



DM 1 • F1. LE SINUS DU DEGRÉ

Samarcande, 1424 : la première itération de l'histoire

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. L'équation de Samarcande	△▲◆	les préliminaires
II. La machine à chiffres	△▲	R2 et la partie I
III. La contraction	△▲	la partie I
IV. Le théorème du point fixe	△▲◆	R3, R4 et les parties II et III
V. Le tournoi des méthodes	△▲	les parties I et II ; indépendante de III et IV
VI. L'atelier du secret	◆	R1 ; réservée aux aventuriers

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours • ▲ construction : recul et autonomie • ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Samarcande : l'observatoire et le verrou

Au début des années 1420, le prince astronome Ulugh Beg fait bâtir à Samarcande le plus grand observatoire du monde, et y rassemble des dizaines de savants. Le plus brillant s'appelle Jamshid al-Kashi. Sa mission : dresser des tables du sinus d'une précision jamais atteinte, car toute l'astronomie de position en dépend. Or un verrou bloque la route depuis treize siècles. Ptolémée savait déjà construire, à la règle et au compas, les cordes des angles de 3° , mais pas celles de 1° : diviser un angle en trois échappe, déplorait-il, « aux moyens de la géométrie ». Les tables s'obtenaient donc par encadrements successifs, dont la précision plafonnait vite. Al-Kashi contourne le verrou par une idée entièrement neuve : transformer la trigonométrie en *équation*, puis inventer une machine numérique qui en extrait la solution, chiffre après chiffre, aussi loin qu'on le souhaite. Ce devoir démonte cette machine, la première itération de l'histoire, et remonte jusqu'au théorème qui, cinq siècles plus tard, en expliquera le secret.

Q1. Toucher le verrou. Régler la calculatrice en *degrés*.

a) △ Calculer $\sin 3^\circ$, puis $3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ$. Que constate-t-on ?

- b) $\triangle$ Noter tous les chiffres que la calculatrice affiche pour $\sin 1^\circ$. Ce nombre, elle le connaît ; mais rien à l'écran ne dit *comment* elle l'a fabriqué. À la fin de ce devoir, vous saurez le fabriquer vous-même, avec les quatre opérations.

Notations et outils. Dans tout le document, les angles sont mesurés en degrés, et un sinus est un *nombre* : on ne dérivera jamais la fonction sinus, on ne changera jamais d'unité d'angle. Les résultats encadrés R1 à R4 peuvent être cités partout. Aucun autre résultat sur le sinus n'est nécessaire, ni autorisé.

R1 – IDENTITÉ DE TRIPLICATION

Pour tout angle A (en degrés) :

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A.$$

(Admise ici : c'est la seule clef trigonométrique du devoir. La partie VI, facultative, la démontrera avec les formules d'addition, fournies sur place.)

R2 – LA DONNÉE DE SAMARCANDE

On pose $q = \sin 3^\circ$. On donne

$$q = 0,0523359562 \quad \text{à } 0,5 \times 10^{-10} \text{ près,}$$

et l'on admet la croissance du sinus entre 0° et 90° (lecture du cercle trigonométrique) : pour tous angles A et B , si $0^\circ < A < B < 90^\circ$ alors $0 < \sin A < \sin B < 1$. Dans tous les calculs numériques du devoir, on utilise cette valeur approchée à la place de q . *(Pourquoi dix décimales de q suffisent à dix décimales de $\sin 1^\circ$, et pourquoi le remplacement est inoffensif : c'est la question Q17, l'une des plus belles du voyage.)*

R3 – SUITES GÉOMÉTRIQUES ET ENCADREMENT

Soit k un réel tel que $0 \leq k < 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$. Par ailleurs, si trois suites vérifient $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang et si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ . *(Admis : démontrés dans les chapitres A1, « voir A1, Suites et limites », et F1.)*

R4 – VALEURS INTERMÉDIAIRES

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. Si de plus f est strictement monotone sur $[a; b]$, cette solution est unique. *(Admis : théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, démontrés dans le cours du chapitre.)*

L'équation de Samarcande

L'idée d'al-Kashi tient en une ligne : appliquer l'identité R1 à $A = 1^\circ$. Le nombre inconnu $\sin 1^\circ$ devient alors la solution d'une équation polynomiale, un objet que l'algèbre sait attaquer. Encore faut-il s'assurer que cette équation détermine *sans ambiguïté* le nombre cherché : c'est tout l'enjeu de cette partie, et c'est le chapitre F1 qui fournit les outils.

