



A2. COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Apprendre à compter une seconde fois

TABLE DES MATIÈRES

1. COMPTER SANS ÉNUMÉRER	2	4. L'ORDRE SANS LA RÉPÉTITION : FACTORIELLE ET PERMUTATIONS	7
1.1. Additionner : le principe additif	3	5. CHOISIR SANS ORDONNER : LES COMBINAISONS	9
1.2. Multiplier : le principe multiplicatif.	3	5.1. Trois lectures immédiates	11
2. LES K-UPLETS : QUAND L'ORDRE ET LA RÉPÉTITION SONT LIBRES	4	5.2. La symétrie du choix	11
3. TOUTES LES PARTIES D'UN ENSEMBLE : 2 PUISSANCE N	6	5.3. Combinaisons, mots et chemins	11
		6. LE TRIANGLE QUI A SIX NOMS	12
		6.1. Le triangle.	13
		6.2. Sommer une ligne.	14
		6.3. Six civilisations, un triangle.	14
		7. L'EXPLOSION COMBINATOIRE	15
		6 RETOUR CHEZ MERSENNE	16

PARCOURS DU CHAPITRE

- **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.
- ◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.
- ★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« À partir d'ici, va et calcule ce que la bouche ne peut dire ni
l'oreille entendre. »

Sefer Yetsirah (Livre de la Création), IV, 16

En 1636, dans un couvent parisien de l'ordre des Minimes, le père Marin Mersenne fait imprimer un objet étrange : la liste, portée par portée, des **sept cent vingt** mélodies que l'on peut composer avec les six notes *ut, ré, mi, fa, sol, la*, chacune employée une fois et une seule. Sept cent vingt airs, numérotés, gravés sur des portées, pour un résultat qui tient en trois mots : $6! = 720$. Mais Mersenne ne s'arrête pas là. Il dresse la table des permutations jusqu'à vingt-deux sons, soit trois octaves, et le nombre qu'il obtient a **vingt-deux chiffres** :

$$22! = 1\,124\,000\,727\,777\,607\,680\,000 \approx 10^{21}.$$

Là, il pose une remarque qui va nous accompagner tout le chapitre. Écrire cette liste, dit-il en substance, est *matériellement* impossible : il défie ses contradicteurs de fournir seulement le papier qu'il y faudrait. Le moine a mis le doigt sur une vérité brutale : **dès que les configurations se comptent par milliards de milliards, les énumérer une à une devient un rêve d'imprimeur, jamais une méthode.**

Vous savez déjà compter des objets : douze élèves, trois portes, cinquante-deux cartes. Ce chapitre vous apprend à compter une *seconde* fois, à un autre étage : compter des *configurations*, des arrangements, des choix, des chemins, sans jamais les écrire. C'est l'art du **dénombrement**. Il tient tout entier dans deux principes d'une simplicité désarmante, une poignée de formules, et un triangle de nombres si utile que six civilisations l'ont découvert séparément. À la dernière page, nous reviendrons chez Mersenne, mais du côté de la machine, pour voir ce que l'ordinateur peut faire là où l'imprimeur renonçait.

Mersenne calcule le nombre de mélodies pour trancher une question esthétique : on ne saurait, écrit-il, juger quel est le plus beau chant sur un sujet donné sans les avoir tous dénombrés. Compter, pour lui, c'est mesurer l'étendue du possible.

Marin Mersenne, *Harmonie universelle*, 1636

1. COMPTER SANS ÉNUMÉRER

Tout le chapitre repose sur une seule question, qu'il faut apprendre à poser avant de calculer : *de quoi dénombre-t-on les éléments ?* Fixons le vocabulaire.

DÉFINITION – ENSEMBLE FINI, CARDINAL

Un ensemble E est **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Ce nombre est le **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$. L'ensemble vide $\emptyset$ vérifie $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Dénombrer E , c'est déterminer $\text{Card}(E)$. Le plus souvent, E n'est pas donné en extension (on ne nous fournit pas la liste) mais en compréhension : « les codes à quatre chiffres », « les mains de cinq cartes », « les façons de placer huit tours ». Tout l'enjeu est de calculer $\text{Card}(E)$ *sans* construire la liste.

← PRÉREQUIS

A0 · Logique et récurrence

Le raisonnement par récurrence, les quantificateurs et Python (avec les listes) sont supposés acquis : ils servent dès le paragraphe 2.

OBJECTIFS

- ▷ Poser le cardinal d'un ensemble fini
- ▷ Additionner des cas disjoints
- ▷ Multiplier des choix successifs

1.1. Additionner : le principe additif

Le premier principe traduit le mot « ou » (exclusif) : quand un ensemble se scinde en paquets sans recouvrement, son cardinal est la somme des cardinaux.

