêter à 96.

UNE FAMILLE DE FIGURES, DEUX DESTINS

Vous avez déjà rencontré, dans le premier devoir de ce chapitre, une figure dont on multiplie indéfiniment le nombre de côtés : le flocon de von Koch, dont le périmètre est multiplié par $\frac{4}{3}$ à chaque étape et tend vers l'infini. Ici, le geste est le même, le nombre de côtés double, et le périmètre converge. La différence tient en une ligne : le flocon *rallonge* son bord à chaque étape, le polygone d'Archimède le *raccourcit* en le rapprochant du cercle. Deux suites de polygones, deux conclusions opposées. C'est exactement pourquoi il ne faut jamais conclure sur une figure sans calculer.

Deux suites qui se rejoignent

La partie I a produit des nombres. Elle n'a rien démontré : rien ne garantit encore que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent, ni qu'elles convergent vers la même chose. C'est l'objet de cette partie, et c'est le travail qu'Archimède ne pouvait pas faire.

Dans toute la suite, on ne considère plus que les rangs obtenus par doublements successifs à partir de l'hexagone, et l'on pose, pour alléger,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad n_k = 6 \times 2^k, \quad A_k = a_{n_k}, \quad B_k = b_{n_k}, \quad \Theta_k = \theta_{n_k}.$$

Ainsi $A_0 = 3$, $B_0 = 2\sqrt{3}$ et $\Theta_0 = 30^\circ$.

△ **Q8. Lire les polygones dans un triangle rectangle.** On reprend la figure de Q2.

- Justifier que $\forall n \geq 3$, $\frac{c_n}{2} = \sin \theta_n$ et $h_n = \cos \theta_n$.
- En déduire, à l'aide de Q5.b), que

$$\forall n \geq 3, \quad a_n = n \sin \theta_n \quad \text{et} \quad b_n = n \tan \theta_n.$$

- Vérifier ces deux formules sur le cas $n = 6$, pour lequel $\theta_6 = 30^\circ$.

▲ **Q9. Les deux moyennes.** On admet que les formules de R3 valent pour des angles mesurés en degrés.

- Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} = \frac{2A_k B_k}{A_k + B_k}$.
- Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_{k+1} = \sqrt{A_k B_{k+1}}$.
- Vérifier numériquement ces deux relations pour $k = 0$, à l'aide du tableau de Q4.
- Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_{k+1} est la moyenne harmonique de A_k et B_k , et A_{k+1} la moyenne géométrique de A_k et B_{k+1} . Que remarque-t-on de frappant, comparé à la relation de Q2.d) ?

▲ **Q10. Chacune dans son sens.**

- Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{1}{\cos \Theta_{k+1}}$.
- Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{B_{k+1}}{B_k} = 1 - \tan^2 \Theta_{k+1}$.
- En déduire que (A_k) est strictement croissante et que (B_k) est strictement décroissante. (On justifiera d'abord que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0^\circ < \Theta_{k+1} < 45^\circ$.)

◆ **Q11. L'intervalle se referme.** L'objectif est de majorer l'écart $B_k - A_k$.

- À l'aide de Q9.a), démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} - A_k = \frac{A_k}{A_k + B_k} (B_k - A_k)$.
- À l'aide de Q9.b) et de R4, démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} - A_{k+1} = \frac{\sqrt{B_{k+1}}}{\sqrt{B_{k+1}} + \sqrt{A_k}} (B_{k+1} - A_k).$$

(On pourra écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} - A_{k+1} = \sqrt{B_{k+1}} (\sqrt{B_{k+1}} - \sqrt{A_k})$.)

- En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 < B_{k+1} - A_{k+1} \leq \frac{1}{2} (B_k - A_k)$. (Réécrire d'abord $B_{k+1} - A_k$ à l'aide de a), puis majorer chacun des deux facteurs.)

d) Conclure que $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < B_k - A_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (2\sqrt{3} - 3)$.

