



EXERCICES · A1. SUITES : LIMITES

Trente et un exercices pour apprendre à regarder au bout

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Premiers pas asymptotiques	Ex. 1–4	★ à ★★★★★	■ ◆	cours A1, § 1–4
II. La boîte à outils du calcul	Ex. 5–9	★ à ★★★★★	■ ◆	cours A1, § 3
III. La géométrie dans tous ses états	Ex. 10–14	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours A1, § 4
IV. Encadrer, contracter, conclure	Ex. 15–20	★★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours A1, § 5–6
V. Histoires et belles mathématiques	Ex. 21–28	★★★★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	cours A1, § 4–5
VI. Python, le laboratoire	Ex. 29–31	★★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours A1, § 6.2

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Terminale Spécialité : fiche 2 (Limites de suites). En réactivation du socle de première, Cahier de calcul de Première Spécialité : fiches 13 à 18 (Suites). Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. PREMIERS PAS ASYMPTOTIQUES

↔ s'appuie sur COURS A1, § 1–4 · vocabulaire, définitions et comportements

EXERCICE 1 · APL-A1-01



Majorée, minorée, bornée

Pour chacune des suites suivantes, dire si elle est majorée, minorée, bornée. Lorsque c'est le cas, **exhiber** un majorant ou un minorant explicite.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - \frac{1}{n+1}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 - 10n$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = (-1)^n$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \frac{(-1)^n}{n}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sin(n)$

6. $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2^n - n$

Coup de pouce

Un majorant est un nombre réel fixe. Si votre réponse contient la lettre n , ce n'est pas un majorant.

EXERCICE 2 · APL-A1-02

★★ ■ ⌚

Les trois comportements

Classer les suites ci-dessous en trois familles : convergentes, divergentes vers $\pm\infty$, sans limite. Justifier en une ligne à chaque fois.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3n-1}{n}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n - 1000$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = (-1)^n n$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

5. $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{\cos(n)}{n}$

Coup de pouce

Une suite non bornée n'a pas forcément pour limite $+\infty$: regardez la troisième.

EXERCICE 3 · THE-A1-03

★★★★ ■ ⌚

Le défi des epsilon

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- Déterminer, pour $\varepsilon = 10^{-2}$ puis pour $\varepsilon = 10^{-4}$, le plus petit rang N à partir duquel $|u_n| < \varepsilon$.
- Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, exprimer un rang N convenable en fonction de ε . Conclure.
- Traduire en français, sans aucun symbole, l'énoncé $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$.
- On échange les deux premiers quantificateurs : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Que dit cet énoncé ? Est-il vrai pour la suite ci-dessus ?

Coup de pouce

Pour la question 4 : si un même rang N convient pour tous les ε , aussi petits soient-ils, que vaut u_n à partir de ce rang ?

La suite qui ment

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Calculer u_{10} , u_{100} et u_{1000} à la calculatrice.
2. Un élève raisonne ainsi : « quand n devient grand, $1 - \frac{1}{n}$ tend vers 1, et 1 élevé à n'importe quelle puissance vaut 1 ; donc (u_n) tend vers 1 ». Ses valeurs numériques lui donnent-elles raison ?
3. Où est la faille dans son raisonnement ? Aucun théorème du cours ne s'applique ici : dites précisément lequel il a cru utiliser, et pourquoi il n'en avait pas le droit.

RAPPEL – UNE LIMITE NE SE LIT PAS MORCEAU PAR MORCEAU

Les théorèmes d'opérations exigent que *chaque* limite existe et que le résultat ne soit pas une forme indéterminée. Ici, ni l'un ni l'autre.

DÉFI – ★

La limite de cette suite est $\frac{1}{e}$. Vous démontrerez ce résultat au chapitre F3, avec le logarithme.

II. LA BOÎTE À OUTILS DU CALCUL

↔ s'appuie sur COURS A1, § 3 · opérations, indéterminations, comparaison

Opérations sans piège

Déterminer les limites suivantes. Aucune n'est une forme indéterminée : nommer à chaque fois le théorème d'opération utilisé.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^3 + \frac{1}{n} \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2 + 1}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 7)$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} \right) (n + 1)$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

Nommer la forme indéterminée

Pour chaque suite, **nommer d'abord** la forme indéterminée rencontrée, **puis** lever l'indétermination.

$$1. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1}$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N}, w_n = 3^n - 2^n$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$4. \forall n \geq 2, t_n = \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$$

Coup de pouce

Pour la troisième : mettez en facteur celui des deux qui écrase l'autre.