Q2. De la trigonométrie à l'algèbre. On note h la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = 3x - 4x^3$.

- a) $\triangle$ Justifier, à l'aide de R1, que le nombre $x = \sin 1^\circ$ vérifie l'équation

$$h(x) = q.$$

- b) $\triangle$ Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3 - 12x^2$. Vérifier que, pour tout $x \in [0; 0,06]$, on a $12x^2 \leq 0,0432$, et en déduire le sens de variation de h sur $[0; 0,06]$.

Q3. Une solution, une seule.

- a) $\blacktriangle$ Calculer $h(0)$ et vérifier que $h(0,06) = 0,179136$. Justifier, à l'aide de R4, que l'équation $h(x) = q$ admet une *unique* solution dans l'intervalle $[0; 0,06]$; on la note x^* .
- b) $\triangle$ Justifier, à l'aide de R2, que $0 < \sin 1^\circ < q < 0,06$, puis conclure :

$$x^* = \sin 1^\circ : \text{l'unique solution de } h(x) = q \text{ dans } [0; 0,06].$$

(ce résultat peut être admis pour la suite)

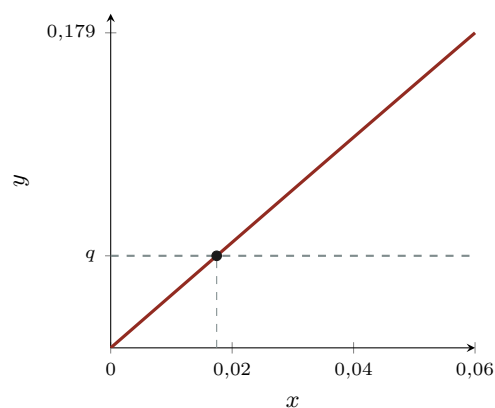
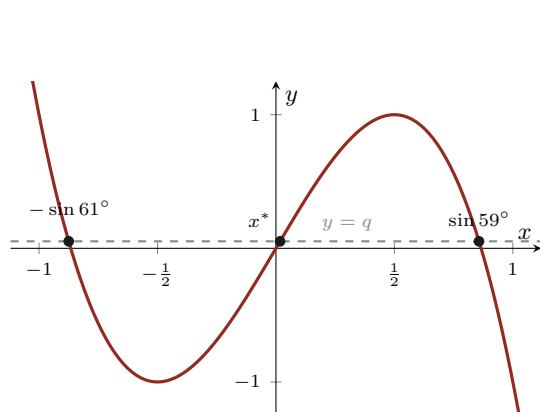
Prudence, cependant : « unique » ne vaut que *dans l'intervalle*. Sur $\mathbb{R}$ entier, l'équation cache deux autres solutions, et il faut savoir qui elles sont pour comprendre pourquoi al-Kashi vise celle-ci.

Q4. Les deux sœurs cachées.

- a) $\blacktriangle$ Dresser le tableau de variations complet de h sur $\mathbb{R}$ (extrema en $x = \pm \frac{1}{2}$, valeurs $h(\pm \frac{1}{2})$, limites en $\pm\infty$). En déduire que l'équation $h(x) = q$ admet *exactement trois* solutions réelles.
- b) $\triangle$ Vérifier que $h(\frac{1}{2}) = 1$, $h(1) = -1$, $h(-1) = 1$ et $h(-\frac{1}{2}) = -1$, et en déduire que les deux autres solutions appartiennent respectivement à $]\frac{1}{2}; 1[$ et à $]-1; -\frac{1}{2}[$ (on pourra admettre le tableau de la question a)).
- c) $\blacklozenge$ On admet les symétries du cercle trigonométrique : $\sin(180^\circ - A) = \sin A$ et $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$. En appliquant R1 aux angles $A = 59^\circ$ puis $A = 61^\circ$, montrer que les deux sœurs sont

$$\sin 59^\circ \approx 0,8572 \quad \text{et} \quad -\sin 61^\circ \approx -0,8746.$$

(On pourra remarquer que h est impaire.)