▲ **Q12. La limite existe, et on lui donne un nom.**

- Déduire de Q11.d) et de R1 que $(B_k - A_k)$ converge vers 0.
- Justifier que (A_k) converge. (Utiliser Q10.c) et le théorème d'existence du cours.)
- En déduire que (B_k) converge, et vers la même limite.
- À l'aide de R5 et de R2, démontrer que cette limite commune est exactement $\mathcal{P}$, le demi-périmètre du cercle. On la note désormais π , et l'on écrit $\forall k \in \mathbb{N}, A_k < \pi < B_k$.

R6 – CE QUI VIENT D'ÊTRE ÉTABLI

Les suites (A_k) et (B_k) convergent vers une même limite, égale au demi-périmètre du cercle de rayon 1 et notée π . De plus

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A_k < \pi < B_k, \quad 0 < B_k - A_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k (2\sqrt{3} - 3).$$

Il vaut la peine de mesurer ce qui vient d'être fait. Jusqu'ici, π était un *nom* : celui d'un rapport dont on vous avait dit qu'il ne dépend pas du cercle choisi. Il vient d'acquiescer une *définition* : la limite commune de deux suites que l'on sait construire, et dont on a démontré qu'elles convergent **sans jamais avoir eu besoin de savoir vers quoi**. C'est le mouvement même du chapitre, celui du théorème d'existence, et c'est ce qui sépare une définition d'une valeur approchée. Remarquez que ces deux suites ont été construites en degrés, sans jamais faire intervenir π dans leur définition : sans cette précaution, on aurait utilisé la réponse pour poser la question.

♦ **Q13. La vitesse réelle.** La majoration de Q11.c) par le facteur $\frac{1}{2}$ suffit à démontrer la convergence, mais elle est grossière.

- Calculer les rapports $\frac{B_{k+1} - A_{k+1}}{B_k - A_k}$ pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$, avec trois décimales. (Les six décimales du tableau de Q4 ne suffisent pas : reprendre les valeurs en pleine précision, à la calculatrice ou avec le programme de l'annexe.)
- Vers quelle valeur ces rapports semblent-ils tendre ?
- En admettant que l'écart soit divisé par 4 à chaque doublement, estimer le nombre de doublements nécessaires pour obtenir 10 décimales exactes de π . Puis 35.

PARTIE III

s'appuie sur les parties I et II

La machine ment

Tout est démontré : les deux suites convergent vers π , et l'écart est au moins divisé par deux à chaque doublement, les mesures de Q13 suggérant même un facteur quatre que l'on n'a pas démontré. La relation de Q2.d) permet de calculer c_{2n} à partir de c_n sans rien connaître d'autre. Il ne reste qu'à confier le travail à une machine, qui ne se fatigue pas, et à la laisser doubler cent fois. C'est ce que fait cette partie, et elle tourne mal.

△ **Q14. Écrire la boucle.** Compléter le programme suivant, qui affiche A_k pour k allant de 0 à $k_{\max}$, en utilisant la relation de Q2.d).

```

1  from math import sqrt
2
3  def archimede(kmax):
4      c = 1.0                # cote de l'hexagone, c_6 = 1
5      n = 6
6      for k in range(kmax + 1):
7          A = ...           # demi-perimetre inscrit
8          print(k, n, A)
9          c = ...           # relation de Q2.d), puis racine carree
10         n = ...

```

On prendra garde de stocker le côté c_n lui-même, et non son carré : les deux versions ne donnent pas les mêmes résultats aux derniers rangs, et c'est déjà un avertissement.

