



# F1. LIMITES DE FONCTIONS ET CONTINUITÉ

*Approcher sans jamais atteindre, ne jamais pouvoir sauter*

|                                          |          |                                                    |           |
|------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------|-----------|
| <b>TABLE DES MATIÈRES</b>                |          | <b>3. COMPARER POUR CONCLURE</b>                   | <b>7</b>  |
|                                          |          | 3.1. L'asymptote oblique . . . . .                 | 9         |
|                                          |          | <b>4. LES CROISSANCES COMPARÉES</b>                | <b>10</b> |
| <b>1. APPROCHER SANS ATTEINDRE</b>       | <b>2</b> | <b>5. NE PAS LEVER LE CRAYON : LA CONTINUITÉ</b>   | <b>12</b> |
| 1.1. Limites en l'infini . . . . .       | 2        | 5.1. Quand la continuité manque . . . . .          | 13        |
| 1.2. Limites en un point . . . . .       | 4        | <b>6. LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES</b>   | <b>15</b> |
|                                          |          | 6.1. Approcher la solution : la dichotomie . . . . | 16        |
| <b>2. L'ALGÈBRE DES LIMITES</b>          | <b>5</b> | <b>7. LES SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE</b>       | <b>17</b> |
| 2.1. Lever une indétermination . . . . . | 6        |                                                    |           |
| 2.2. Limite d'une composée. . . . .      | 7        | <b>EXISTER, ATTEINDRE, APPROCHER</b>               | <b>19</b> |

## PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Ce serait une faute intolérable que de vouloir déduire les  
vérités des mathématiques pures de considérations qui  
appartiennent à la seule géométrie. »

Bernard Bolzano, *Rein analytischer Beweis*, 1817

Voici une équation d'apparence inoffensive :

$$x^5 - x - 1 = 0.$$

Elle n'a rien d'exotique, un simple polynôme de degré cinq. Et pourtant, en 1824, un jeune Norvégien du nom de Niels Abel démontre une chose stupéfiante : **il n'existe, et il n'existera jamais, aucune formule générale** qui exprimerait les solutions des équations de degré cinq à l'aide de racines carrées, cubiques et autres radicaux, comme le fait la formule du second degré. Et pour celle-ci en particulier, la théorie de Galois (1832) rendra le verdict définitif : aucune expression par radicaux ne la résout, elle non plus. Pour le degré cinq, la boîte à outils algébrique est vide.

Sommes-nous démunis ? Pas du tout. Nous allons prouver, en quelques lignes, que cette équation *possède* une solution réelle, puis l'approcher d'aussi près que nous voulons, chiffre après chiffre, sans jamais disposer de sa formule. Comment affirmer qu'un nombre existe sans savoir l'écrire ? Comment l'attraper sans l'atteindre ?

Ces deux questions sont le cœur de ce chapitre. La première, *approcher*, appartient au monde des **limites** : décrire ce vers quoi une fonction tend, sans forcément l'atteindre, à l'infini ou au bord d'un trou. La seconde, *atteindre*, appartient au monde de la **continuité** : garantir qu'une courbe sans rupture ne saute aucune valeur, et donc rencontre forcément celles qu'elle encadre. À la dernière page, l'équation de degré cinq aura livré sa solution, non par une formule, mais par un théorème et un algorithme.

*Le théorème d'Abel–Ruffini (1799–1824) établit qu'aucune formule par radicaux ne résout l'équation générale de degré supérieur ou égal à cinq. La solution existe, mais aucune expression close ne la livre.*

Abel · Ruffini

#### ← PRÉREQUIS

##### A1 · Limites de suites

Les limites de suites, les opérations et le théorème des gendarmes (chapitre A1) sont supposés acquis : nous les transposons ici aux fonctions.

## 1. APPROCHER SANS ATTEINDRE

Une limite répond à une question de destin : *où va  $f(x)$  quand  $x$  suit une route donnée ?* La route peut mener vers l'infini, ou vers un point précis. La destination peut être un nombre, ou l'infini. Passons en revue les cas, en gardant partout la même idée : **une limite décrit un comportement, pas une valeur atteinte**. Et comme au chapitre A1, chaque définition sera dite deux fois : en symboles d'abord, la forme que vous retrouverez dans l'enseignement supérieur ; en mots ensuite, celle des programmes et des sujets.

#### OBJECTIFS

- ▷ Décrire une limite en  $\pm\infty$  et en un point
- ▷ Lire une asymptote horizontale ou verticale
- ▷ Distinguer limite à gauche et à droite

### 1.1. Limites en l'infini

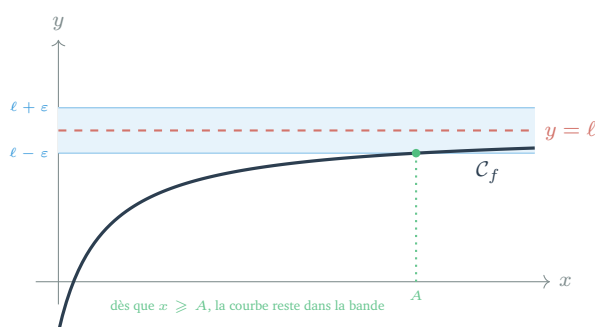
#### DÉFINITION – LIMITE FINIE EN $+\infty$

Soient  $f$  définie sur un intervalle  $[a; +\infty[$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  a pour **limite**  $\ell$  en  $+\infty$ , et l'on écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geq A, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

*Autrement dit* : tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  dès que  $x$  est assez grand.

C'est, mot pour mot, le défi du chapitre A1 : on vous impose une tolérance  $\varepsilon$ , aussi minuscule soit-elle, et vous répondez par un seuil  $A$  au-delà duquel plus aucune valeur  $f(x)$  ne s'écarte de  $\ell$  de plus de  $\varepsilon$ . Géométriquement, la courbe finit prisonnière de toute bande horizontale centrée sur la droite d'équation  $y = \ell$  : cette droite est une **asymptote horizontale**, que la courbe approche sans nécessairement la toucher.



**Asymptote** : Du grec a-sun-ptôtos, « qui ne tombe pas ensemble ». Apollonius de Perge, vers 200 av. J.-C., prouve déjà que l'hyperbole et ses asymptotes s'approchent sans jamais se rencontrer.