À gauche, la cubique $y = h(x)$ et la droite $y = q$: trois intersections, dont deux hors de portée d'al-Kashi. À droite, la loupe sur $[0; 0,06]$: une seule solution, $x^* = \sin 1^\circ$.

ALEXANDRIE, VERS 150

Dans l'*Almageste*, Ptolémée construit sa table de cordes de 3° en 3° à partir du pentagone et des bissections, puis bute : la corde du tiers d'un arc de corde connue ne se construit pas « par les moyens de la géométrie ». Il se rabat sur un encadrement de la corde de 1° , précis à cinq ou six chiffres, et toute l'astronomie s'en contentera pendant treize siècles. L'équation de la question Q2 est précisément la trisection que sa géométrie refusait : al-Kashi la résoudra sans règle ni compas.

PARTIE II

s'appuie sur R2 et la partie I

La machine à chiffres

Une équation ne se mange pas : il faut encore en extraire des décimales. Le coup de génie d'al-Kashi est un simple changement d'écriture. Au lieu de $3x - 4x^3 = q$, il écrit

$$x = \frac{q + 4x^3}{3},$$

et lit cette égalité comme une *machine* : on y verse une valeur approchée de x^* , elle en rend une meilleure. Dans toute la suite, g désigne la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $g(x) = \frac{q + 4x^3}{3}$, et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = \frac{q}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

Q5. La machine et son point fixe.

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = q$ si et seulement si $g(x) = x$.
- En déduire, à l'aide de la question Q3, que x^* est l'unique *point fixe* de g dans $[0; 0,06]$.

△ **Q6. Premier essai, à la main.** À la calculatrice (mode degrés inutile : il n'y a plus de trigonométrie !), calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 , en notant à chaque étape *tous* les chiffres affichés. Recopier et compléter le tableau, puis compter, à chaque ligne, le nombre de décimales stabilisées (en comparant chaque valeur à la dernière obtenue). Combien de décimales nouvelles chaque tour de machine apporte-t-il, environ ?

n	u_n	décimales stabilisées
0	0,0174453187...	
1	...	
2	...	
3	...	

Q7. Pourquoi le premier essai est déjà bon.

a) ▲ Justifier l'égalité $x^* = \frac{q}{3} + \frac{4}{3}(x^*)^3$, et en déduire

$$x^* - u_0 = \frac{4}{3}(x^*)^3 > 0.$$

b) ▲ En utilisant $x^* \leq 0,06$ et l'égalité précédente, montrer que $x^* \leq 0,018$.

c) ▲ En déduire $|u_0 - x^*| \leq 10^{-5}$: avant même de tourner, la machine connaît déjà quatre décimales.
(ce résultat peut être admis pour la suite)

△ **Q8. La machine en Python.** Recopier et compléter le script ci-dessous (une seule ligne manque : la formule de la machine), puis l'exécuter et confronter la sortie au tableau de la question Q6.

```

1 q = 0.0523359562          # sin(3 degrees), donnée de Samarcande (R2)
2 u = q / 3
3 for n in range(8):
4     print(n, u)
5     u = ...                # à compléter : un tour de machine

```

Que devient l'affichage à partir de $n = 5$? (Les décimales au-delà de la dixième résisteront à l'explication jusqu'à la question Q17 : patience.)

SAMARCANDE, ANNÉES 1420

Al-Kashi ne calculait pas comme nous : ses nombres étaient sexagésimaux, écrits en base soixante, l'héritage de Babylone. Et sa machine ne recalculait pas tout à chaque tour : elle déterminait les chiffres *un par un*, chaque étape ne corrigeant que la nouvelle place, car les chiffres déjà posés ne bougeaient plus. Sa valeur, transmise par le commentateur Mirim Chelebi trois quarts de siècle plus tard, vaut en base soixante 1 ; 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, ... : recalculée aujourd'hui, elle est exacte jusqu'au huitième chiffre sexagésimal, soit mieux que treize décimales ; les deux dernières places que portent les manuscrits ne résistent pas au recalcul, et Chelebi lui-même recopie $\sin 3^\circ$ avec un chiffre fautif. Même les transmetteurs se trompent : c'est aussi cela, l'histoire des mathématiques.