▲ **Q15. Lire le désastre.** Voici ce que renvoie ce programme, exécuté sur une machine ordinaire.

k	n	valeur affichée	écart à π
10	6 144	3,141592516588155	$1,4 \times 10^{-7}$
12	24 576	3,141592645321216	$8,3 \times 10^{-9}$
13	49 152	3,141592645321216	$8,3 \times 10^{-9}$
15	196 608	3,141592645321216	$8,3 \times 10^{-9}$
17	786 432	3,141592303811738	$3,5 \times 10^{-7}$
20	6 291 456	3,141674265021758	$8,2 \times 10^{-5}$
22	25 165 824	3,143072740170040	$1,5 \times 10^{-3}$
25	201 326 592	3,354101966249685	$2,1 \times 10^{-1}$
27	805 306 368	6,000000000000000	2,9
28	1 610 612 736	0,000000000000000	3,1

- Décrire en trois phrases les trois régimes successifs que montre ce tableau.
- Entre les rangs 12 et 15, la valeur affichée ne change plus d'un seul chiffre. Pourtant n est multiplié par 8. Que s'est-il passé? (Ce blocage n'est pas une convergence.)
- La partie II a démontré que (A_k) est strictement croissante et majorée par $B_0 = 2\sqrt{3} \approx 3,4641$. Relever dans le tableau deux faits qui contredisent cet énoncé démontré. Que peut-on en conclure sur la nature de ce que la machine calcule?

▲ **Q16. Trouver le coupable.** Une machine stocke un nombre décimal avec environ 16 chiffres significatifs. Elle commet donc, sur chaque quantité manipulée, une erreur relative de l'ordre de 2×10^{-16} .

- Que vaut $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_{n_k}$? En déduire la limite de $\sqrt{4 - c_{n_k}^2}$.
- Dans la relation $\forall n \geq 3, c_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$, quelle opération devient dangereuse lorsque c_n devient très petit?
- Pour $c_n = 10^{-6}$, la quantité $\sqrt{4 - c_n^2}$ vaut 1,999999999999750 à 16 chiffres. Calculer $2 - \sqrt{4 - c_n^2}$ et compter le nombre de chiffres significatifs qui subsistent dans le résultat. Conclure.

◆ **Q17. Prédire la catastrophe.** On se propose de retrouver les grandes lignes du tableau de Q15 *sans exécuter le programme*. On admet que l'erreur relative commise sur c_n^2 est multipliée par 4 à chaque doublement, et qu'elle vaut 2×10^{-16} au départ.

- Justifier le facteur 4. (Que devient c_n quand on double le nombre de côtés ? Et c_n^2 ? L'erreur absolue, elle, ne diminue pas.)
- Exprimer l'erreur relative au rang k en fonction de k . De quelle nature est cette suite ?
- Calculer sa valeur au rang 13.
- Cette erreur porte sur c_n^2 . Or le tableau de Q15 affiche un écart sur A_k . Sachant que l'erreur relative sur c_n vaut la moitié de celle sur c_n^2 , et que A_k est voisin de 3, en déduire l'écart *absolu* attendu sur A_{13} . Comparer à la valeur $8,3 \times 10^{-9}$ du tableau de Q15.
- Déterminer le plus petit rang k pour lequel l'erreur relative atteint 1, c'est-à-dire pour lequel il ne reste plus aucun chiffre juste. Comparer au tableau de Q15.
- Commenter : le désastre était-il prévisible avant d'écrire une seule ligne de programme ? Et le plateau des rangs 12 à 15, ce raisonnement le prévoit-il ?

▲ **Q18. La réparation.** On revient à la relation de Q2.d).

- À l'aide de R4, démontrer que

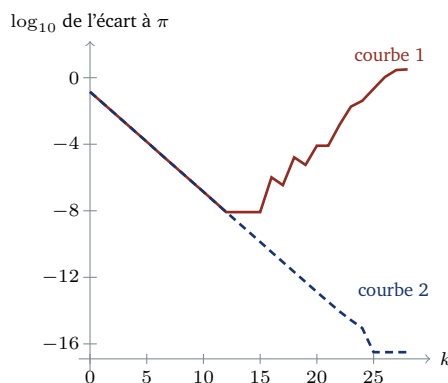
$$\forall n \geq 3, \quad c_{2n} = \frac{c_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - c_n^2}}}.$$

- Vérifier que cette écriture donne bien $c_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ en partant de $c_6 = 1$.
- Les deux écritures définissent *exactement la même suite*. Quelle différence essentielle les sépare du point de vue de la machine ?