Comparez avec la convergence d'une suite (A1) : le rang entier  $N$  est devenu un seuil réel  $A$ , tout le reste est identique. Ce n'est pas un hasard : une suite est une fonction de  $n$ , et cette parenté servira au paragraphe 7.

#### DÉFINITION – LIMITE INFINIE EN $+\infty$

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $[a; +\infty[$ . On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  lorsque :

$$\forall M > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geq A, \quad f(x) > M$$

*Autrement dit* : tout intervalle  $]M; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  dès que  $x$  est assez grand. Définitions analogues pour  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  (avec  $f(x) < -M$ ) et en  $-\infty$  (avec  $\forall x \leq A$ ).

#### PROPRIÉTÉ – LIMITES DE RÉFÉRENCE EN $\pm\infty$

Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

En  $-\infty$ ,  $x^n \rightarrow +\infty$  si  $n$  est pair,  $-\infty$  si  $n$  est impair, et  $\frac{1}{x^n} \rightarrow 0$ .

#### Exemple – La vitesse limite d'une chute

Un parachutiste tombe en subissant un frottement de l'air proportionnel à sa vitesse. La mécanique donne sa vitesse à chaque instant :

$$\forall t \geq 0, \quad v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Comme  $\frac{k}{m} > 0$ , on a  $e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.$$

La vitesse ne cesse de croître, mais **sans jamais dépasser** la valeur  $\frac{mg}{k}$  : c'est la *vitesse limite*, atteinte à l'infini seulement. La droite  $v = \frac{mg}{k}$  est asymptote horizontale. Physiquement, c'est l'instant où le frottement compense exactement le poids.

## 1.2. Limites en un point

La route peut aussi mener vers un point  $a$  de l'axe des abscisses. Le seuil  $A$  (« assez grand ») devient alors un rayon  $\delta$  (« assez proche ») : c'est la seule chose qui change.

### DÉFINITION – LIMITE FINIE EN UN POINT

Soient  $f$  définie au voisinage de  $a$  (sauf peut-être en  $a$ ) et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  a pour **limite**  $\ell$  en  $a$ , et l'on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

*Autrement dit* : tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  dès que  $x$  est assez proche de  $a$ .

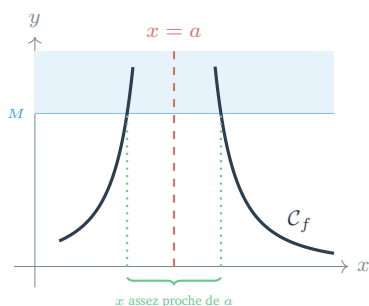
Une fonction peut aussi exploser au voisinage d'une valeur interdite, comme l'inverse près de 0.

### DÉFINITION – LIMITE INFINIE EN UN POINT

Soit  $f$  définie au voisinage de  $a$  (sauf peut-être en  $a$ ). On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$ , et l'on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , lorsque :

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) > M$$

*Autrement dit* : tout intervalle  $]M; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  dès que  $x$  est assez proche de  $a$ . La droite verticale  $x = a$  est alors une **asymptote verticale** à la courbe.



Quand la fonction n'est pas définie en  $a$  mais se comporte différemment

de part et d'autre, on distingue deux limites.

#### DÉFINITION – LIMITES À GAUCHE ET À DROITE

La **limite à droite** de  $f$  en  $a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , est la limite obtenue en n'approchant  $a$  que par des valeurs  $x > a$  : dans les définitions précédentes, la condition  $|x - a| \leq \delta$  est remplacée par  $a < x \leq a + \delta$ . De même à gauche avec  $a - \delta \leq x < a$ , notée  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

*Exemple – La fonction inverse en 0*

Pour la fonction inverse  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$ , on lit sur la courbe deux comportements opposés au bord de 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Les deux limites latérales diffèrent : il n'y a pas de limite en 0, mais l'axe des ordonnées est bel et bien asymptote verticale.

#### ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 1–3 ★

Lire l'infini : trois courbes au rapport, les valeurs interdites et le tribunal des asymptotes. ■ ◆

#### JALON

Je sais décrire une limite finie ou infinie, en  $\pm\infty$  ou en un point, reconnaître l'asymptote horizontale ou verticale associée, et distinguer les limites à gauche et à droite.

## 2. L'ALGÈBRE DES LIMITES

Calculer une limite ne se fait presque jamais en revenant à la définition. On dispose de règles de calcul, héritées trait pour trait de celles des suites (chapitre A1) : la limite d'une somme est la somme des limites, celle d'un produit le produit des limites, et ainsi de suite, *tant qu'aucune de ces opérations ne conduit à une absurdité.*

#### PROPRIÉTÉ – OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Si  $f$  et  $g$  ont des limites en  $a$  (fini ou infini), alors les limites de  $f + g$ ,  $f \times g$  et  $\frac{f}{g}$  se calculent par les règles usuelles, sous réserve que le résultat ne relève d'aucune des formes indéterminées ci-dessous.

#### Attention – Les quatre formes indéterminées

Dans quatre situations, les théorèmes d'opérations ne concluent pas : le résultat dépend des fonctions en présence et non de leurs seules limites. Ce sont

$$\ll \infty - \infty \gg, \quad \ll 0 \times \infty \gg, \quad \ll \frac{\infty}{\infty} \gg, \quad \ll \frac{0}{0} \gg.$$

Une forme indéterminée n'est pas une absence de limite : c'est un signal qu'il faut **transformer l'écriture** avant de conclure.

#### OBJECTIFS

- ▷ Opérer sur les limites
- ▷ Reconnaître les quatre formes indéterminées
- ▷ Lever une indétermination

## 2.1. Lever une indétermination

Deux techniques suffisent à l'immense majorité des cas.

### MÉTHODE – DEUX LEVIERS CONTRE L'INDÉTERMINATION

- ▷ **1. Factoriser par le terme dominant.** Pour un polynôme ou un quotient de polynômes en  $\pm\infty$ , on met en facteur la plus haute puissance de  $x$  : le comportement à l'infini d'un polynôme est celui de son terme de plus haut degré.
- ▷ **2. Multiplier par la quantité conjuguée.** Face à une différence de racines du type  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ , on multiplie et divise par  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$  pour faire disparaître les radicaux du numérateur.