La contraction

Trois décimales par tour : la vitesse de la machine réclame une explication. La voici, en un mot : *g rapproche*. Quand on lui donne deux nombres, elle rend deux nombres beaucoup plus voisins ; à force d'être rapprochée de x^* , la suite (u_n) n'a nulle part où fuir. Cette partie mesure exactement ce « beaucoup ». On y travaille sur l'intervalle $I = [0 ; 0,05]$.

Q9. Un territoire stable.

- △ Vérifier que $h(0,05) = 0,1495 > q$, et en déduire, à l'aide de la stricte croissance de h (question Q2), que $x^* < 0,05$: le point fixe habite I .
- △ Justifier que g est croissante sur I .
- ▲ Calculer $g(0)$ et vérifier que $g(0,05) \approx 0,0176119854$. En déduire que, pour tout $x \in I$, on a $g(x) \in I$: la machine ne sort jamais du territoire.
- △ Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. (ce résultat peut être admis pour la suite)

Q10. La mesure du rapprochement.

- ▲ Démontrer, en développant le membre de droite, que pour tous réels x et y :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

- ▲ Montrer que, pour tous $x, y \in I$, $0 \leq x^2 + xy + y^2 \leq 0,0075$.
- ▲ En déduire l'inégalité fondamentale du devoir :

$$\forall x, y \in I, \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{100} |x - y|.$$

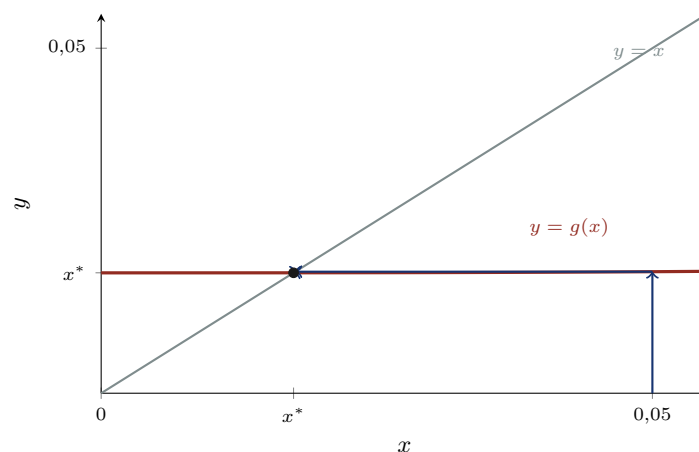
La machine divise les écarts par au moins cent : on dit que g est *contractante* sur I , de constante $k = \frac{1}{100}$. (ce résultat peut être admis pour la suite)

Q11. La vitesse vraie. La constante $k = \frac{1}{100}$ est une garantie ; la vitesse réelle est encore meilleure, et un développement exact la révèle.

- ▲ Soit d un réel. En développant $(x^* + d)^3$, montrer l'égalité *exacte* :

$$g(x^* + d) - x^* = 4(x^*)^2 d + 4x^* d^2 + \frac{4}{3} d^3.$$

- ▲ En déduire que si l'erreur $d = u_n - x^*$ est petite, l'erreur suivante $u_{n+1} - x^*$ vaut environ $4(x^*)^2 d$, avec $4(x^*)^2 \approx 0,0012$.
- △ Diviser l'erreur par mille, c'est gagner exactement trois décimales. Expliquer alors le rythme observé à la question Q6, et pourquoi il est un peu plus lent que trois décimales par tour.



La courbe de g est presque plate : sa pente en x^* vaut $4(x^*)^2 \approx 0,0012$. Un départ pourtant lointain ($x_0 = 0,05$) rejoint le point fixe en deux marches ; la troisième est déjà invisible. Comparer avec les diagrammes du cours : même outil, vitesse extrême.