▲ **Q19. Vérifier la réparation.** Modifier le programme de Q14 pour qu'il utilise la relation de Q18.a), et l'exécuter jusqu'à $k = 28$. On obtient alors 3,141592653589793 dès le rang 25, et plus rien ne bouge ensuite.

- Comparer au tableau de Q15 et commenter.
- Pourquoi la valeur cesse-t-elle de bouger à partir du rang 25, alors que la suite exacte, elle, continue de croître ?
- Le graphique ci-dessous représente l'ordre de grandeur de l'écart à π , en fonction de k , pour chacune des deux écritures : la valeur -8 signifie un écart voisin de 10^{-8} . Attribuer chaque courbe à son programme, et justifier à l'aide de deux arguments tirés du tableau de Q15.

Convention du graphique : à partir du rang 25, l'une des deux versions donne un écart **exactement nul**, que cette échelle ne peut pas représenter. Le tracé la pose alors sur le plancher de la figure.



♦ **Q20. L'autre chemin.** Les relations de Q9, elles, ne font intervenir aucune soustraction : la moyenne harmonique et la moyenne géométrique n'utilisent que des sommes, des produits, des quotients et une racine.

- Programmer le calcul de A_k et B_k à l'aide des seules relations de Q9, en partant de $A_0 = 3$ et $B_0 = 2\sqrt{3}$.
- Cette version décroche-t-elle ? Formuler une règle générale sur les opérations à éviter lorsqu'on programme une suite récurrente.
- Cette version présente un avantage supplémentaire sur celle de Q18, du point de vue de ce que l'on sait à chaque rang. Lequel ?

PARTIE IV

s'appuie sur la partie II ; indépendante de III, sauf Q24.b) et Q28.c)

Le mode caché

Le décrochage de la partie III avait au moins une qualité : il se voyait. Une suite qui annonce $\pi = 6$ ne trompe personne longtemps. Cette partie présente une trahison d'une tout autre espèce, et bien plus inquiétante : une suite dont la machine calcule la limite proprement, régulièrement, sans le moindre signe d'alarme, et se trompe.

Elle a été construite en 1989 par le mathématicien français Jean-Michel Muller. On pose

$$u_0 = 2, \quad u_1 = -4, \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 111 - \frac{1130}{u_n} + \frac{3000}{u_{n-1} u_n}.$$

△ **Q21. Prendre la suite en main.** Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 sous forme de fractions irréductibles, puis en donner une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

▲ **Q22. La forme cachée.** On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 4 \times 5^n - 3 \times 6^n.$$

- Calculer x_0, x_1, x_2 et x_3 .
- Vérifier que $u_0 = \frac{x_1}{x_0}$ et $u_1 = \frac{x_2}{x_1}$.
- Démontrer que $\forall n \geq 2, x_{n+1} = 111x_n - 1130x_{n-1} + 3000x_{n-2}$. (On pourra vérifier séparément l'identité pour la suite (5^n) , puis pour la suite (6^n) .)
- En déduire par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, en admettant que $x_n \neq 0$ pour tout n .
(ce résultat peut être admis pour la suite)

▲ **Q23. La limite exacte.**

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{20 \left(\frac{5}{6}\right)^n - 18}{4 \left(\frac{5}{6}\right)^n - 3}$. (Factoriser numérateur et dénominateur par 6^n .)
- En déduire, à l'aide de R1, que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Vérifier la cohérence avec les valeurs calculées en Q21.