Le terme prépondérant

Déterminer les limites suivantes en factorisant par le terme qui domine.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 - 5n^2 + 7)$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 1}{n^3 + n^2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^3 + n}{2n^2 + 5}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \times 4^n - 3^n}{2 \times 4^n + 1}$$

La quantité conjuguée

↔ s'appuie sur COURS A1, § 3.2 · la technique de la conjuguée

Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

Coup de pouce

La troisième n'est pas la deuxième déguisée : factorisez d'abord par n^2 sous le radical pour voir apparaître le bon coefficient.

Encadrer pour conclure

1. Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2n + (-1)^n}{n}$. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{\sin(n) + \cos(n^2)}{\sqrt{n}}$. Déterminer sa limite.
3. Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$.
 - (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} \leq \frac{k}{n^2 + 1}$.
 - (b) En déduire un encadrement de S_n , puis sa limite. On rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

RAPPEL – SOMMER DES INÉGALITÉS

Additionner membre à membre n inégalités de même sens est licite. C'est souvent le seul moyen d'attaquer une somme dont le nombre de termes dépend de n .

III. LA GÉOMÉTRIQUE DANS TOUS SES ÉTATS

↔ s'appuie sur COURS A1, § 4 · comportement de q^n , sommes, modélisation

Les quatre régimes

1. Déterminer, en justifiant par la position de la raison, la limite de chacune des suites suivantes : $((\frac{4}{5})^n), ((\frac{5}{4})^n), ((-3)^n), ((-\frac{3}{4})^n), (0,999^n), (1,001^n)$.
2. Déterminer la limite de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.
3. Déterminer la limite de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{5^n}{n}$. ♦

Coup de pouce

Pour la question 3, démontrer d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 5^n \geq n^2$, puis minorer v_n .

Sommer une géométrie

1. Calculer $\sum_{k=0}^{20} \left(\frac{1}{3}\right)^k$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k$. Attention au premier terme.
3. **Le nombre** 0,999... Le nombre décimal illimité 0,999... est par définition la limite de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \sum_{k=1}^n \frac{9}{10^k}$. Calculer cette limite. Conclure.

DÉFI — ♦

Beaucoup de gens refusent l'égalité obtenue à la question 3. Rédiger en trois lignes ce qu'il faudrait leur faire admettre *avant* de la démontrer.

Le coureur et le tour de l'Europe

Un coureur parcourt 50 km le premier jour. Chaque jour suivant, il parcourt 1 % de moins que la veille. On note d_n la distance parcourue le n -ième jour et D_n la distance totale au bout de n jours.

1. Exprimer d_n en fonction de n , puis D_n .
2. Compléter le tableau suivant (arrondis au kilomètre).

n	10	100	500	1000
D_n				

3. Le coureur pourra-t-il un jour dépasser 5 000 km ? Démontrer votre réponse.
4. Il court indéfiniment, et pourtant sa distance totale reste bornée. Expliquer ce paradoxe apparent en une phrase.

Rembourser un emprunt

Une famille emprunte $C_0 = 200\,000$ euros. Le taux mensuel est de 0,25 % et la mensualité est de $M = 1\,100$ euros. On note C_n le capital restant dû après la n -ième mensualité. Alors :

$$C_0 = 200\,000 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = 1,0025 C_n - 1\,100.$$

1. Calculer C_1 et C_2 . Combien la première mensualité a-t-elle réellement remboursé de capital ?
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = C_n - 440\,000$. Démontrer que (D_n) est géométrique et préciser sa raison.
3. En déduire une expression de C_n en fonction de n .

4. Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour solder l'emprunt.
5. Que se passerait-il si la mensualité n'était que de 500 euros ? Justifier sans calcul long. ♦

Coup de pouce

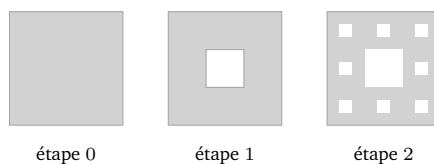
La valeur 440 000 n'est pas tombée du ciel : c'est l'unique réel ℓ vérifiant $\ell = 1,0025 \ell - 1\,100$.

EXERCICE 14 · APR-A1-14

★★★★ ♦ ☆ ⌚

Le tapis de Sierpinski

On part d'un carré de côté 1. À chaque étape, on découpe chaque carré restant en neuf carrés égaux et l'on retire celui du centre. On note $\mathcal{A}_n$ l'aire totale restante après n étapes.