*Exemple – Factoriser par le terme dominant*

Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x}$ . Numérateur et dénominateur tendent vers  $+\infty$  : c'est la forme  $\frac{\infty}{\infty}$ . Factorisons par  $x^2$  en haut et en bas :

$$\forall x > 0, \quad \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Chaque terme en  $\frac{1}{x}$  ou  $\frac{1}{x^2}$  tend vers 0, donc le quotient tend vers  $\frac{2}{1} = 2$ . La droite  $y = 2$  est asymptote horizontale.

*Exemple – La quantité conjuguée*

Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ , de la forme «  $\infty - \infty$  ». Multiplions par le conjugué : pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}. \end{aligned}$$

En factorisant par  $x$  au dénominateur ( $x > 0$ , donc  $\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ ) :

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

## 2.2. Limite d'une composée

### THÉORÈME – LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Soient  $a, b, c$  finis ou infinis. Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  et  $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c.$$

*Démonstration, cas où  $a, b$  et  $c$  sont finis* ♦.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Remontons la chaîne  $x \mapsto u(x) \mapsto v(u(x))$  en deux temps.

**Premier temps : contrôler  $v$  près de  $b$ .** Puisque  $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$ , la définition appliquée à la tolérance  $\varepsilon$  fournit un rayon  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall X \in \mathcal{D}_v, \quad |X - b| \leq \delta \Rightarrow |v(X) - c| < \varepsilon.$$

**Second temps : contrôler  $u$  près de  $a$ .** Le rayon  $\delta$  du premier temps est à son tour une tolérance imposée à  $u$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ , il existe un rayon  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_u, \quad |x - a| \leq \eta \Rightarrow |u(x) - b| \leq \delta.$$

**Conclusion.** Soit  $x \in \mathcal{D}_u$  tel que  $|x - a| \leq \eta$ . Le réel  $X = u(x)$  vérifie  $|X - b| \leq \delta$ , donc  $|v(u(x)) - c| < \varepsilon$ . Nous avons établi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_u, \quad |x - a| \leq \eta \Rightarrow |v(u(x)) - c| < \varepsilon,$$

ce qui est exactement  $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$ . Les cas où  $a, b$  ou  $c$  sont infinis se traitent de la même façon, en remplaçant la tolérance ou le rayon concernés par des seuils ( $x \geq A, f(x) > M$ ). ■

### Exemple – Composer les limites

Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}}$ . Posons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$ , et, pour tout  $X \geq 0$ ,  $v(X) = \sqrt{X}$ . Pour tout  $x \geq 1$ , on a  $3x^2 - 1 > 0$  et  $x^2 + 2 > 0$ , donc  $u(x) > 0$  : la composée est bien définie au voisinage de  $+\infty$ . Par factorisation,  $u(x) \rightarrow 3$  en  $+\infty$ ; et  $\sqrt{X} \rightarrow \sqrt{3}$  quand  $X \rightarrow 3$ . Donc la limite cherchée vaut  $\sqrt{3}$ .

## 3. COMPARER POUR CONCLURE

Quand les opérations échouent, une autre voie s'ouvre : **encadrer** la fonction entre deux autres dont on connaît la limite. C'est la version fonctionnelle des théorèmes rencontrés pour les suites.

### ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 4-7 ★

L'algèbre des limites : opérations sans piège, terme dominant, conjuguées et radicaux emboîtés. ■ ♦ ★

### JALON

Je sais appliquer les théorèmes d'opérations, reconnaître les quatre formes indéterminées, et lever une indétermination par factorisation du terme dominant ou par la quantité conjuguée.

### OBJECTIFS

- ▷ Conclure par comparaison ou encadrement
- ▷ Manier le théorème des gen-darmes
- ▷ Détecter une asymptote oblique

## THÉORÈME – COMPARAISON ET ENCADREMENT

Soit  $a$  fini ou infini.

- **(comparaison)** si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x$  au voisinage de  $a$ , et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ;
- **(encadrement, dit des gendarmes)** si  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  pour tout  $x$  au voisinage de  $a$ , et si  $g$  et  $h$  ont la même limite finie  $\ell$  en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

Démonstration de l'encadrement, cas  $a = +\infty$  ♦.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Faisons répondre les deux gendarmes l'un après l'autre.

**Le gendarme du bas.** Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ , il existe  $A_1 \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \geq A_1$ ,  $|g(x) - \ell| < \varepsilon$ ; en particulier :

$$\forall x \geq A_1, \quad \ell - \varepsilon < g(x).$$

**Le gendarme du haut.** De même, puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ , il existe  $A_2 \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \geq A_2, \quad h(x) < \ell + \varepsilon.$$

**La capture.** Posons  $A = \max(A_1, A_2)$ . Pour tout  $x \geq A$ , les deux contrôles valent simultanément, et l'encadrement de l'hypothèse fait le reste :

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

À toute tolérance  $\varepsilon$  nous savons répondre par un seuil  $A$  : c'est la définition de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ . C'est mot pour mot la preuve du chapitre A1. En un point fini  $a$ , on remplace les seuils par des rayons et  $\max(A_1, A_2)$  par  $\min(\delta_1, \delta_2)$ ; la comparaison se démontre de même avec des seuils  $M$ . ■

### Exemple – L'oscillation qui s'éteint

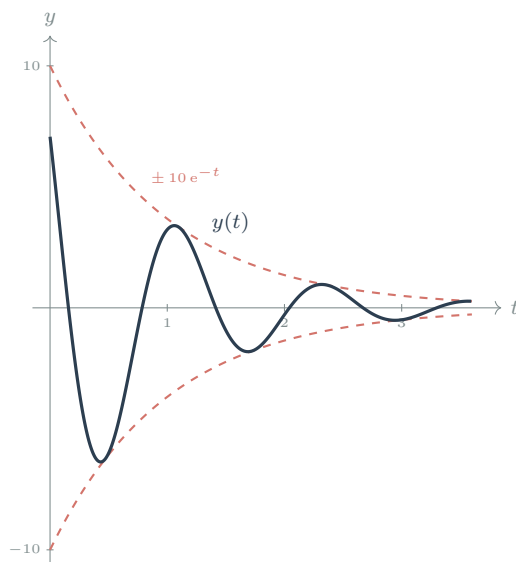
Un ressort amorti oscille selon la loi horaire

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = 10 e^{-t} \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Le cosinus oscille sans cesse entre  $-1$  et  $1$  : impossible de conclure directement. Mais comme  $-1 \leq \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$  pour tout  $t \geq 0$ , en multipliant par  $10 e^{-t} > 0$  :

$$\forall t \geq 0, \quad -10 e^{-t} \leq y(t) \leq 10 e^{-t}.$$

Les deux bornes tendent vers  $0$  en  $+\infty$ . Par le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(t) = 0$  : l'oscillation s'éteint, prise en étau par son enveloppe exponentielle.