PROPRIÉTÉ – PRINCIPE ADDITIF

Soient A et B deux ensembles finis **disjoints**, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.
Alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont **deux à deux disjoints** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), alors

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{Card}(A_i).$$

Attention

L'hypothèse de disjonction est **essentielle**. Si A et B se chevauchent, les éléments communs sont comptés deux fois, et il faut les retrancher ♦ :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

C'est le **principe d'inclusion-exclusion** à deux ensembles. Retenez la règle simple : on n'additionne des cardinaux que sur des paquets *sans intersection*.

1.2. Multiplier : le principe multiplicatif

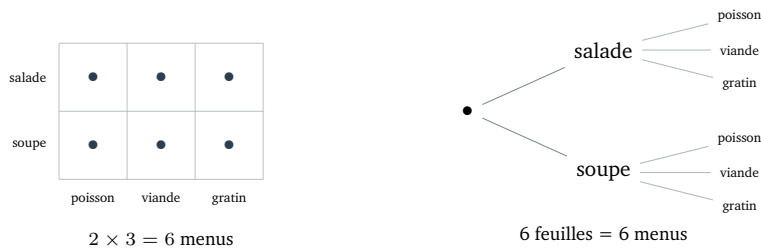
Le second principe traduit le mot « et », ou plutôt le mot « puis » : quand on construit un objet par une suite de choix indépendants, on multiplie les nombres de possibilités.

THÉORÈME – PRINCIPE MULTIPLICATIF

Soient $E_1, E_2, \dots, E_k$ des ensembles finis. Le nombre de façons de choisir un élément de E_1 , puis un élément de E_2 , ..., puis un élément de E_k est le produit des cardinaux :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k).$$

On le visualise de deux manières complémentaires : en **grille** (chaque case est un couple) et en **arbre** (chaque feuille est un chemin de choix). Prenons un menu : deux entrées { salade, soupe } et trois plats { poisson, viande, gratin }.



k -uplet : Liste **ordonnée** de k objets, notée $(x_1, \dots, x_k)$. L'ordre compte et les répétitions sont permises. Un couple est un 2-uplet, un triplet un 3-uplet.

Exemple – Le vivant lit par triplets

L'ADN est écrit dans un alphabet de quatre bases : A, T, G, C . Les acides aminés, briques des protéines, sont au nombre de vingt. La cellule doit donc coder au moins vingt symboles avec des mots de bases. Combien de bases par mot ?

Un code à *doublets* offrirait $4^2 = 16$ mots : **insuffisant**, car $16 < 20$.
Un code à *triplets* offre $4^3 = 64$ mots : **suffisant**, car $20 \leq 64$. Le seul dénombrement impose donc la lecture par triplets, appelés **codons** :

$$4^2 = 16 < 20 \leq 64 = 4^3.$$

La biologie a confirmé ce verdict de comptage : il y a bien 64 codons pour 20 acides aminés (plusieurs codons par acide, plus trois codons « stop »). Le nombre était contraint avant toute expérience.

MÉTHODE – LA PREMIÈRE QUESTION DU DÉNOMBREMENT

Avant tout calcul, répondez à trois questions sur l'objet à compter.

- ▷ **1. Qu'est-ce qu'on compte ?** Un k -uplet ? une partie ? un mot ? Nommez l'objet.
- ▷ **2. L'ordre compte-t-il ?** $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont-ils le même objet ou deux objets ?
- ▷ **3. Les répétitions sont-elles permises ?** Peut-on réutiliser un même élément ?

Ces trois réponses déterminent à elles seules la formule à employer. Tout le chapitre les affinera.

En 1954, le physicien George Gamow prédit par ce seul argument de comptage que le code génétique doit se lire par triplets. Le décryptage expérimental viendra sept ans plus tard.

Gamow, 1954 · Nirenberg, 1961

JALON

Je distingue le principe additif (cas dis-joints, on ajoute) du principe multiplicatif (choix successifs, on multiplie), et je sais reconnaître lequel s'applique.

EXO-A2 · Ex. 1–5 ★

Additionner des cas disjoints, multiplier des choix successifs : les deux principes en situation. ■ ◆

2. LES K -UPLETS : QUAND L'ORDRE ET LA RÉPÉTITION SONT LIBRES

Le premier modèle est le plus permissif : on aligne k objets pris dans un ensemble de n , l'ordre compte et l'on a le droit de se répéter. C'est un

OBJECTIFS

- ▷ Compter les k -uplets : n^k
- ▷ Démontrer par récurrence
- ▷ Mesurer l'explosion des puissances

tirage avec remise et ordonné.