1. Calculer $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{n+1} = \frac{8}{9} \mathcal{A}_n$, puis exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n .
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat sur la figure.
4. On note $\mathcal{P}_n$ le nombre de carrés retirés au total après n étapes. Exprimer $\mathcal{P}_n$ et déterminer sa limite. ☆
5. Commenter : à la limite, on retire une infinité de carrés, et il ne reste rien. Pourtant l'objet obtenu n'est pas vide. ☆

DÉFI – ☆

La même construction, appliquée à un segment plutôt qu'à un carré, donne l'ensemble de Cantor. Le devoir maison du chapitre vous emmènera sur un cousin de cette figure, où le paradoxe sera encore plus violent.

IV. ENCADRER, CONTRACTER, CONCLURE

↔ s'appuie sur COURS A1, § 5–6 · limite monotone et suites récurrentes

Première récurrence sur un encadrement

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 (valeurs approchées au millièmè).
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 3$.
3. Démontrer que (u_n) est croissante.
4. Que peut-on en conclure, sans aucun calcul supplémentaire ?

RAPPEL – LE THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

Croissante et majorée : la suite converge. Le théorème ne donne pas la valeur de la limite, et ce n'est pas un défaut : c'est ce qui fait sa force.

Télescopage et minoration

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2.$$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$.
3. Écrire $u_n - u_0$ comme une somme de différences consécutives, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$.
4. Conclure quant à la limite de (u_n) .

Coup de pouce

Question 3 : $u_n - u_0 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_1 - u_0)$. Combien y a-t-il de parenthèses ?

Une homographie de bout en bout

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 . Conjecturer le comportement de la suite.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 3$.

- Démontrer que (u_n) est croissante.
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3 - u_n}$. Démontrer que (a_n) est arithmétique et préciser sa raison.
- En déduire une expression explicite de u_n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

RAPPEL – LA BONNE SUITE AUXILIAIRE

Face à une suite définie par un quotient, chercher une suite auxiliaire arithmétique ou géométrique est presque toujours la clé. Le tout est de deviner laquelle : ici, la limite conjecturée à la question 1 vous souffle le $3 - u_n$.

EXERCICE 18 · THE-A1-18

**Le mécanisme de la contraction**

Soit (u_n) une suite réelle, ℓ un réel et k un réel vérifiant $0 < k < 1$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|.$$

- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
- En déduire que (u_n) converge vers ℓ .
- Application.** Soit (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n + 6}{4}$. Vérifier que $\ell = 2$ satisfait $\ell = \frac{\ell + 6}{4}$, puis établir une inégalité de contraction et conclure.
- Combien d'itérations garantissent $|v_n - 2| < 10^{-6}$? ♦

DÉFI – ★

Ce mécanisme porte un nom : c'est le *théorème du point fixe contractant*. Vous en verrez la version générale, avec la fonction qui se cache derrière la récurrence, au chapitre F1.

EXERCICE 19 · SYN-A1-19

**Récurrence d'ordre deux, et la formule de Binet**

Partie A. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$

- Calculer u_2, u_3, u_4 .
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.
- En déduire une expression de u_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie B. La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = F_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

- Vérifier que φ et ψ sont les deux solutions de $x^2 = x + 1$.

- En déduire que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ vérifie la même relation de récurrence que (F_n) .
- Vérifier G_1 et G_2 , puis conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = G_n$. Deux rangs consécutifs sont ici nécessaires : on invoquera une **récurrence double** (voir A0).
- Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi^n = 0$, et en déduire une valeur approchée simple de F_n pour les grandes valeurs de n . ★

EXERCICE 20 · APR-A1-20

★★★★ ★ ★

Une inégalité arithmétique par un détournement analytique

Soit (x_n) la suite définie par

$$x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} x_n.$$

- On pose $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{x_n}{n+1}$. Démontrer que (a_n) est géométrique, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$.
- Démontrer que (x_n) est décroissante à partir du rang 1. Vérifier au passage que $x_1 = x_0$.
- En comparant x_n à x_0 , en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq 2^n$.

DÉFI — ★

Vous venez d'obtenir une inégalité purement arithmétique par un chemin entièrement analytique. Cherchez maintenant une démonstration directe par récurrence, et comparez les deux : laquelle vous apprend le plus ?