▲ Q24. Ce que dit la machine. Le même calcul, confié à un ordinateur, donne ceci.

n	valeur exacte	valeur affichée par la machine
10	6,2744385982	6,2744386627
14	6,1158830666	6,1202487046
16	6,0777223048	7,2350211655
18	6,0527217610	78,5755748879
20	6,0360318811	99,8985692662
25	6,0141749146	99,9999999193
30	6,0056486888	100,0000000000

- Quelle limite la machine annonce-t-elle ?
- En quoi cette trahison est-elle plus dangereuse que celle de la partie III ? (*Se demander ce qu'aurait conclu quelqu'un qui ne connaîtrait pas la réponse exacte.*)
- Vérifier que les trois nombres 5, 6 et 100 satisfont

$$5 + 6 + 100 = 111, \quad 5 \times 6 + 5 \times 100 + 6 \times 100 = 1130, \quad 5 \times 6 \times 100 = 3000.$$

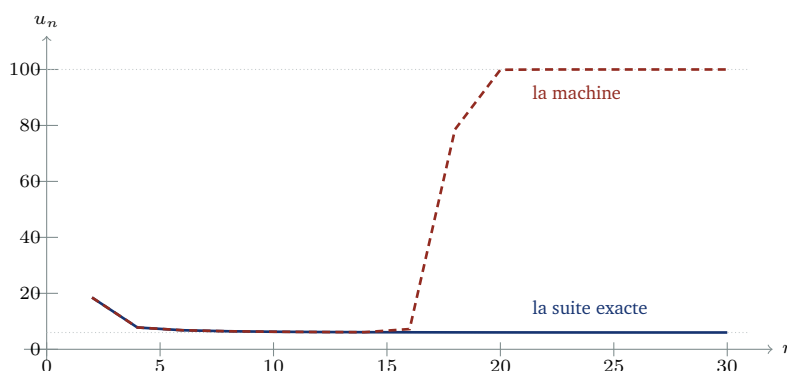
Quel rapport avec la relation de Q22.c) ?

♦ Q25. Le mode qui dormait. On admet que toute suite (y_n) vérifiant la relation de Q22.c) s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \alpha \times 5^n + \beta \times 6^n + \gamma \times 100^n$$

pour un unique triplet de réels $(\alpha; \beta; \gamma)$ déterminé par y_0, y_1 et y_2 .

- Que valent α, β et γ pour la suite (x_n) ?
- On suppose désormais $\gamma \neq 0$. Démontrer que $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ converge vers 100. (*Factoriser par 100^n .*)
- À chaque étape, la machine arrondit le résultat de ses divisions : elle ne calcule donc pas u_{n+1} , mais une valeur qui en diffère d'une erreur *relative* de l'ordre de 2×10^{-16} . Expliquer, à l'aide de b), pourquoi cette perturbation, si petite soit-elle, finit toujours par imposer la réponse 100.
- La suite exacte est un équilibre : elle tient parce que γ vaut *exactement* zéro. Que se passerait-il si l'on calculait avec des fractions plutôt qu'avec des nombres décimaux ?



▲ **Q26. Un rapport suspect.** On revient à Archimède, et l'on cherche à tirer davantage des mêmes polygones. On donne, pour cette question et la suivante,

$$\pi = 3,14159265358979 \dots$$

- Calculer, avec trois décimales, le rapport $\frac{B_k - \pi}{\pi - A_k}$ pour $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. (Ici encore, reprendre A_k et B_k en pleine précision : le tableau de Q4 est trop arrondi pour cette question.)
- Formuler une conjecture sur la limite de ce rapport.
- Interpréter : π est-il au milieu de l'intervalle $]A_k; B_k[$? Où se trouve-t-il?

◆ **Q27. L'accélération.** La conjecture de Q26 suggère de ne pas prendre la moyenne des deux bornes, mais une moyenne pondérée qui tienne compte du déséquilibre.