THÉORÈME – NOMBRE DE k -UPLETS

Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}$. Le nombre de k -uplets d'éléments de E , c'est-à-dire $\text{Card}(E^k)$, vaut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Card}(E^k) = n^k$$

Démonstration par récurrence sur k .

Notons u_k le nombre de k -uplets de E , où $\text{Card}(E) = n$.

Initialisation. Pour $k = 0$, il existe un unique 0-uplet, le uplet vide $()$, donc $u_0 = 1 = n^0$.

Hérédité. Supposons $u_k = n^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Un $(k+1)$ -uplet $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ est déterminé de façon unique par la donnée de son début $(x_1, \dots, x_k)$, qui est un k -uplet, puis de sa dernière composante $x_{k+1} \in E$. Par le principe multiplicatif,

$$u_{k+1} = u_k \times n = n^k \times n = n^{k+1}.$$

Par le principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = n^k$. ■

Exemple – Trois incarnations d'un même comptage

- **Un cadenas à roulettes.** Quatre roues de dix chiffres : $10^4 = 10\,000$ codes. Chaque roue est un choix indépendant parmi dix.
- **Le braille.** Une cellule de six points, chacun levé ou baissé : $2^6 = 64$ configurations. En réservant la cellule vide pour l'espace, il reste 63 caractères. Louis Braille, vers 1824, obtient ainsi tout un alphabet tactile en coupant en deux la cellule à douze points de son prédécesseur.
- **Les adresses IPv4.** Une adresse est un mot de 32 bits : $2^{32} = 4\,294\,967\,296$ adresses possibles. Ce nombre, longtemps jugé inépuisable, s'est épuisé, ce qui a forcé le passage à IPv6 et ses 2^{128} adresses.

La récurrence du chapitre A0 n'était pas un exercice gratuit : c'est elle qui fonde ici la toute première formule de dénombrement. On la retrouvera pour 2^n et pour la somme d'une ligne du triangle.

Remarque – Tous les codes de longueur fixe ne se valent pas

Le morse aussi n'emploie que deux signes, le point et le trait, mais avec des longueurs variables : la lettre E est un seul point, le Q compte quatre signes. Ce n'est donc pas un 2^k fixe. Le nombre de codes de longueur 1 à 4 s'obtient en additionnant sur les longueurs ♦ :

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30 \geq 26.$$

Principe additif et principe multiplicatif travaillent ensemble. C'est aussi pourquoi le morse a besoin de silences pour séparer les lettres, là où le

Bit : De l'anglais binary digit. Un bit est une case qui vaut 0 ou 1, c'est-à-dire un élément de $\{0, 1\}$. Un mot de n bits est un n -uplet de $\{0, 1\}$, d'où 2^n mots.

braille, à longueur fixe, s'en passe.

L'exposant est ce qui rend le dénombrement redoutable. Un alphabet de 26 lettres donne $26^2 = 676$ mots de deux lettres, mais déjà $26^{10} \approx 1,4 \times 10^{14}$ mots de dix lettres. **La puissance écrase l'énumération** : c'est la première forme de l'explosion combinatoire, celle qui condamnait la table de Mersenne.

JALON

Je sais qu'un k -uplet d'un ensemble à n éléments se compte par n^k , et je sais le démontrer par récurrence sur k .

3. TOUTES LES PARTIES D'UN ENSEMBLE : 2 PUISSANCE N

Changeons d'objet. On ne veut plus des listes ordonnées, mais des **parties** : des sous-ensembles, où l'ordre n'a aucun sens et où chaque élément est présent une fois ou pas du tout. Combien de parties possède un ensemble à n éléments ?

OBJECTIFS

- ▷ Compter les parties : 2^n
- ▷ Traduire partie $\leftrightarrow$ mot binaire
- ▷ Deux démonstrations pour un résultat

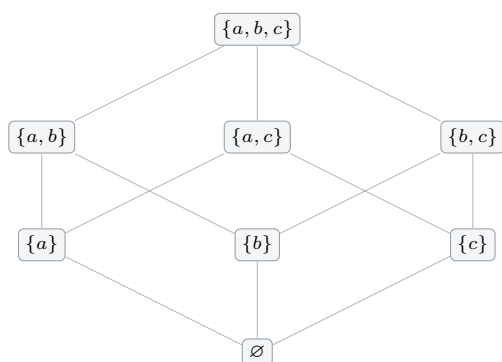
DÉFINITION – ENSEMBLE DES PARTIES

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Il contient toujours $\emptyset$ et E lui-même. Par exemple, pour $E = \{a, b, c\}$:

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \},$$

soit huit parties. On observe $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 8 = 2^3$.