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur COURS A1, § 4–5 · sommes, télescopes et théorèmes d'existence

EXERCICE 21 · SYN-A1-21

★★★★ ★ ★

Le nombre e par une autre porte

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

- Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 sous forme de fractions.
- Démontrer que (u_n) est croissante.
- Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, k! \geq 2^{k-1}$.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$.
5. Conclure. Quelle est la nature du résultat obtenu : avez-vous calculé la limite, ou seulement démontré qu'elle existe ?
6. Comparer u_8 à la valeur de e affichée par votre calculatrice. Combien de décimales exactes ?

RAPPEL – LE COURS A DÉJÀ CONSTRUIT e

Au paragraphe 5.7, e était apparu comme limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$. Vous venez de l'atteindre par un chemin totalement différent, et bien plus rapide. On **admet** que ces deux limites coïncident ; la démonstration viendra au chapitre F3.

EXERCICE 22 · APR-A1-22

★★★★ ♦ ☆ ⌚

Le théorème de Nicomaque

Vers l'an 100, Nicomaque de Gérase observe que la somme des n premiers cubes est un carré parfait. Le résultat traversera les siècles : on le retrouve chez Aryabhata au V^e siècle, chez Al-Karaji vers l'an 1000, puis chez Wheatstone au XIX^e.

1. Vérifier l'affirmation pour $n = 1, 2, 3$ et 4. De quel carré s'agit-il à chaque fois ?
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2.$$

3. En sommant cette égalité pour k allant de 1 à n , démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3$.

DÉFI – ☆

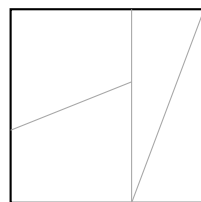
On peut aussi démontrer ce résultat par récurrence. Mais la récurrence exige de *connaître déjà* la formule, alors que le télescopage la *construit*. Rédigez les deux et jugez.

EXERCICE 23 · APR-A1-23

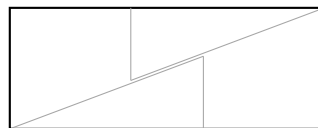
★★★★ ♦ ☆ ⌚

Cassini, et le carré qui vaut 65

En 1868, Schlömilch publie un découpage troublant. Lewis Carroll s'en empare : on le retrouvera, après la mort de ce dernier, dans ses papiers personnels. Un carré de côté 8 est découpé en quatre pièces, puis réassemblé en un rectangle 5×13 .



$$8 \times 8 = 64$$



$$13 \times 5 = 65$$

1. Repérer les nombres 5, 8 et 13 dans la suite de Fibonacci.
2. Démontrer par récurrence l'identité de Cassini :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

en convenant que $F_0 = 0$.

3. Que vaut cette quantité pour $n = 6$? Quel lien avec le paradoxe ?
4. Où est passée l'aire manquante ? Calculer, sur la figure de droite, l'écart entre la diagonale du rectangle et la ligne brisée qui joint $(0; 0)$ à $(13; 5)$ en passant par $(5; 2)$, et conclure. ★
5. Le tour marcherait-il mieux ou moins bien avec F_{10} , F_{11} , F_{12} ? Justifier à l'aide de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. ★

Coup de pouce

Question 4 : les points $(0; 0)$, $(5; 2)$ et $(13; 5)$ ne sont pas alignés. Comparez les trois coefficients directeurs $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{13}$: l'écart se joue à la troisième décimale.

EXERCICE 24 · APR-A1-24

★★★★★ ♦ ★

Viète, 1593 : le premier produit infini

Pour approcher π , François Viète compare en 1593 les aires des polygones réguliers à 2^n puis 2^{n+1} côtés. Il obtient la première formule explicite donnant π de toute l'histoire des mathématiques, et le premier produit infini jamais écrit. Au cœur de sa construction se trouve la suite suivante.

Soit (a_n) définie par :

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

1. Calculer a_2 , a_3 , a_4 (valeurs approchées à 10^{-6}).
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n < 2$.
3. Démontrer que (a_n) est croissante. Que peut-on en conclure ?
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 - a_{n+1} = \frac{2 - a_n}{2 + a_{n+1}}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 - a_{n+1} \leq \frac{1}{3} (2 - a_n)$.
5. En déduire la limite de (a_n) .

Coup de pouce

Question 4 : partez de $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$ et faites apparaître $4 - a_{n+1}^2$.