PARTIE IV

s'appuie sur R3, R4 et les parties II et III

Le théorème du point fixe

Prenons de la hauteur. Ce qui a fait fonctionner la machine d'al-Kashi ne doit rien aux coïncidences de l'équation de Samarcande : seuls ont servi un intervalle stable et une contraction. Cette partie démontre le théorème général, avec les seuls outils du chapitre, puis en tire deux dividendes : le contrat de précision de la machine, et le secret du choix de q . Dans toute la partie, a et b désignent deux réels avec $a < b$, $I = [a; b]$, et φ une fonction définie sur I , à valeurs dans I (pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \in I$), contractante de constante k : il existe un réel $k \in [0; 1[$ tel que

$$\forall x, y \in I, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k |x - y|.$$

Q12. Contracter, c'est être continu. Le cours a défini la continuité de φ en un point c de I : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - c| \leq \delta$ alors $|\varphi(x) - \varphi(c)| < \varepsilon$.

♦ Démontrer qu'une fonction contractante sur I est continue en tout point de I . (C'est l'une des rares fois de l'année où la définition quantifiée s'utilise *directement* : chercher quel δ répond à un ε donné.)

Q13. Existence d'un point fixe.

- ▲ On pose, pour $x \in I$, $\psi(x) = \varphi(x) - x$. Justifier que ψ est continue sur I (on pourra admettre le résultat de la question Q12), puis que $\psi(a) \geq 0$ et $\psi(b) \leq 0$.
- ▲ En déduire, à l'aide de R4, que φ admet au moins un point fixe ℓ dans I : $\varphi(\ell) = \ell$.

Q14. Unicité. ▲ Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux points fixes de φ dans I . Montrer que $|\ell_1 - \ell_2| \leq k |\ell_1 - \ell_2|$, et en déduire $\ell_1 = \ell_2$. (Où l'hypothèse $k < 1$ sert-elle ?)

Q15. Convergence, à vitesse garantie. Soit (v_n) une suite définie par $v_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \varphi(v_n)$.

- △ Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in I$.
- ▲ Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - \ell| \leq k^n |v_0 - \ell|.$$

- c) ▲ En déduire, à l'aide de R3, que (v_n) converge vers ℓ , et conclure :

sur I stable, une contraction possède un unique point fixe, et toute suite itérée y converge.

(ce résultat peut être admis pour la suite)

Q16. Le contrat de précision de la machine. On revient à g , contractante de constante $k = \frac{1}{100}$ sur $I = [0; 0,05]$ (partie III).

- a) △ Justifier $|u_0 - x^*| \leq 0,05$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - x^*| \leq 0,05 \times 10^{-2n}.$$

Chaque tour de machine *garantit* au moins deux décimales nouvelles.

- b) △ En comparant les puissances de 10, montrer que $n = 5$ tours garantissent $|u_n - x^*| < 0,5 \times 10^{-10}$: dix décimales exactes.
- c) ▲ Reprendre le calcul avec la borne fine de la question Q7, $|u_0 - x^*| \leq 10^{-5}$: combien de tours garantis pour dix décimales ? Et combien la machine en a-t-elle réellement demandé (question Q6) ? Formuler la morale en une phrase : une borne est une garantie, pas une prédiction.

Q17. Le secret des dix décimales de q . La donnée R2 fournit la valeur approchée de q : le vrai $\sin 3^\circ$ en diffère d'au plus η , avec $|\eta| \leq 0,5 \times 10^{-10}$. La machine des élèves itère donc la fonction $\tilde{g}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $\tilde{g}(x) = \frac{(q + \eta) + 4x^3}{3}$... sans connaître η . Faut-il s'inquiéter ?

- a) ◆ Vérifier que $\tilde{g}$ est encore croissante, contractante de constante $\frac{1}{100}$ sur I , et que $\tilde{g}(0) \geq 0$ ainsi que $\tilde{g}(0,05) \leq 0,05$: le théorème des questions Q13 à Q15 s'applique, $\tilde{g}$ possède un unique point fixe y^* dans I .
- b) ◆ Établir l'égalité

$$y^* - x^* = \frac{\eta}{3} + \frac{4}{3} ((y^*)^3 - (x^*)^3),$$

puis, à l'aide de la question Q10, la borne de *conditionnement* :

$$|y^* - x^*| \leq \frac{|\eta|/3}{1 - \frac{1}{100}}.$$

- c) △ En déduire $|y^* - x^*| \leq 1,7 \times 10^{-11}$: l'erreur sur la donnée est *divisée par presque trois*, et les dix décimales de R2 garantissent dix décimales de $\sin 1^\circ$. C'était le contrat annoncé.
- d) △ Exécuter la cellule `print(math.sin(math.radians(1)))` (annexe B) et comparer à la limite affichée par le script de la question Q8 : à quelle décimale décrochent-elles ? Expliquer, en une phrase, pourquoi ce décrochage était prévu, et pourquoi il est *conforme* à la borne de b).