### 3.1. L'asymptote oblique

Une courbe peut aussi longer une droite *penchée*. On parle alors d'asymptote oblique.

#### DÉFINITION – ASYMPTOTE OBLIQUE

La droite d'équation  $y = ax + b$  (avec  $a \neq 0$ ) est **asymptote oblique** à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

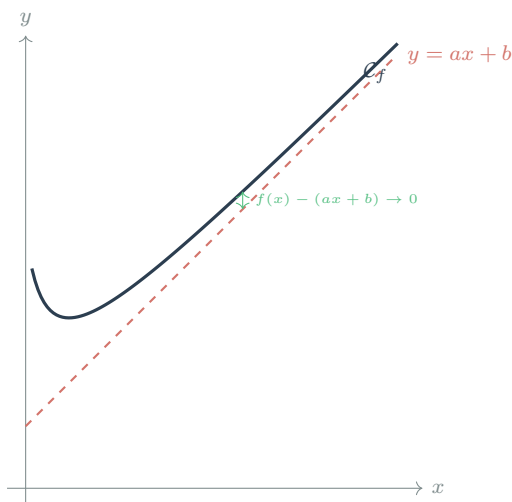
Autrement dit, l'écart vertical entre la courbe et la droite tend vers 0.

#### Exemple – Détecter une asymptote oblique

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $\forall x \neq 1, f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ . La division donne :

$$\forall x \neq 1, f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}.$$

Le reste  $\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0$  en  $+\infty$ , donc  $f(x) - (x + 2) \rightarrow 0$  : la droite  $y = x + 2$  est asymptote oblique. Le signe du reste indique de quel côté : ici  $\frac{1}{x - 1} > 0$  pour  $x > 1$ , la courbe passe *au-dessus* de son asymptote.



#### ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 8–10 ★★

Encadrer et longer : gendarmes en patrouille, une famille à paramètre, borné contre explosif. ■ ◆ ★

#### JALON

Je sais conclure par comparaison ou par le théorème des gendarmes, et détecter une asymptote oblique en isolant la partie affine du quotient.

## 4. LES CROISSANCES COMPARÉES

Certaines indéterminations mêlent une exponentielle et une puissance, comme  $\frac{e^x}{x}$  en  $+\infty$  (forme  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Un résultat tranche systématiquement le duel : à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.

### THÉORÈME – CROISSANCES COMPARÉES

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Ce théorème mérite, comme la relation de Pascal au chapitre A2, une double démonstration : une voie au programme, par fonction auxiliaire, et une voie de prépa, où toute la domination tient dans une ligne.

Première voie : la fonction auxiliaire, cas  $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$  ◆.

**Une fonction auxiliaire.** Étudions  $\varphi$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\forall x \geq 0$ ,  $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ . Elle est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme différence de fonctions dérivables, et  $\forall x \geq 0$ ,  $\varphi'(x) = e^x - x$ .

**Signe de  $\varphi'$ .** Or  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq x + 1 > x$  (on le redémontre au besoin en étudiant  $x \mapsto e^x - x - 1$ , dont la dérivée s'annule en 0). Donc  $\varphi'(x) > 0$  sur  $[0; +\infty[$  :  $\varphi$  y est strictement croissante.

**Positivité.** Comme  $\varphi(0) = 1 > 0$  et que  $\varphi$  croît, on en déduit :

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) > 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad e^x > \frac{x^2}{2}.$$

**Conclusion.** En divisant par  $x > 0$ , il vient  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ . Puisque  $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$ , le théorème de comparaison donne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ . ■

#### OBJECTIFS

- ▷ Comparer exponentielle et puissances
- ▷ Démontrer  $e^x/x \rightarrow +\infty$
- ▷ Lever les indéterminations mêlant  $e^x$  et  $x^n$

Seconde voie : la série, en une ligne ★.

En prépa, l'exponentielle se définit comme la somme infinie  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ , dont tous les termes sont positifs pour  $x \geq 0$ . La somme dépasse donc chacun de ses termes; en ne retenant que celui d'indice  $n + 1$  :

$$\forall x > 0, \quad e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \frac{x^n}{e^x} \leq \frac{(n+1)!}{x}.$$

Le majorant tend vers 0 en  $+\infty$  : les gendarmes concluent. Toute la domination de l'exponentielle tient dans un seul terme de sa série. ■

Pour la puissance  $x^n$ , on se ramène au cas  $n = 1$  par substitution ★ : pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \left( \frac{e^{x/n}}{x/n} \right)^n$ , et le terme entre parenthèses tend vers  $+\infty$  car  $\frac{x}{n} \rightarrow +\infty$ .

SUITE →

### F3 · Logarithme

Le logarithme complètera l'échelle :  $\ln x$  est battu par toute puissance, comme toute puissance est battue par  $e^x$ .

#### Exemple – Une indétermination levée

Cherchons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - e^x)$ , de la forme «  $\infty - \infty$  ». Factorisons par  $e^x$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - e^x = e^x \left( \frac{x^3}{e^x} - 1 \right).$$

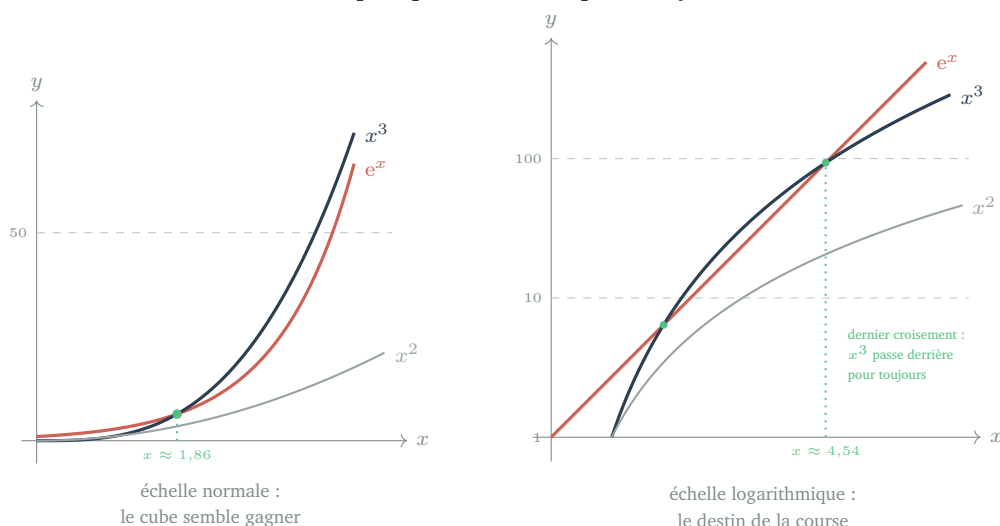
Par croissances comparées,  $\frac{x^3}{e^x} \rightarrow 0$ , donc la parenthèse tend vers  $-1$ , et  $e^x \rightarrow +\infty$ . Le produit tend vers  $-\infty$  : l'exponentielle écrase le cube.