Ce $8 = 2^3$ n'est pas un hasard. Pour le comprendre, il faut voir qu'**une partie n'est rien d'autre qu'une suite de décisions binaires** : pour chaque élément, on tranche *dedans* ou *dehors*. On peut disposer ces décisions en arbre, ou lire directement le résultat comme un treillis ordonné par l'inclusion.



partie	mot
$\emptyset$	000
$\{a\}$	100
$\{a, b\}$	110
$\{a, b, c\}$	111

THÉORÈME – NOMBRE DE PARTIES

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E vaut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Première voie : par les mots binaires ■.

Ordonnons les éléments : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. À toute partie $A \subseteq E$ associons son **mot indicateur** $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ défini par

$$\varepsilon_i = 1 \text{ si } x_i \in A, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ si } x_i \notin A.$$

Cette correspondance est une **bijection** de $\mathcal{P}(E)$ vers $\{0, 1\}^n$: à chaque mot binaire correspond une unique partie (celle des x_i tels que $\varepsilon_i = 1$), et réciproquement. Deux ensembles en bijection ont même cardinal, donc

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(\{0, 1\}^n) = 2^n,$$

puisque $\{0, 1\}^n$ est l'ensemble des n -uplets d'un ensemble à deux éléments (paragraphe 2). ■

Seconde voie : par récurrence sur n ♦.

Notons p_n le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.

Initialisation. Un ensemble à 0 élément, $\emptyset$, a pour unique partie $\emptyset$, donc $p_0 = 1 = 2^0$.

Hérédité. Supposons $p_n = 2^n$. Soit E à $n + 1$ éléments ; fixons un élément $a \in E$. Les parties de E se répartissent en deux familles disjointes : celles qui ne contiennent pas a , qui sont exactement les parties de $E \setminus \{a\}$ (au nombre de p_n), et celles qui contiennent a , chacune de la forme $\{a\} \cup P$ avec P partie de $E \setminus \{a\}$ (encore p_n). Le principe additif donne

$$p_{n+1} = p_n + p_n = 2p_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = 2^n$. ■

Exemple – Répondre à un questionnaire

Un QCM propose dix affirmations, chacune à cocher ou non ; une copie est le choix des cases cochées, donc une partie de l'ensemble des dix questions. Il y a $2^{10} = 1\,024$ copies distinctes possibles. Mille vingt-trois d'entre elles contiennent au moins une erreur si une seule combinaison est correcte.

JALON

Je sais qu'un ensemble à n éléments a 2^n parties, je sais traduire une partie en mot binaire, et je connais les deux démonstrations.

4. L'ORDRE SANS LA RÉPÉTITION : FACTORIELLE ET PERMUTATIONS

Revenons aux listes ordonnées, mais interdisons désormais les répétitions : c'est un tirage *ordonné* et *sans remise*. Pensez à un podium : trois médailles distinctes attribuées à trois athlètes distincts parmi les concurrents.

OBJECTIFS

- ▷ Compter les k -uplets d'éléments distincts
- ▷ Définir et manier la factorielle
- ▷ Compter les permutations : $n!$

PROPRIÉTÉ – k -UPLETS D'ÉLÉMENTS DISTINCTS

Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$. Le nombre de k -uplets d'éléments **deux à deux distincts** de E est le produit de k facteurs qui décroissent de 1 en 1 à partir de n :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1).$$

Démonstration par choix successifs.

On construit le uplet composante par composante. Pour la première, n choix. Une fois fixée, elle ne peut resservir : pour la deuxième, $n-1$ choix; pour la troisième, $n-2$; et ainsi de suite. Pour la k -ième composante, on a déjà utilisé $k-1$ éléments, il en reste donc $n-(k-1) = n-k+1$. Par le principe multiplicatif, le nombre total est le produit annoncé. ■

Exemple – Un podium

Huit finalistes, trois médailles or, argent, bronze. Le podium est un 3-uplet d'athlètes distincts :

$$8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ podiums possibles.}$$

Trois facteurs, qui partent de huit et décroissent.

Ces produits décroissants s'écrivent élégamment avec une seule notation, l'une des plus importantes des mathématiques.

DÉFINITION – FACTORIELLE

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la **factorielle** de n est le produit des entiers de 1 à n :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Par convention, $0! = 1$ (produit vide). Ainsi $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$.

Avec la factorielle, le produit décroissant de la propriété se contracte : en le multipliant et divisant par $(n-k)!$, on obtient

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

$0! = 1$: Cette convention n'est pas arbitraire : elle rend vraies toutes les formules de bord, comme $\binom{n}{n} = 1$ vue plus loin. Un produit sans facteur vaut 1, comme une somme sans terme vaut 0.