Sylvester, 1880 : une somme d'inverses qui vaut 1

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 .
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$.
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

4. En sommant, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$. Vérifier sur $n = 1, 2, 3$.
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, puis conclure que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \cdots = 1.$$

DÉFI — ☆

Les sommes partielles valent $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{41}{42}, \frac{1805}{1806}, \frac{3\,263\,441}{3\,263\,442}$: elles frôlent 1 sans jamais l'atteindre. Une écriture d'un nombre comme somme d'inverses d'entiers distincts s'appelle une *fraction égyptienne* : les scribes du Moyen Empire ne calculaient pas autrement.

Montmort, 1708 : le problème des chapeaux

n invités déposent leur chapeau au vestiaire. À la sortie, on les leur rend au hasard. Quelle est la probabilité que **personne** ne retrouve le sien ? Pierre Rémond de Montmort pose la question en 1708 dans son *Essay d'analyse sur les jeux de hasard* ; Euler y reviendra en 1751, sans avoir connaissance des travaux de Montmort.

On admet que cette probabilité vaut

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. Calculer p_1, p_2, p_3, p_4 sous forme de fractions.
2. Calculer p_6 et p_{10} à 10^{-8} près. Que remarque-t-on ?
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = p_{2n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = p_{2n+1}$. Démontrer que (q_n) est décroissante et que (r_n) est croissante.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n - r_n = \frac{1}{(2n+1)!}$, puis que cette différence tend vers 0.
5. Conclure que (p_n) converge. Sa limite est $\frac{1}{e}$. On **admet** que si les termes de rang pair et ceux de rang impair d'une suite convergent vers une même limite, alors la suite converge vers cette limite.

6. **Le contre-intuitif.** Dix convives ou dix mille : la réponse est la même, environ 0,368. Expliquer en une phrase pourquoi la probabilité ne dépend pratiquement plus de n .

RAPPEL – SUITES ADJACENTES

Deux suites dont l'une croît, l'autre décroît, et dont la différence tend vers 0 : vous avez rencontré cette configuration en activité, avec les deux moyennes de Gauss. On dit qu'elles sont *adjacentes*, et elles convergent vers une même limite.

EXERCICE 27 · APR-A1-27

★★★★★ ★ ⌛

Fourier, 1815 : le nombre e est irrationnel

Euler avait établi dès 1737, par le chemin ardu des fractions continues, que e n'est pas un rationnel. En 1815, un recueil de Janot de Stainville publie de Joseph Fourier une démonstration d'une simplicité stupéfiante du même fait. On reprend la suite de l'exercice 21 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, dont la limite est e .

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $(n+j)! \geq n! \times (n+1)^j$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < e - u_n \leq \frac{1}{n! \times n}$. On majorera d'abord $u_m - u_n$ pour $m > n$, puis on fera tendre m vers $+\infty$; on **admet** que les inégalités larges se conservent par passage à la limite.
- Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier d'abord que l'on peut supposer $q \geq 2$ (on rappelle que $2 < e \leq 3$), puis que $q! u_q$ est un entier.
- Démontrer que $q! e$ serait alors un entier, puis que

$$0 < q! e - q! u_q \leq \frac{1}{q}.$$

- Conclure.

Coup de pouce

Question 5 : vous avez fabriqué un entier strictement compris entre 0 et 1.

DÉFI – ★

Le chapitre A0 vous a fait démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, par l'absurde. Vous venez de recommencer avec e , par l'absurde aussi, mais avec une suite pour seule arme. La même question pour π a résisté jusqu'en 1761, et la démonstration de Lambert est nettement plus dure.

Ramanujan, 1911 : six mois sans réponse

En 1911, un jeune homme de Madras sans position académique, nommé Srinivasa Ramanujan, pose dans le *Journal of the Indian Mathematical Society* la question de la valeur de

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}$$

Personne ne répond. Au bout de six mois, il donne lui-même la réponse.

Pour donner un sens à cette écriture, on définit, pour tout entier $N \geq 2$, le nombre R_N obtenu en arrêtant l'emboîtement au rang N :

$$R_N = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots + (N-1)\sqrt{1+N}}}}$$

Précisément, on pose $E_N = \sqrt{1+N}$, puis, pour k décroissant de $N-1$ jusqu'à 2, $E_k = \sqrt{1+k E_{k+1}}$; on convient alors que $R_N = E_2$.