Encore faut-il voir cette domination, et c'est plus délicat qu'il n'y paraît : regardez le duel entre  $e^x$  et  $x^3$  en échelle normale (figure de gauche), et le cube semble gagner. Pour lire la fin de la course, on passe l'axe des ordonnées en **échelle logarithmique** (figure de droite) : chaque graduation y multiplie par 10, l'exponentielle devient une droite, et toute puissance s'incurve, mène un moment, puis passe derrière pour toujours.

#### ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 11–13 ★★

Les croissances comparées : la batterie de duels, la ROC prolongée et un portrait asymptotique complet. ■ ♦ ★



Les deux figures montrent la même course, et semblent se contredire. À gauche, sur  $[0; 4,2]$ , le cube domine :  $x^3 > e^x$  dès  $x \approx 1,86$ , et son avance reste confortable au bord du cadre; à bien y regarder, pourtant, les deux courbes commencent déjà à se rapprocher. À droite, l'échelle logarithmique dévoile la suite : un dernier croisement en  $x \approx 4,54$ , après quoi l'exponentielle, devenue droite, ne sera plus jamais rattrapée. Les

croissances comparées ne disent rien du sprint de départ, tout du *destin*.

## 5. NE PAS LEVER LE CRAYON : LA CONTINUITÉ

Jusqu'ici, une fonction pouvait s'approcher d'une valeur sans l'atteindre. La **continuité** est exactement la propriété qui interdit l'écart : la limite est atteinte, et elle vaut ce qu'elle doit valoir.

### DÉFINITION – CONTINUITÉ

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est **continue en  $a$**  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

La fonction  $f$  est **continue sur  $I$**  si elle est continue en chaque point de  $I$ . Intuitivement, on trace sa courbe *sans lever le crayon* ; en droit, c'est la formule ci-dessus qui fait foi, et le paragraphe 6 racontera pourquoi elle a été forgée.

### PROPRIÉTÉ – CONTINUITÉ DES FONCTIONS USUELLES

Les fonctions polynômes, la fonction racine carrée, la fonction exponentielle, les fonctions  $\sin$  et  $\cos$ , ainsi que toute somme, produit, quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas) et composée de fonctions continues, sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

### THÉORÈME – DÉRIVABLE ENTRAÎNE CONTINUE

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

*Démonstration.*

Supposons  $f$  dérivable en  $a$ , avec  $f$  définie sur l'intervalle  $I$ . Écrivons, pour tout  $x \in I \setminus \{a\}$  :

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a).$$

Le premier facteur tend vers  $f'(a)$  (nombre dérivé), le second vers 0 ; le produit tend donc vers 0. Ainsi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , ce qui est la continuité en  $a$ . ■

### JALON

Je connais les limites de croissances comparées, je sais démontrer  $e^x/x \rightarrow +\infty$  par une fonction auxiliaire, et je m'en sers pour lever une indétermination.

### OBJECTIFS

- ▷ Définir la continuité en un point et sur un intervalle
- ▷ Savoir que dérivable entraîne continue
- ▷ Repérer une discontinuité

### PORTAIL ACT

ACT-F1 · Phases 1–4 ★

La montagne, deux fois : l'enquête du randonneur, à mener seul à la maison, prépare la continuité et le TVI. ■

### Attention – La réciproque est fausse

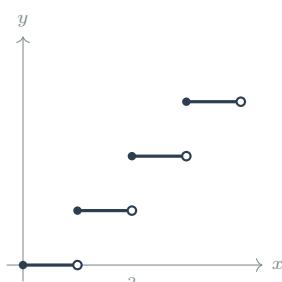
Continuité et dérivabilité ne sont pas synonymes. La fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est **continue** en 0 (on la trace sans lever le crayon) mais n'y est **pas dérivable** : sa courbe forme un angle, les pentes à gauche ( $-1$ ) et à droite ( $+1$ ) diffèrent. Être continu, c'est ne pas se rompre ; être dérivable, c'est en plus ne pas s'anguler.

## 5.1. Quand la continuité manque

Les discontinuités les plus instructives montrent *pourquoi* une définition rigoureuse s'impose, là où un dessin trompe.

### Exemple – La fonction partie entière

La fonction  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ , qui à  $x$  associe le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ , saute d'une unité à chaque entier. En  $x = 2$ , par exemple, la limite à gauche vaut 1 et la limite à droite vaut  $2 = \lfloor 2 \rfloor$  : la fonction est continue à droite mais pas à gauche. Son graphe est un escalier de marches disjointes.



*En 1837, Dirichlet libère la notion de fonction : n'importe quelle correspondance  $x \mapsto f(x)$ , même sans formule ni dessin. Sa fonction qui vaut 1 sur les rationnels et 0 ailleurs est discontinue en tout point.*

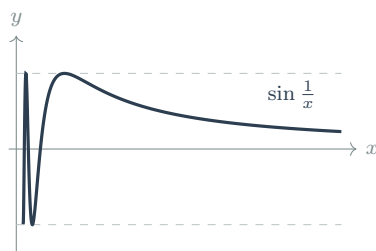
Dirichlet, 1837

### Exemple – Le monstre qui oscille : $\sin \frac{1}{x}$

Considérons  $f$  définie pour tout  $x > 0$  par  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Lorsque  $x$  se rapproche de 0,  $\frac{1}{x}$  file vers  $+\infty$  et le sinus oscille de plus en plus vite entre  $-1$  et  $1$ , une infinité de fois sur tout intervalle  $]0; \delta]$ . On peut trouver des  $x$  aussi proches de 0 que l'on veut donnant  $f(x) = 1$ , et d'autres, tout aussi proches, donnant  $f(x) = -1$  : la fonction ne se fixe sur aucune valeur.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{n'existe pas.}$$

Même en posant  $f(0) = 0$  par décret, la fonction resterait discontinue en 0. **Aucun dessin ne peut représenter cette oscillation infinie** : c'est précisément pour maîtriser de tels objets que Bolzano et Weierstrass ont exigé une définition purement analytique, affranchie du crayon.