THÉORÈME – PERMUTATIONS

Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n -uplet formé de tous ses éléments, chacun une fois : c'est une façon de les ranger en ligne. Le nombre de permutations de E vaut

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Démonstration.

Une permutation est un n -uplet d'éléments distincts pris dans E , avec $k = n$. Le produit décroissant compte alors ses n facteurs de n jusqu'à $n - n + 1 = 1$, soit $n \times (n - 1) \times \cdots \times 1 = n!$. ■

CONTEXTE HISTORIQUE – LA FACTORIELLE, AVANT QU'ELLE AIT UN NOM

L'idée de $n!$ traverse les civilisations bien avant sa notation. Trois métaphores pour un même geste.

- **Des maisons.** Le *Sefer Yetsirah*, texte hébraïque de l'Antiquité tardive, énumère les permutations des lettres : « deux pierres bâtissent deux maisons, trois pierres six maisons, quatre pierres vingt-quatre maisons, cinq pierres cent vingt maisons ». On reconnaît $2!$, $3!$, $4!$, $5!$. Puis : « à partir d'ici, va et calcule ce que la bouche ne peut dire ».
- **Des mains de dieu.** Vers 1150, le mathématicien indien Bhāskara, dans la *Līlāvātī*, demande en vers combien de formes peut prendre le dieu Śiva en échangeant les dix attributs qu'il tient dans ses dix mains : $10! = 3\,628\,800$ formes.
- **Des mélodies.** Mersenne, enfin, avec ses 720 chants de six notes, que nous avons rencontrés en ouverture.

Maisons, mains, mélodies : partout la même explosion, $n!$.

Exemple – Battre les cartes

Un jeu de cinquante-deux cartes se range de $52!$ façons. Ce nombre a soixante-huit chiffres :

$$52! \approx 8,07 \times 10^{67}.$$

Mesurons le vertige, sans aucune probabilité, par simple comparaison d'ordres de grandeur. Environ $1,1 \times 10^{11}$ êtres humains ont vécu ; l'univers a quelque $4,4 \times 10^{17}$ secondes. Même si *chacun* avait battu un jeu une fois par seconde depuis le Big Bang, cela ferait de l'ordre de 10^{29} battages. C'est encore de l'ordre de 10^{39} fois moins que $52!$. **Presque chaque fois que vous battez soigneusement un jeu, vous créez un ordre qui n'a jamais existé et n'existera jamais plus.**

5. CHOISIR SANS ORDONNER : LES COMBINAISONS

Voici le modèle le plus fréquent dans les problèmes, et le plus subtil : on choisit k objets parmi n , mais **sans les ordonner**. Une équipe, une main de cartes, un comité : peu importe l'ordre dans lequel on nomme leurs membres. Choisir sans ordonner, c'est exactement désigner une *partie* à k éléments.

JALON

Je sais définir $n!$ avec $0! = 1$, compter les k -uplets d'éléments distincts par $\frac{n!}{(n-k)!}$, et les permutations par $n!$.

סדרת הסדרות. ■ ▼ ✖

OBJECTIFS

- ▷ Définir $\binom{n}{k}$, parties à k éléments
- ▷ Établir $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- ▷ Lire la symétrie et les chemins

DÉFINITION – COMBINAISON

Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$. Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments. Leur nombre est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Comment relier ce compte au précédent ? Par une idée centrale, le pivot de tout le chapitre. Comparons deux façons de compter les k -uplets d'éléments distincts.

THÉORÈME – FORMULE DES COMBINAISONS

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Notation : Le programme note $\binom{n}{k}$. On rencontre encore l'ancienne notation C_n^k dans certains manuels : c'est le même nombre.

Le pont : ordonner puis oublier l'ordre.

Comptons de deux manières les k -uplets d'éléments distincts de E .

Comptage direct. Nous l'avons établi au paragraphe 4 : il y en a $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Comptage en deux temps. Se donner un tel uplet revient à : d'abord **choisir la partie** des k éléments qui le composent, ce qui offre $\binom{n}{k}$ possibilités ; puis **ordonner** ces k éléments, ce qui offre $k!$ possibilités (le nombre de permutations de k objets). Par le principe multiplicatif, le nombre de uplets est $\binom{n}{k} \times k!$.

Les deux comptages portent sur le même ensemble, donc

$$\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad \text{d'où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



Attention

Ne confondez pas les deux modèles voisins.

- k -uplet d'éléments distincts : l'ordre **compte**. On compte $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- Combinaison : l'ordre **ne compte pas**. On compte $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Le rapport entre les deux est exactement $k!$. Oublier de diviser par $k!$ est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Le cœur de l'argument tient en une phrase : chaque partie à k éléments engendre exactement $k!$ listes ordonnées. On surcompte d'un facteur $k!$ en ordonnant, il suffit de le défaire en divisant.