- En admettant la conjecture de Q26.b), justifier que le point de l'intervalle $]A_k; B_k[$ vers lequel pointent les deux bornes est le nombre S_k défini par $\forall k \in \mathbb{N}, S_k = \frac{2A_k + B_k}{3}$.
- Calculer S_4 avec huit décimales, à partir de A_4 et B_4 pris en pleine précision, et compter le nombre de décimales exactes de π qu'il fournit.
- Comparer avec A_4 et B_4 , qui proviennent du même 96-gone. Combien de doublements supplémentaires aurait-il fallu à Archimède pour atteindre seul cette précision?
- Calculer de même S_0 , obtenu à partir du seul hexagone, et commenter.

LEYDE, 1621

Cette accélération est due à Willebrord Snell, qui la publie en 1621 dans son *Cyclometricus*. Elle lui permet d'obtenir, à partir du seul 96-gone, une précision qu'Archimède aurait dû payer de plusieurs doublements supplémentaires. Christiaan Huygens portera la méthode plus loin encore en 1654. Le même ouvrage de Snell contient une autre publication : les trente-cinq décimales calculées par son maître Ludolph van Ceulen, mort onze ans plus tôt.

◆ **Q28. Pourquoi deux tiers et un tiers?** La pondération 2 : 1 de Q27 a été devinée à partir de mesures numériques, puis utilisée. Elle n'a pas été démontrée, et sa démonstration demande des outils que vous rencontrerez dans le supérieur.

- En quoi la démarche suivie en Q26 et Q27 diffère-t-elle de celle des parties I et II?
- Une conjecture vérifiée sur cinq rangs successifs et une propriété démontrée ont-elles le même statut? Que risque-t-on exactement en utilisant la première comme si c'était la seconde?
- Le tableau de Q15 offre un argument sévère en faveur de votre réponse en b). Lequel?

ÉPILOGUE

Ce qui reste gravé

LEYDE, 1540-1610

Ludolph van Ceulen naît à Hildesheim en 1540. Il ne lit pas le latin, ce qui lui interdit longtemps de répondre publiquement à ses contradicteurs savants. Il tient des salles d'armes à Delft, puis à Leyde, et enseigne l'escrime avant les mathématiques. Ce n'est qu'en 1600, à soixante ans, qu'il est nommé premier professeur de l'école d'ingénieurs de Leyde, où il enseigne l'arithmétique, l'arpentage et la fortification.

Il consacre l'essentiel de sa vie à la méthode d'Archimède, et la pousse jusqu'à un polygone à 2^{62} côtés, ce qui

lui donne trente-cinq décimales. Il achète une tombe à la Pieterskerk de Leyde le 11 novembre 1602, et fait graver sur sa pierre ses deux bornes, la basse et la haute, écrites en fractions à la manière d'Archimède. La pierre disparaît vers 1800. Une réplique a été inaugurée en 2000.

▲ Q29. Le coût d'une vie.

- La question Q13.c) a donné le nombre de doublements nécessaires pour atteindre 35 décimales exactes. En déduire le nombre de côtés du polygone correspondant, sous la forme 6×2^k puis en écriture décimale approchée.
- Comparer au polygone à 2^{62} côtés de van Ceulen. Son choix était-il excessif, insuffisant, ou raisonnable ?
- La partie III a montré qu'une machine ordinaire décroche vers la neuvième décimale avec la méthode naïve. Que faut-il en conclure sur la manière dont van Ceulen a nécessairement conduit ses calculs ?

HOUGHTON-LE-SPRING, PUIS PARIS

William Shanks, né en 1812, tient un pensionnat privé dans le comté de Durham. Il calcule π à la main par une tout autre méthode que celle des polygones, et publie en 1873 sept cent sept décimales. En 1944, D. F. Ferguson découvre qu'il s'est trompé à la cinq cent vingt-huitième : Shanks avait omis deux termes, et les cent soixante-dix-neuf dernières décimales sont fausses.