DE SAMARCANDE À LWÓW

Il fallut cinq siècles pour que la machine devienne un théorème. En 1890, Émile Picard systématise les « approximations successives » pour résoudre des équations différentielles. En juin 1920, un jeune mathématicien polonais, Stefan Banach, présente à Lwów une thèse qui en extrait le squelette abstrait ; publiée en 1922, elle énonce le *théorème du point fixe des applications contractantes*, valable bien au-delà des intervalles de nombres. Ce que vous avez démontré aux questions Q13 à Q15 en est le cas fondateur, la dimension un ; et le calcul d'al-Kashi en est, rétrospectivement, la première mise en œuvre de l'histoire.

Le tournoi des méthodes

La machine d'al-Kashi n'était pas la seule concurrente possible. Le chapitre F1 en fournit une autre, la dichotomie ; et les calculateurs anciens en pratiquaient une troisième, la *fausse position*. Organisons le tournoi, sur la même équation. On note f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 4x^3 - 3x + q$: il s'agit de trouver son unique zéro x^* dans $[0 ; 0,06]$ (c'est bien l'équation de la question Q2, écrite sous la forme $f(x) = 0$).

Q18. La dichotomie, valeur sûre.

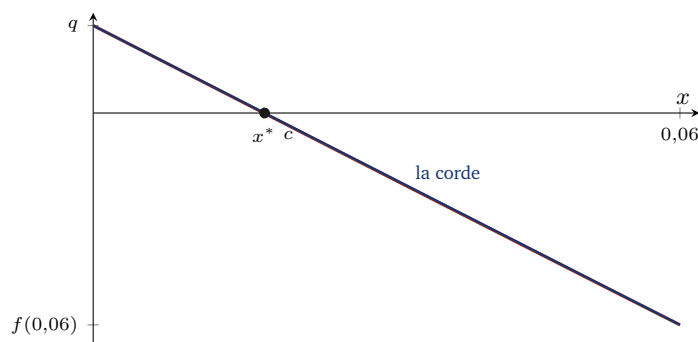
- △ Vérifier que $f(0) = q > 0$ et que $f(0,06) \approx -0,1268000438 < 0$.
- ▲ Après n étapes de dichotomie sur $[0 ; 0,06]$, le milieu de l'intervalle courant approche x^* à $\frac{0,06}{2^{n+1}}$ près (résultat du cours). En utilisant $2^{30} \approx 1,07 \times 10^9$ et $2^{31} \approx 2,15 \times 10^9$, déterminer le nombre d'étapes garantissant dix décimales ($0,5 \times 10^{-10}$ près).
- △ Exécuter le script « dichotomie » de l'annexe B et relever le nombre d'itérations effectivement utilisées. Environ combien d'itérations la dichotomie dépense-t-elle par décimale gagnée ? (Une valeur approchée suffit.)

Q19. La fausse position, l'autre méthode rapide. Plutôt que de couper l'intervalle en son milieu, les calculateurs remplaçaient la courbe par sa *corde* : sur $[a ; b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, on coupe au point où la corde traverse l'axe des abscisses, puis on recommence du côté où le signe change.

- ▲ La corde joint $(a ; f(a))$ à $(b ; f(b))$. Après avoir justifié que $f(b) \neq f(a)$, montrer qu'elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse

$$c = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)}.$$

- △ Calculer c pour $a = 0$ et $b = 0,06$, et vérifier $c \approx 0,0175294601$: une seule corde donne déjà trois décimales.
- △ Exécuter le script « fausse position » de l'annexe B : combien de décimales gagnées par itération, environ ?