5.1. Trois lectures immédiates

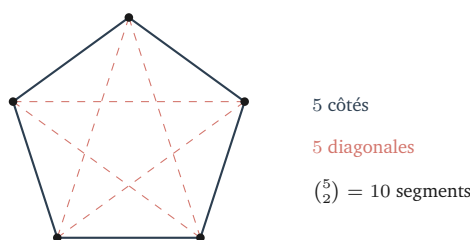
Les petites valeurs éclairent la formule. Pour tout n ,

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La dernière se rencontre partout. Dans une assemblée de n personnes, le nombre de **poignées de main** échangées, c'est-à-dire de paires, vaut $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$: cinq personnes, dix poignées de main ; c'est aussi le nombre de segments joignant n points, ou de matchs d'un tournoi où chacun affronte chacun.

Attention

Le même $\binom{5}{2} = 10$ compte *tous* les segments entre cinq points. Attention : les **diagonales** d'un pentagone ne sont que 5, car il faut retrancher les 5 côtés. En général, un polygone à n sommets a $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Ne pas confondre segments et diagonales.



5.2. La symétrie du choix

PROPRIÉTÉ – SYMÉTRIE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout k avec $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Par bijection, sans calcul.

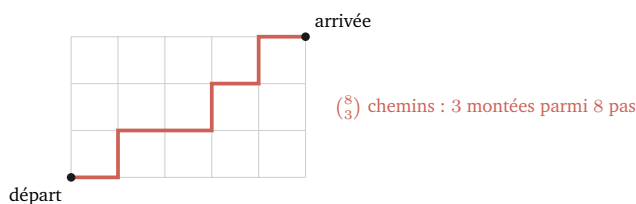
Choisir les k éléments que l'on prend, c'est exactement désigner les $n - k$ éléments que l'on laisse. L'application qui à une partie associe son complémentaire est une bijection entre les parties à k éléments et les parties à $n - k$ éléments. Elles sont donc en même nombre. ■

On peut aussi le voir par le calcul : la formule $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est inchangée quand on échange k et $n-k$. Mais la bijection est plus parlante : prendre ou laisser, c'est le même choix.

5.3. Combinaisons, mots et chemins

La correspondance du paragraphe 3 s'affine : une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments est un mot binaire de longueur n comportant exactement k chiffres 1. Donc $\binom{n}{k}$ compte aussi ces mots. Et un tel mot se lit comme un **chemin** sur une grille : lire un 1, c'est monter ; lire un 0, c'est avancer. Les $\binom{n}{k}$ mots deviennent les chemins d'un coin à l'autre d'un

rectangle.



Exemple – Des grilles et des mains

- **Le loto.** Une grille consiste à choisir cinq numéros parmi quarante-neuf, sans ordre : $\binom{49}{5} = 1\,906\,884$ grilles. En ajoutant un numéro Chance parmi dix, choix indépendant, on multiplie : $1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840$ grilles complètes. Pur dénombrement, sans un mot de probabilité.
- **Une main de cartes.** Le nombre de mains de cinq cartes prises parmi cinquante-deux vaut $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$. L'ordre dans lequel on reçoit les cartes n'a aucune importance : c'est bien une combinaison.

MÉTHODE – ORDRE ? RÉPÉTITION ? LE TABLEAU DES QUATRE MO- DÈLES

Tout dénombrement élémentaire se range dans l'une de ces quatre cases, selon deux questions. On choisit k objets parmi n .

	avec répétition	sans répétition
ordonné	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
non ordonné	* (hors programme)	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Trois des quatre cases sont au programme. Identifier la bonne case, c'est la moitié du travail.

JALON

Je sais que $\binom{n}{k}$ compte les parties à k éléments, je sais démontrer $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ par le pont, et je connais la symétrie.

ÉCHO EXO

EXO-A2 · Ex. 16–21 ★★

Choisir sans ordonner : les combinaisons au travail. 📌💡★

6. LE TRIANGLE QUI A SIX NOMS

Les combinaisons obéissent à une relation d'une portée immense, qui permet de les calculer toutes de proche en proche, sans jamais diviser de factorielles.

THÉORÈME – RELATION DE PASCAL

Pour tout $n \geq 1$ et tout k avec $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

OBJECTIFS

- ▷ Démontrer la relation de Pascal
- ▷ Construire et lire le triangle
- ▷ Sommer une ligne : 2^n

Cette relation, exigible, se démontre de deux façons. La première est calculatoire, la seconde combinatoire : **la seconde est celle qu'il faut savoir raconter**, car elle ne manipule aucune factorielle, seulement du sens.