Le Palais de la Découverte, ouvert à Paris en 1937, avait fait inscrire ces sept cent sept décimales en grands caractères de bois sur le plafond en coupole de sa salle circulaire. L'erreur y fut repérée en 1946, et les chiffres corrigés en 1949.

♦ **Q30. Qui avait raison ?** Trois calculateurs apparaissent dans ce document : Archimède, qui donne un encadrement moins précis que ses propres polygones ne l'autorisaient ; van Ceulen, qui obtient trente-cinq décimales justes à la main ; et une machine, qui affirme que π vaut 6.

- Classer ces trois calculateurs selon la *fiabilité* de ce qu'ils affirment, et non selon la précision atteinte. Justifier.
- Archimède, van Ceulen et Shanks ont tous les trois annoncé un résultat sans pouvoir le comparer à une valeur de référence. Comment peut-on avoir confiance dans un calcul dont personne n'a la réponse ? Deux mécanismes différents apparaissent dans ce document : les identifier.
- Rédiger, en une dizaine de lignes, ce que ce voyage vous a appris sur la différence entre *calculer* et *démontrer*.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2.d). Dans le triangle UMW , l'angle droit est en M . Les deux côtés de l'angle droit sont $UM = \frac{c_n}{2}$ et $MW = f_n$. Développez $(1 - h_n)^2$ sans oublier le double produit.

Q5.a). Une homothétie de centre O transforme le polygone inscrit en un polygone régulier de même nombre de côtés, et multiplie toutes les distances issues de O par le rapport. Que doit devenir h_n ?

Q9.a). Écrivez, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = n_k \sin \Theta_k$ et $B_k = n_k \tan \Theta_k$, puis $B_{k+1} = 2n_k \tan \Theta_{k+1}$ en n'oubliant pas que le nombre de côtés double aussi. Exprimez ensuite $\Theta_k = 2\Theta_{k+1}$ et appliquez R3.

Q11.b). L'égalité suggérée s'obtient en écrivant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} - A_{k+1} = \sqrt{B_{k+1}} (\sqrt{B_{k+1}} - \sqrt{A_k})$ grâce à Q9.b), puis en appliquant R4 au facteur de droite.

Q11.c). Le premier facteur est un quotient dont le numérateur est l'un des deux termes du dénominateur : il est donc compris entre 0 et 1. Pour le second, utilisez que $\forall k \in \mathbb{N}, A_k < B_k$.

Q13.c). Une décimale exacte de plus, c'est un écart divisé par 10. Combien de fois faut-il diviser par 4 pour diviser par 10? Une réponse approchée suffit.

Q15.b). Regardez ce que vaut $\sqrt{4 - c_n^2}$ quand c_n^2 est très petit : son arrondi peut coïncider *exactement* avec $2 - \frac{c_n^2}{4}$. Que rend alors la soustraction, et que devient c_n d'un rang au suivant? Comparez l'effet sur c et sur n dans le produit $\frac{n \cdot c}{2}$. (Cette coïncidence d'arrondi ne dure que quelques rangs, ce qui explique la reprise visible ensuite.)

Q17.a). Quand le nombre de côtés double, chaque côté est à peu près deux fois plus court. L'erreur *absolue* commise par la machine, elle, reste de l'ordre de 2×10^{-16} quel que soit le rang, puisqu'elle provient de la soustraction de deux nombres voisins de 2.

Q17.f). Comparez ce que prédit une suite géométrique, qui croît régulièrement, avec ce que montre le tableau entre les rangs 12 et 15. Un raisonnement peut être juste et ne pas tout expliquer.

Q18.a). Soit $n \geq 3$. Appliquez R4 avec $A = 2$ et $B = \sqrt{4 - c_n^2}$ pour transformer $c_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$, puis prenez la racine carrée.

Q20.c). Avec la relation de Q18, on ne connaît à chaque rang qu'une seule des deux bornes. Que perd-on?