1. Calculer R_2, R_3, R_4, R_5 à la calculatrice. Que conjecturez-vous ?
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = 1 + x(x+2)$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+2 = \sqrt{1+(n+1)(n+3)}$.
4. En utilisant l'identité de la question 3 de proche en proche, démontrer que $\forall N \geq 2, R_N \leq 3$.
5. Justifier que la suite $(R_N)_{N \geq 2}$ est croissante, et en déduire qu'elle converge. On **admet** que sa limite vaut exactement 3, la valeur que Ramanujan avait donnée : les questions précédentes établissent l'existence de la limite, pas sa valeur.

Coup de pouce

Question 4 : l'identité de la question 3 permet de remplacer 3 par $\sqrt{1+2 \times 4}$, puis 4 par $\sqrt{1+3 \times 5}$, et ainsi de suite. En remontant, vous obtenez une expression emboîtée dont R_N est une troncature.

VI. PYTHON, LE LABORATOIRE

↔ s'appuie sur COURS A1, § 6.2 · recherche de seuil et exploration

Trois seuils

1. Écrire une fonction `seuil_geo(q, cible)` qui renvoie le plus petit entier n tel que $q^n > \text{cible}$, pour $q > 1$.
2. L'utiliser pour déterminer au bout de combien d'années un capital placé à 3 % par an aura doublé.
3. Écrire une fonction qui renvoie le plus petit n tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 10$. Combien de termes faut-il ?
4. Pourquoi ne peut-on pas espérer atteindre 100 avec le même programme ?

RAPPEL – LA BOUCLE ET LE THÉORÈME

Une boucle `while` ne s'arrête que si la condition finit par devenir fausse. C'est un théorème mathématique qui vous l'assure, jamais le programme.

EXERCICE 30 · APL-A1-30

★★ ■ ⌚

Un algorithme de seuil à compléter

Un lac contient 5 000 poissons. Chaque année, la population diminue de 20 %, puis le gestionnaire réintroduit 500 poissons. On note u_n le nombre de poissons après n années :

$$u_0 = 5\,000 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,8 u_n + 500.$$

On cherche au bout de combien d'années la population passe sous 3 000 poissons. Le programme suivant répond à la question, mais il est incomplet.

```

1  def seuil():
2      u = 5000
3      n = 0
4      while ... :
5          u = ...
6          n = ...
7      return n

```

1. Recopier et compléter les trois lignes en pointillés.
2. Faire tourner le programme à la main pour les trois premières itérations, en présentant les valeurs successives de u et de n dans un tableau. Puis donner la valeur renvoyée par `seuil()`.
3. Pourquoi ne peut-on pas remplacer la boucle `while` par une boucle `for` ?
4. Modifier la fonction pour qu'elle prenne le seuil en paramètre, sous la forme `seuil(s)`. Que renvoie alors `seuil(2600)` ?
5. Un élève lance `seuil(2400)` : son programme ne s'arrête jamais. Déterminer la limite de (u_n) et expliquer.
6. Qu'est-ce qui garantit, pour le seuil 3 000, que la boucle s'arrête bien ? Ce n'est pas le programme qui peut le dire. ♦

Coup de pouce

Question 5 : posez $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = u_n - 2\,500$ et regardez ce que devient cette suite.

RAPPEL – LE SEUIL AU BACCALAURÉAT

La recherche de seuil est explicitement au programme, et l'énoncé fournit presque toujours le code, à compléter ou à interpréter. Deux réflexes : la condition du `while` porte sur ce que l'on veut voir cesser, et le compteur s'incrémente une fois par tour, jamais ailleurs.

La machine à contre-exemples

Un élève affirme : « pour tout entier $n \geq 2$, on a $\frac{n^{10}}{1,5^n} \geq 1$ ». Il a vérifié jusqu'à $n = 100$.

1. Écrire un programme qui teste son affirmation pour n allant de 2 à 100 et confirme qu'aucun contre-exemple n'apparaît.
2. Modifier le programme pour chercher le premier contre-exemple, sans borne fixée à l'avance. Quel est-il ?
3. L'élève a-t-il eu tort de conjecturer ? A-t-il eu tort d'affirmer ?
4. Rédiger, en une phrase, ce que cet exercice dit du rapport entre l'ordinateur et la démonstration.

DÉFI – ☆

Modifiez l'exposant : jusqu'où faut-il aller pour que le premier contre-exemple dépasse le million ? Et pour qu'il dépasse ce que votre machine sait calculer ?

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les réponses aux défis étoilés, les scripts complets, les fiches du cahier de calcul et le récit détaillé des huit histoires de la partie V vous attendent sur le compagnon numérique.