Voie combinatoire : fixer un élément ■.

Soit E un ensemble à n éléments ; fixons un élément particulier $a \in E$. Répartissons les parties à k éléments de E selon qu'elles contiennent a ou non. Ces deux familles sont disjointes.

- Celles qui **ne contiennent pas** a sont les parties à k éléments de $E \setminus \{a\}$, ensemble à $n - 1$ éléments : il y en a $\binom{n-1}{k}$.
- Celles qui **contiennent** a s'écrivent de façon unique $\{a\} \cup P$, où P est une partie à $k - 1$ éléments de $E \setminus \{a\}$: il y en a $\binom{n-1}{k-1}$.

Ces deux familles recouvrent toutes les parties à k éléments de E . Le principe additif donne le résultat. ■

Voie calculatoire ♦.

Réduisons la somme de droite au dénominateur commun $k!(n-k)!$:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(k + (n-k))}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

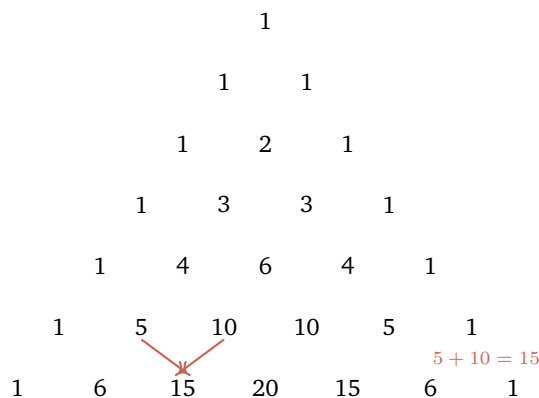
PORTAIL ACT

ACT-A2 · Phases 1–4 ★

Le quadrillage du coursier : vous avez bâti ce triangle et démontré cette relation sans les nommer. ■

6.1. Le triangle

En empilant les lignes $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$, et en plaçant chaque nombre entre les deux du dessus, la relation de Pascal se lit sur la figure : **chaque case est la somme des deux cases qui la surplombent**.



Le triangle regorge de lectures. Ses **bords** ne sont que des 1 ($\binom{n}{0} = \binom{n}{n} =$

1). Il est **symétrique** par rapport à son axe vertical (la propriété $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$). Sa deuxième diagonale égrène les entiers $1, 2, 3, 4, \dots$ ($\binom{n}{1} = n$), la troisième les nombres $1, 3, 6, 10, 15, \dots$, qui sont nos $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, les poignées de main.

6.2. Sommer une ligne

Que vaut la somme d'une ligne entière du triangle ? La réponse referme la boucle du chapitre.

THÉORÈME – SOMME D'UNE LIGNE

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Par dénombrement, exigible ■.

Comptons de deux façons les parties de E , ensemble à n éléments. D'une part, le paragraphe 3 nous dit qu'il y en a 2^n . D'autre part, **classons les parties selon leur nombre d'éléments** : pour chaque k de 0 à n , les parties à exactement k éléments sont au nombre de $\binom{n}{k}$, et ces classes sont deux à deux disjointes et recouvrent $\mathcal{P}(E)$. Le principe additif donne

$$2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Coloriez les cases impaires du triangle : une fractale surgit, le triangle de Sierpiński. Les nombres portaient ce motif plus d'un demi-siècle avant qu'on lui donne un nom géométrique.

Kummer, 1852 · Sierpiński, 1915

Ainsi tout le chapitre converge : les parties comptées globalement (2^n) sont les mêmes que les parties comptées taille par taille ($\sum \binom{n}{k}$). Le treillis du paragraphe 3 et le triangle du paragraphe 6 sont deux visages d'un seul objet.

On peut aussi le prouver par récurrence : la relation de Pascal donne $S_{n+1} = 2S_n$, où S_n est la somme de la ligne n . Chaque ligne double la précédente.

6.3. Six civilisations, un triangle

CONTEXTE HISTORIQUE – LE VOYAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

Ce triangle porte le nom de Pascal en Occident, mais il a été découvert, indépendamment, sur trois continents.

- **En Inde**, la prosodie sanskrite compte depuis l'Antiquité les mètres poétiques, suites de syllabes brèves et longues, exactement nos mots binaires. La disposition triangulaire, le *meru-prastāra* ou « escalier du mont Meru », est décrite par Virahāṅka vers le VII^e siècle, puis élaborée par Halāyudha au X^e.
- **En terre d'Islam**, al-Karajī, vers l'an mille, construit le triangle et le binôme ; son œuvre est perdue, mais un successeur, al-Samaw'al, l'a recopiée en le citant. En Perse, on l'appelle le triangle de Khayyām.
- **En Chine**, Jia Xian le dresse vers 1050 ; son livre est perdu, mais

Yang Hui l'a recopié et crédité en 1261. On le nomme là-bas triangle de Yang Hui. En 1303, Zhu Shijie le grave déjà comme « la méthode ancienne ».