La fausse position : sur $[0 ; 0,06]$, la cubique est si peu courbée que la corde s'en distingue à peine ; son intersection c avec l'axe tombe presque sur x^* . Voilà tout le secret de sa vitesse.

Q20. Le podium.

- △ Classer les trois méthodes selon leur vitesse observée (décimales gagnées par itération) : le tournoi oppose en réalité une méthode lente et deux méthodes rapides, qui gagnent toutes deux environ

trois décimales par tour. Laquelle des deux rapides atteint la première des dix décimales, et pourquoi cette avance doit-elle davantage à la qualité de son point de départ (question Q7) qu'à sa vitesse de croisière ?

- b) ▲ La dichotomie et la fausse position exigent de surveiller un encadrement et un changement de signe ; la machine d'al-Kashi itère une unique formule, sans aucun test, et ses chiffres, une fois posés, ne bougent plus. Expliquer en quelques lignes pourquoi, pour un calcul à la main en base soixante, mené à Samarcande jusqu'à la dixième place sexagésimale, cette différence d'organisation est décisive.

PARTIE VI

s'appuie sur R1 ; réservée aux aventuriers

L'atelier du secret

Reste une dette : d'où sortent la donnée $q = \sin 3^\circ$, et l'identité R1 elle-même ? Al-Kashi obtenait $\sin 3^\circ$ par la géométrie, en combinant le pentagone et les bisections que Ptolémée maîtrisait déjà : car $3 = 18 - 15$. Cette partie, entièrement facultative, s'adresse aux aventuriers ; elle utilise les formules suivantes, fournies et admises, valables pour tous angles A et B en degrés.

R5 – FORMULES D'ADDITION, FOURNIES

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B, \quad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B,$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A, \quad \cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A, \quad \cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

(Admises : elles seront démontrées dans le cours de l'enseignement de spécialité ou en mathématiques expertes ; leur préhistoire est la table de cordes de Ptolémée.)

Q21. La fabrique de $\sin 3^\circ$. Dans toute la question, les valeurs exactes de référence sont $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et tous les angles rencontrés sont aigus, de sinus et cosinus strictement positifs.

- a) ♦ Établir $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, puis donner $\cos 15^\circ$ sous forme exacte.
 b) ♦ Le pentagone : on pose $s = \sin 18^\circ$. Justifier $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, en déduire, à l'aide des formules fournies, l'équation

$$4s^2 + 2s - 1 = 0,$$

$$\text{puis } s = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

- c) ♦ En écrivant $3 = 18 - 15$, exprimer $\sin 3^\circ$ sous forme exacte (radicaux), puis vérifier à la calculatrice l'accord avec la donnée R2, décimale par décimale.
 d) ♦ Démontrer enfin l'identité R1 :

$$\forall A, \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A,$$

en développant $\sin(2A + A)$. La boucle est bouclée : le devoir entier tenait sur les formules de cet atelier.

Voilà le voyage accompli. Une identité de collège supérieur, un théorème d'existence, une contraction : avec cela, un homme de 1424 a fabriqué, à la main, quatorze décimales exactes d'un nombre que la

géométrie déclarait inaccessible. La calculatrice de la question Q1 ne procède pas autrement : derrière chaque touche sin travaillent des itérations, filles de celle de Samarcande, et le théorème du point fixe veille sur chacune d'elles.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2b. Un carré est positif : sur $[0; 0,06]$, borner x^2 par $(0,06)^2$, puis conclure sur le signe de h' .

Q3a. R4 exige trois vérifications : continuité, stricte monotonie, et la position de q entre $h(0)$ et $h(0,06)$.

Q4a. Les limites de h en $\pm\infty$ sont celles de son terme dominant $-4x^3$; sur chacun des trois intervalles de monotonie, appliquer R4.

Q4c. $3 \times 59 = 177 = 180 - 3$ et $3 \times 61 = 183 = 180 + 3$: appliquer R1 puis les symétries admises, et utiliser l'impairité de h pour la seconde sœur.

Q7b. Dans l'égalité de a), majorer $(x^*)^3$ par $(0,06)^3 = 2,16 \times 10^{-4}$, et calculer.