#### CONTEXTE HISTORIQUE – LES FONCTIONS MONSTRES, OU LA FIN DU RAISONNEMENT PAR LE DESSIN

Tout le XIX<sup>e</sup> siècle apprend, à ses dépens, qu'une fonction n'est pas un dessin.

- **1872, Berlin.** Karl Weierstrass présente à l'Académie une fonction **continue en tout réel mais dérivable en aucun** : une somme infinie de cosinus de plus en plus serrés, dont la courbe est rugueuse à toutes les échelles. On peut la tracer sans lever le crayon, mais elle n'a de tangente nulle part. Bolzano, vers 1830, puis Cellérier en avaient construit de semblables, restées dans leurs tiroirs.
- **Le scandale.** Ces objets heurtent l'intuition au point que Charles Hermite écrit en 1893 : « je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ». On les baptise *les monstres*.
- **Le retournement.** L'analyse moderne montrera que, en un sens précis, la *quasi-totalité* des fonctions continues sont de ce type. Le monstre est la règle ; les courbes lisses de nos figures, l'exception.

Voilà pourquoi ce chapitre définit la continuité par des limites et non par le crayon : les définitions analytiques sont la seule loi qui s'applique aussi aux monstres.

#### THÉORÈME – IMAGE D'UNE SUITE CONVERGENTE

Soit  $f$  continue en  $\ell$ , et  $(u_n)$  une suite qui converge vers  $\ell$ , avec  $u_n$  dans le domaine de  $f$ . Alors la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(\ell)$ .

*Démonstration* ♦.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Les deux hypothèses répondent l'une après l'autre.

**La continuité d'abord.**  $f$  est continue en  $\ell$  : il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x$  du domaine de  $f$ ,  $|x - \ell| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$ .

**La convergence ensuite.** Le rayon  $\delta$  devient la tolérance imposée à la suite : puisque  $u_n \rightarrow \ell$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n - \ell| \leq \delta$ .

**Conclusion.** Pour tout  $n \geq N$ , on a donc  $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$  : la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(\ell)$ . ■

Ce théorème est la clé du paragraphe 7 : il autorise à « passer  $f$  à la limite » dans une relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Sans continuité, ce passage serait illégal.

## 6. LE THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

#### JALON

Je sais définir la continuité par

$$\lim_{x \rightarrow a} f = f(a), \text{ j'ai retenu que}$$

dérivable entraîne continue mais non

l'inverse, et je sais reconnaître une

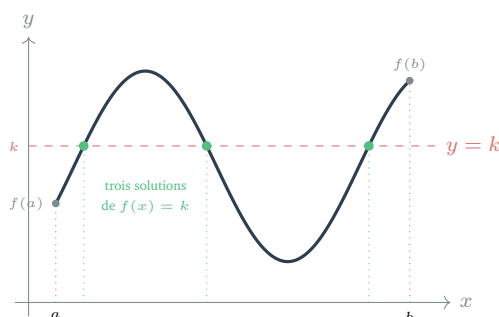
discontinuité.

Nous tenons enfin de quoi répondre à l'équation de l'ouverture. Le résultat central du chapitre est un théorème d'**existence** : il garantit qu'une solution existe, sans la construire.

### THÉORÈME – THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe **au moins un** réel  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

En français clair : une fonction continue qui passe d'une valeur à une autre **prend au passage toutes les valeurs intermédiaires**. Elle ne peut pas sauter par-dessus  $k$ , car elle ne peut pas lever le crayon. La démonstration rigoureuse dépasse le programme (elle exige de savoir précisément ce qu'est un nombre réel), mais l'algorithme du paragraphe suivant, la dichotomie, en contient toute l'idée : c'est la preuve qu'en donne Cauchy en 1821.



### OBJECTIFS

- ▷ Énoncer et appliquer le TVI
- ▷ Utiliser le corollaire strictement monotone
- ▷ Approcher une solution par dichotomie

Le défi ★ de l'activité, la table bancale qui se répare en tournant, est un TVI déguisé : l'exercice 28 de l'Atelier (Baritomba, 2005) en donne la démonstration complète.

### CONTEXTE HISTORIQUE – LE CRAYON INTERDIT, OU COMMENT LE TVI A FORGÉ LA CONTINUITÉ

Ce théorème semble une évidence : comment une courbe traverserait-elle une droite sans la couper ? Toute l'histoire de l'analyse moderne tient dans le refus de cette évidence.

- **1799**. Gauss démontre le théorème fondamental de l'algèbre en s'appuyant, sans le prouver, sur un passage de valeurs intermédiaires : la figure lui suffit.
- **1817, Prague**. Bernard Bolzano publie sa *Démonstration purement analytique* : déduire une vérité d'analyse d'un dessin serait, écrit-il, une « faute intolérable » (c'est l'épigraphe de ce chapitre). Mais pour prouver le TVI sans figure, encore faut-il dire *sans figure* ce qu'est une fonction continue : Bolzano forge alors la première définition analytique de la continuité. **La définition du paragraphe 5 n'est pas née avant le théorème : elle est née pour lui.** Son mémoire, publié à Prague loin des grands centres, passera inaperçu de son vivant.
- **1821, Paris**. Cauchy, dans son *Cours d'analyse* de l'École polytechnique, redécouvre l'énoncé et le prouve par découpages successifs de l'intervalle : la dichotomie du paragraphe suivant. C'est lui qui répand

le raisonnement par  $\varepsilon$ .

- **1861, Berlin.** Weierstrass donne à la limite sa définition définitive en  $(\varepsilon, \delta)$  et achève d'arracher l'analyse à la géométrie : on le surnomme le « père de l'analyse moderne ».

Un théorème « évident », quarante ans de travail pour le prouver : c'est que la preuve exigeait d'inventer les définitions.