— **En Europe**, il s'imprime dès 1527, puis chez Tartaglia en Italie, avant que **Blaise Pascal**, en 1654, ne lui consacre un traité entier.

Meru-prastāra, Jia Xian, Yang Hui, Khayyām, Tartaglia, Pascal : six noms pour un seul triangle. Deux fois au moins, il nous parvient de la même manière : l'original est perdu, mais un disciple l'avait recopié. **Le triangle a survécu par citation.**

Reste le plus beau. Dans son *Traité du triangle arithmétique* de 1654, Pascal démontre une propriété du triangle qui vaut « pour une infinité de cas ». Il annonce une démonstration « bien courte » reposant sur « deux lemmes » : la propriété est vraie au départ, et si elle est vraie à une ligne, elle l'est à la suivante ; donc elle est vraie partout, « et ainsi à l'infini ». Pascal ne prononce jamais le mot, mais il vient d'écrire l'une des premières démonstrations par **récurrence** de l'histoire. Ce raisonnement que vous avez appris au chapitre A0 est né ici, dans ce triangle. Le mot « récurrence », lui, attendra Poincaré.

7. L'EXPLOSION COMBINATOIRE

Nous savons désormais compter sans énumérer, et il était temps : dès que n grandit un peu, le nombre de configurations dépasse tout ce qu'une main, une imprimerie ou même une machine pourraient parcourir un à un. C'était l'obstacle de Mersenne, et il reste entier. **Pour les grands nombres, seule la formule répond ; l'énumération, jamais.**

Le problème du **voyageur de commerce** le montre d'un trait : il demande le plus court circuit passant par n villes, et il y a $\frac{(n-1)!}{2}$ circuits à examiner.

villes n	circuits $\frac{(n-1)!}{2}$	ordre de grandeur
10	181 440	$\approx 10^5$
20	60 822 550 204 416 000	$\approx 6 \times 10^{16}$

Passer de dix à vingt villes fait bondir le nombre de circuits de cent mille à soixante millions de milliards. Aucune machine ne les parcourt un à un. Pour situer ces vertiges, une échelle unique : le jeu de cartes battu ($52! \approx 10^{67}$), le nombre d'atomes de l'univers observable ($\approx 10^{80}$), l'arbre des parties d'échecs estimé par Shannon ($\approx 10^{120}$). Le dénombrement nous a appris à *nommer* ces nombres que nul ne pourra jamais écrire.

RETOUR CHEZ MERSENNE

JALON

Je sais démontrer la relation de Pascal (voie combinatoire), construire le triangle, et démontrer $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ par dénombrement.

EXO-A2 · Ex. 22–30 ★★★

Histoires et belles mathématiques : la section sommet de l'Atelier. 📦 ⚡ ⭐

OBJECTIFS

- ▷ Mesurer l'explosion des grands nombres
- ▷ Situer $52!$, l'univers, les échecs

CIBLE DA

DM-A2.1 · Parties I–V ★★★

Les cinquante-deux parfums : compter les façons de partager, un voyage au long cours. ⚡

Nous voici revenus au couvent de 1636. Mersenne voulait écrire toutes les mélodies ; il a buté sur l'impossibilité matérielle, faute de papier et de siècles. Nous n'avons pas résolu son problème : les $22!$ chants existent toujours, et nul ne les imprimera jamais. Mais nous avons fait quelque chose de plus fin. Nous avons appris à *connaître* ce nombre sans l'écrire, à le comparer, à le décomposer, à en compter les familles.

Ce chapitre vous a donné deux principes et quatre modèles. Deux principes : on *additionne* des cas disjoints, on *multiplie* des choix successifs. Quatre modèles pour choisir k objets parmi n : selon que l'ordre compte ou non, que la répétition est permise ou non, on obtient n^k , $\frac{n!}{(n-k)!}$, ou $\binom{n}{k}$. Et un triangle, découvert six fois, qui range toutes les combinaisons et qui fut le berceau de la récurrence.

Ces coefficients $\binom{n}{k}$ ne vous quitteront plus. Au chapitre P1, ils compteront les succès d'une épreuve répétée et donneront la loi binomiale. En maths expertes, ils développeront $(a + b)^n$. Vous les avez rencontrés ici dans leur état pur : non pas des probabilités, non pas des puissances, mais des façons de choisir. Compter, c'est déjà comprendre.

Fin du chapitre