Q9c. g est croissante sur I : l'image de I est l'intervalle $[g(0); g(0,05)]$; le comparer à I .

Q10b. Sur I , chacun des trois termes x^2 , xy , y^2 est compris entre 0 et $(0,05)^2 = 0,0025$.

Q11a. $(x^* + d)^3 = (x^*)^3 + 3(x^*)^2d + 3x^*d^2 + d^3$, puis utiliser $g(x^*) = x^*$ pour faire disparaître les termes constants.

Q12. Pour $\varepsilon > 0$ donné, essayer $\delta = \varepsilon$: que donne l'inégalité de contraction avec $k < 1$?

Q13a. $\varphi(a)$ est un élément de $[a; b]$: il est donc supérieur ou égal à a . Même idée en b .

Q14. Écrire $\ell_1 - \ell_2 = \varphi(\ell_1) - \varphi(\ell_2)$, puis faire passer tout le monde du même côté : $(1 - k) |\ell_1 - \ell_2| \leq 0$.

Q15b. L'hérédité tient en une ligne : v_n et ℓ sont dans I , la contraction s'applique à $|\varphi(v_n) - \varphi(\ell)|$.

Q16b. $0,05 \times 10^{-2n} = 5 \times 10^{-2-2n}$: il suffit de comparer les exposants avec ceux de $0,5 \times 10^{-10} = 5 \times 10^{-11}$.

Q17b. Écrire $y^* = \tilde{g}(y^*)$ et $x^* = g(x^*)$, soustraire, puis majorer le terme cubique par l'inégalité de la question Q10 appliquée à x^* et y^* .

Q19a. Écrire l'équation de la droite passant par les deux points (taux d'accroissement), puis résoudre $y = 0$.

Q21c. Il manque $\cos 18^\circ$: l'obtenir par $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ (cosinus positif pour un angle aigu), puis développer $\sin(18^\circ - 15^\circ)$ avec les formules fournies.

Q21b. $36 + 54 = 90$ justifie la première égalité ; écrire ensuite $\sin 36^\circ = \sin(2 \times 18^\circ)$ et $\cos 54^\circ = \cos(3 \times 18^\circ) = \cos(36^\circ + 18^\circ)$, tout développer en s et $\cos 18^\circ$, puis simplifier par $\cos 18^\circ \neq 0$.

Annexe B · Les scripts du tournoi

Les trois concurrents travaillent sur la même équation, avec la même donnée q (R2). La valeur de q est écrite *en dur* : c'est voulu. Toute la trigonométrie du devoir tient dans cette constante ; le seul appel à `math.sin` est la cellule de vérification finale. (Piège classique : `math.sin(3)` calcule le sinus de 3 *radians*, et l'itération convergerait alors, sans aucun message d'erreur, vers une valeur plausible et fausse.)

Dichotomie (pour la question Q18) :

```

1 q = 0.0523359562
2 def f(x):
3     return 4 * x**3 - 3 * x + q
4
5 a, b = 0.0, 0.06
6 n = 0
7 while b - a > 1e-10:
8     m = (a + b) / 2
9     if f(a) * f(m) <= 0:
10        b = m
11    else:
12        a = m
13    n += 1
14 print(n, (a + b) / 2)

```

Fausse position (pour la question Q19) :

```

1 q = 0.0523359562
2 def f(x):
3     return 4 * x**3 - 3 * x + q
4
5 a, b = 0.0, 0.06
6 for n in range(1, 6):
7     c = a - f(a) * (b - a) / (f(b) - f(a))
8     print(n, c)
9     if f(a) * f(c) <= 0:
10        b = c
11    else:
12        a = c

```

Cellule de vérification (pour la question Q17d ; seule apparition de la trigonométrie machine, en radians) :

```

1 import math
2 print(math.sin(math.radians(1)))

```

Valeur de référence, calculée en précision arbitraire : $\sin 1^\circ = 0,01745240643728351282 \dots$

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les scripts complets du tournoi, le récit des marges du manuscrit de Samarcande (la glose « que Dieu lui pardonne » et sa chaîne de copistes) et la solution détaillée de l'atelier du secret vous attendent sur le compagnon numérique.

DM F1.1 · ANNÉE 2026-2027