Le TVI garantit l'existence, mais pas l'unicité : la figure montre trois solutions. Pour obtenir **une** solution et une seule, on ajoute une hypothèse de stricte monotonie.

#### THÉORÈME – COROLLAIRE, CAS STRICTEMENT MONOTONE

Soit  $f$  **continue** et **strictement monotone** sur  $[a; b]$ . Alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une **unique** solution dans  $[a; b]$ .

#### Exemple – L'équation de l'ouverture résolue

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^5 - x - 1$ . C'est une fonction polynôme, donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On calcule

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 32 - 2 - 1 = 29 > 0.$$

Comme  $f$  est continue sur  $[1; 2]$  et que  $k = 0$  est compris entre  $f(1)$  et  $f(2)$ , le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins un réel  $c \in [1; 2]$  tel que  $f(c) = 0$ . **La solution existe** : nous l'avons prouvé sans aucune formule, là où Abel garantissait qu'aucune formule n'existe. Reste à l'approcher.

On étend le corollaire aux intervalles ouverts ou infinis en remplaçant  $f(a)$  et  $f(b)$  par les limites de  $f$  aux bornes. C'est la version qu'on utilise le plus en pratique.

#### ÉCHO EXO

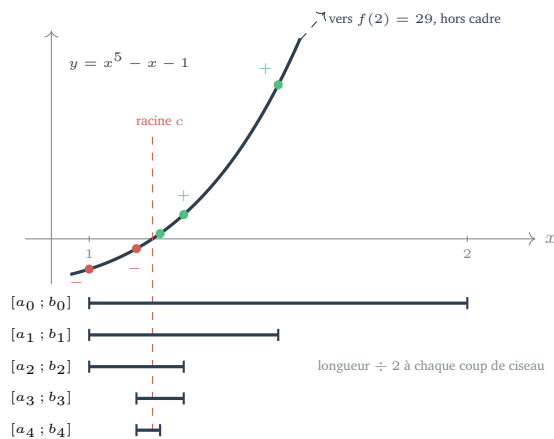
EXO-F1 · Ex. 14–18 ★★

Continuité et TVI : l'art du raccord, le tribunal de la continuité, compter des solutions sans les calculer. ■ ♦ ★

### 6.1. Approcher la solution : la dichotomie

Puisque la racine  $c$  vit dans  $[1; 2]$ , coupons cet intervalle en son milieu  $m = 1,5$  et regardons le signe de  $f(m)$ . Ici  $f(1,5) \approx 5,09 > 0$  : la racine se cache donc dans  $[1; 1,5]$ , moitié deux fois plus petite où  $f$  change de signe. En répétant le geste, on emprisonne  $c$  dans des intervalles emboîtés dont la longueur est divisée par deux à chaque pas.

**Dichotomie** : Du grec dikha (en deux) et tomê (coupure). L'algorithme apparaît chez Cauchy en 1821. À chaque étape, on coupe l'intervalle en deux et l'on garde la moitié qui contient la racine.



Newton, vers 1669, approche les racines en glissant le long des tangentes : chaque étape double le nombre de décimales exactes. La dichotomie est plus lente, mais ne demande rien d'autre que la continuité.

Newton · Raphson

#### Remarque – Vitesse de la dichotomie

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , après  $k$  étapes, la racine est localisée à  $\frac{b-a}{2^{k+1}}$  près. Gagner une décimale demande donc environ  $\log_2(10) \approx 3,32$  étapes : la méthode est **lente mais infaillible**, pourvu que  $f$  soit continue. La méthode de Newton, plus rapide, sera vue plus tard, au prix d'hypothèses supplémentaires.

#### MÉTHODE – LA DICHOTOMIE EN PYTHON

On code l'algorithme pour approcher la racine de  $f$  dans  $[a; b]$  à la précision  $\text{eps}$ .

```
1 def dichotomie(f, a, b, eps):
2     while b - a > eps:
3         m = (a + b) / 2
4         if f(a) * f(m) <= 0: # la racine est dans [
5             a, m]
6             b = m
7         else: # la racine est dans [
8             m, b]
9             a = m
10    return (a + b) / 2
11
12 f = lambda x: x**5 - x - 1
13 print(dichotomie(f, 1, 2, 1e-9)) # ~ 1.167303978
```

#### ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 29–30 ★★

Python, le laboratoire : la dichotomie au compteur et le microscope à monstres.



#### JALON

Je sais énoncer le TVI et son corollaire strictement monotone avec toutes leurs hypothèses, prouver l'existence d'une solution, et l'approcher par dichotomie.

## 7. LES SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE

Les deux mondes du chapitre se rejoignent ici. Une suite est souvent définie par une relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est une fonction : chaque terme s'obtient du précédent. Si une telle suite converge, sa limite ne peut être n'importe quel nombre.

#### OBJECTIFS

▷ Reconnaître un point fixe

$$f(\ell) = \ell$$

▷ Étudier une suite  $u_{n+1} = f(u_n)$

▷ Lire la convergence sur un diagramme

### DÉFINITION – POINT FIXE

Un réel  $\ell$  est un **point fixe** de  $f$  lorsque  $f(\ell) = \ell$ . Graphiquement, c'est une abscisse où la courbe de  $f$  rencontre la droite  $y = x$ .

### THÉORÈME – LA LIMITE EST UN POINT FIXE

Soit  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f$  **continue** sur un intervalle contenant tous les  $u_n$  et leur limite. Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$  :

$$f(\ell) = \ell.$$

*Bien avant toute théorie, Héron d'Alexandrie (premier siècle) approche  $\sqrt{2}$  en itérant  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) : une suite récurrente dont le point fixe est la racine cherchée. Les scribes babyloniens pratiquaient déjà ce calcul.*

Héron d'Alexandrie

*Démonstration.*

**Une même suite, deux regards.** La suite  $(u_n)$  tend vers  $\ell$ , donc la suite décalée  $(u_{n+1})$  tend aussi vers  $\ell$ . Par ailleurs,  $f$  étant continue en  $\ell$ , le théorème sur l'image d'une suite convergente (paragraphe 5) donne  $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ .

**Unicité.** Or  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : les suites  $(u_{n+1})$  et  $(f(u_n))$  sont identiques, donc ont même limite. Par unicité de la limite,  $\ell = f(\ell)$ . ■

### MÉTHODE – ÉTUDIER UNE SUITE $u_{n+1} = f(u_n)$

- ▷ **1. Stabilité.** Trouver un intervalle  $I$  tel que  $f(I) \subseteq I$ , et vérifier  $u_0 \in I$  : par récurrence, tous les  $u_n$  restent dans  $I$ .
- ▷ **2. Monotonie.** Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), ou raisonner par récurrence, pour établir que  $(u_n)$  est monotone.
- ▷ **3. Convergence.** Monotone et bornée, la suite converge (limite monotone).
- ▷ **4. Limite.** Résoudre  $f(\ell) = \ell$  dans  $I$  pour identifier  $\ell$ .

*Attention à la logique : le théorème dit que si la suite converge, alors sa limite est un point fixe. Il faut d'abord établir la convergence (souvent par le théorème de la limite monotone), puis identifier  $\ell$  parmi les points fixes.*

*Exemple – Un radical qui se répète*

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ . Posons  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\forall x \geq 0, f(x) = \sqrt{2 + x}$ ; elle y est continue et croissante.

- **Stabilité et bornes.** Si  $0 \leq u_n \leq 2$ , alors  $2 \leq 2 + u_n \leq 4$ , donc  $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$  : l'intervalle  $[0; 2]$  est stable. Par récurrence,  $0 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$ .
- **Croissance.** On vérifie par récurrence que  $u_{n+1} \geq u_n$  (vrai au rang 0 :  $u_1 = \sqrt{2} \geq 0$ ; et  $f$  croissante propage l'inégalité).

#### ÉCHO EXO

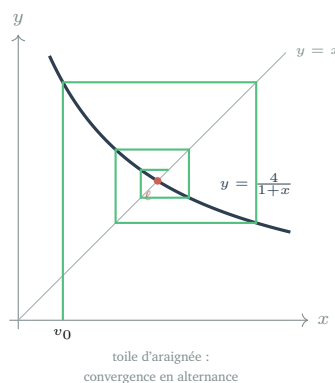
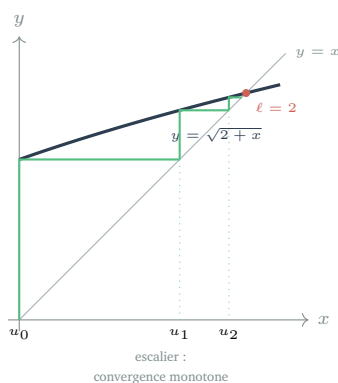
EXO-F1 · Ex. 19–22 ★★

Les suites récurrentes : escalier ou toile, points fixes en compétition, la récurrence aux radicaux. ■ ♦ ★

- **Convergence.** Croissante et majorée par 2, la suite converge vers un réel  $\ell \in [0; 2]$ .
- **Limite.**  $\ell$  est un point fixe :  $\ell = \sqrt{2 + \ell}$ , soit  $\ell^2 = 2 + \ell$ , c'est-à-dire  $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ , dont les racines sont  $-1$  et  $2$ . Seule  $\ell = 2$  appartient à  $[0; 2]$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

La suite  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$  grimpe vers 2.

On lit cette convergence sur un **diagramme en escalier** : on part de  $u_0$  sur l'axe, on monte jusqu'à la courbe (c'est  $u_1$ ), on se réfléchit sur la droite  $y = x$  pour reporter  $u_1$  sur l'axe, et l'on recommence. Les marches se resserrent vers le point fixe. Toutes les suites récurrentes ne montent pas ainsi en escalier : la suite définie par  $v_0 = 0,5$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{4}{1 + v_n}$ , converge vers  $\ell = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$  en **alternant** de part et d'autre de sa limite, et son diagramme s'enroule en **toile d'araignée**.



Ce qui décide de l'allure, c'est la pente de  $f$  au point fixe  $\star$  : croissante et douce ( $0 < f'(\ell) < 1$ ), la courbe engendre un escalier ; décroissante et douce ( $-1 < f'(\ell) < 0$ ), une spirale. Trop pentue ( $|f'(\ell)| > 1$ ), elle repousse la suite : le point fixe est répulsif.

## EXISTER, ATTEINDRE, APPROCHER

Retour à l'équation  $x^5 - x - 1 = 0$  de l'ouverture. Abel nous interdisait toute formule ; nous ne l'avons pas contredit. Nous avons fait autre chose, et de plus profond. Le théorème des valeurs intermédiaires a prouvé que la solution **existe**, parce que la fonction, *continue*, ne peut sauter par-dessus zéro. La dichotomie l'a **approchée**, chiffre après chiffre, sans jamais l'*atteindre* exactement, comme la vitesse limite du parachutiste ou la suite des radicaux emboîtés.

Ce chapitre a réuni deux gestes que tout oppose. *Approcher* sans atteindre : c'est la limite, le comportement d'une fonction au loin ou au bord d'un trou, avec ses asymptotes et ses croissances comparées. *Atteindre* sans sauter : c'est la continuité, qui fait du crayon jamais levé la garantie que

### JALON

Je sais qu'une suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  convergente a pour limite un point fixe de  $f$ , et je sais mener l'étude complète : stabilité, monotonie, convergence, identification de la limite.

### CIBLE DA

DM-F1.1 · Parties I-VI ★★

Le sinus du degré : l'équation d'al-Kashi, Samarcande 1424, et le point fixe qui livre les décimales une à une. ♦

### ÉCHO EXO

EXO-F1 · Ex. 23-28 ★★★

Histoires et belles mathématiques : de Héron à la table bancale, la section sommet de l'Atelier. ♦ ♦ ★

toute valeur intermédiaire est prise. De leur rencontre naissent les deux théorèmes les plus utiles de l'analyse du lycée : le TVI, qui fait exister, et le point fixe, qui fait converger les suites récurrentes.

Vous retrouverez ces outils partout. Au chapitre F2, la dérivation seconde raffinerait l'étude des courbes. En F3, le logarithme prolongerait les croisances comparées. Et chaque fois qu'une équation résisterait à l'algèbre, vous saurez qu'un théorème d'existence et un algorithme d'approche valent parfois mieux qu'une formule.

*Fin du chapitre*

**VISA EVAL**

**EVAL-F1 · 1 h**

*Une heure pour faire le point : la fiche,  
l'Atelier et le Compagnon Numérique  
constituent la meilleure préparation.*