Q22.c). Il suffit de vérifier que $\forall n \geq 2, 5^{n+1} = 111 \times 5^n - 1130 \times 5^{n-1} + 3000 \times 5^{n-2}$, ce qui revient, après division par 5^{n-2} , à une égalité entre deux entiers. Faire de même avec 6.

Q25.b). Écrivez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 100^n [\alpha (\frac{5}{100})^n + \beta (\frac{6}{100})^n + \gamma]$, puis formez le quotient $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ et simplifiez par 100^n .

Q27.a). Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $B_k - \pi$ vaut le double de $\pi - A_k$, alors l'intervalle $[A_k; B_k]$ est coupé par π dans le rapport 1 : 2. Le point cherché est donc au tiers de l'intervalle en partant de A_k .

Q29.a). Reprenez le nombre de doublements trouvé en Q13.c), puis multipliez 6 par la puissance de 2 correspondante. Un ordre de grandeur suffit.

ANNEXE • LE LABORATOIRE PYTHON

Les programmes de ce document n'utilisent que des boucles et des variables accumulatrices. Aucun n'est obligatoire, tous éclairent une partie du voyage.

Pour comparer vos résultats à une référence, on pourra utiliser la valeur $\pi = 3,14159265358979$, fournie par la constante `pi` du module `math`. Cette valeur est *extérieure* au voyage : elle sert à mesurer une erreur, jamais à démontrer quoi que ce soit.

Le squelette commun aux questions Q14 et Q19 est le suivant. Une seule ligne change d'une version à l'autre : celle qui met la suite à jour.

```

1  from math import sqrt, pi
2
3  def table(kmax, version):
4      c = 1.0                                # cote de l'hexagone
5      n = 6
6      for k in range(kmax + 1):
7          A = n * c / 2
8          print(k, n, A, abs(A - pi))
9          if version == "naif":
10             c = ...                        # relation de Q2.d), voir Q14
11         else:
12             c = ...                        # relation de Q18.a), voir Q19
13         n = 2 * n

```

Pour les questions Q13, Q20, Q26 et Q27, on n'a plus besoin des côtés : les deux demi-périmètres se calculent l'un à partir de l'autre.

```

1 def moyennes(kmax):
2     A, B = 3.0, 2*sqrt(3)
3     for k in range(kmax + 1):
4         S = (2*A + B)/3          # la moyenne ponderee de Q27
5         print(k, A, B, B - A, S, abs(S - pi))
6         B = ...                  # moyenne harmonique, Q9.a)
7         A = ...                  # moyenne geometrique, Q9.b)

```

C'est ce programme qui fournit les valeurs en pleine précision demandées en Q13, Q26 et Q27 : les six décimales du tableau de Q4 n'y suffisent pas.

Enfin, la suite de la partie IV se programme en trois lignes. On la fera tourner deux fois : une fois avec des nombres décimaux, une fois avec des fractions exactes, à l'aide du module `fractions`.

```

1 from fractions import Fraction
2
3 def muller(nmax, exact):
4     if exact:
5         u, v = Fraction(2), Fraction(-4)
6     else:
7         u, v = 2.0, -4.0
8     for n in range(1, nmax):
9         u, v = v, 111 - 1130/v + 3000/(u*v)
10        print(n + 1, float(v))

```

▲ **Q31. Les deux arithmétiques.** Exécuter ce dernier programme jusqu'au rang 30, dans les deux modes.

- Vers quoi converge chaque version ?
- Modifier la dernière ligne pour afficher u_{30} en mode exact sous forme de fraction, et non en nombre décimal. Combien de chiffres comportent son numérateur et son dénominateur ?
- En déduire ce que la machine paie pour ne jamais se tromper.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Le tableau complet des trente doublements, les programmes prêts à exécuter, l'histoire de la pierre de Leyde et le récit des termes correcteurs de l'école du Kerala, qui accéléraient déjà la convergence deux siècles avant Snell, vous attendent sur le compagnon numérique.