



EXERCICES • F1. LIMITES DE FONCTIONS ET CONTINUITÉ

Trente exercices pour approcher, atteindre, encadrer

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Lire l'infini	Ex. 1–3	★ à ★★	■ ◆	cours F1, § 1
II. L'algèbre des limites	Ex. 4–7	★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F1, § 2
III. Encadrer et longer	Ex. 8–10	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F1, § 3
IV. Les croissances comparées	Ex. 11–13	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F1, § 4
V. Continuité et TVI	Ex. 14–18	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F1, § 5–6
VI. Les suites récurrentes	Ex. 19–22	★★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	cours F1, § 7
VII. Histoires et belles mathématiques	Ex. 23–28	★★★★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	tout le chapitre
VIII. Python, le laboratoire	Ex. 29–30	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F1, § 6

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Terminale Spécialité : fiche 1 (Limites de fonctions). Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

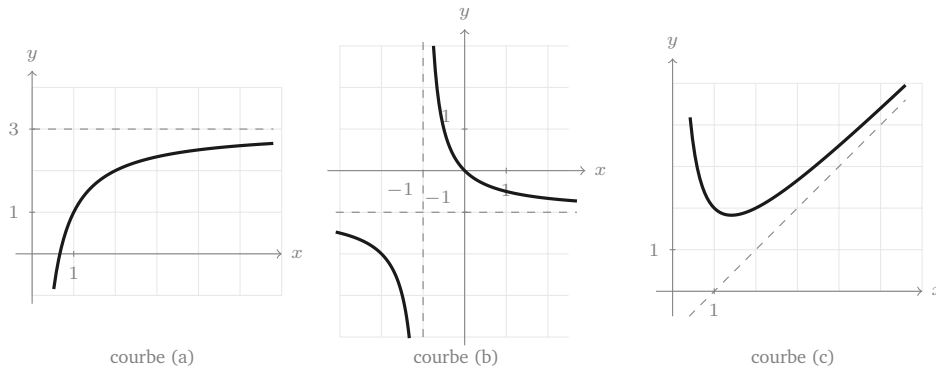
⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. LIRE L'INFINI

↔ s'appuie sur COURS F1, § 1 · limites, asymptotes, limites latérales

Trois courbes au rapport

Pour chacune des trois courbes ci-dessous, lire les limites aux bornes du domaine représenté (bornes infinies et valeurs interdites comprises), puis donner l'équation de chaque asymptote en précisant sa nature. Les quadrillages sont au pas 1.



Valeurs interdites, deux versants

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $\forall x \neq 2, f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (on étudiera le signe du dénominateur de part et d'autre de 2).
- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- Dresser le portrait asymptotique complet de la courbe de f , puis en donner l'allure à main levée.
- Mêmes questions pour g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $\forall x \neq -1, g(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ (pour les limites en l'infini, commencer par écrire $g(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$ et vérifier cette identité).

Le tribunal des asymptotes

Vrai ou faux ? Justifier chaque verdict : une preuve courte si c'est vrai, un contre-exemple explicite si c'est faux.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors la courbe de f ne coupe jamais la droite d'équation $y = 2$.
- Si la droite $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de f , alors f n'est pas définie en 3.
- Une courbe peut admettre deux asymptotes horizontales distinctes.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors la courbe de f admet une asymptote verticale.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 5$, alors la droite d'équation $y = x + 5$ est asymptote oblique à la courbe de f .

II. L'ALGÈBRE DES LIMITES

↔ s'appuie sur COURS F1, § 2 · opérations, formes indéterminées, composées

EXERCICE 4 · APL-F1-04



Opérations sans piège

Déterminer chaque limite en citant le théorème d'opération utilisé.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{5}{x} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x} + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)(1 + x^2)$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 3}{x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

EXERCICE 5 · APL-F1-05



Le terme qui commande

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $x \mapsto -2x^3 + 5x^2 - 7$ et de $x \mapsto \frac{5x^2 - 1}{2x^2 + x + 1}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4}{x^2 - 9}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 4}{x^2 - 9}$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 1}{x^2 + x}}$ en citant précisément le théorème de composition utilisé.

EXERCICE 6 · APL-F1-06



Conjuguées en régime soutenu

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 5} - \sqrt{x})$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x - 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

RAPPEL

La quantité conjuguée transfère le radical du numérateur au dénominateur : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
dès que $A \geq 0$, $B \geq 0$ et $\sqrt{A} + \sqrt{B} \neq 0$.

Les radicaux emboîtés

On veut déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$.

1. Pourquoi s'agit-il d'une forme indéterminée ? Avant tout calcul, parier sur la valeur de la limite.
2. Multiplier par la quantité conjuguée et montrer que, pour tout $x > 0$, l'expression vaut

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}.$$

3. En factorisant haut et bas par $\sqrt{x}$, conclure.
4. ★ *Défi*. Et pour $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$? Généraliser.

III. ENCADRER ET LONGER

↔ s'appuie sur COURS F1, § 3 · comparaison, gendarmes, asymptote oblique

Gendarmes en patrouille

Déterminer les limites suivantes après avoir écrit un encadrement (ou une minoration) valable au voisinage concerné, en citant le théorème employé.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3 \cos x)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(5x)}{x^2 + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

Coup de pouce

Pour la question 4, encadrer séparément le numérateur et le dénominateur par des expressions en $x \pm 1$, puis factoriser par x .

La famille à un paramètre

Pour tout réel k , on définit f_k sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x - 2 + k e^{-x}$.

1. Déterminer, selon le signe de k , la limite de f_k en $-\infty$.
2. Montrer que toutes les courbes C_k admettent en $+\infty$ la même asymptote oblique Δ , dont on donnera une équation.
3. Étudier, selon le signe de k , la position de C_k par rapport à Δ .
4. Que dire de C_0 ? Tracer sur une même figure l'allure de Δ , de C_1 et de C_{-2} (on pourra placer les points d'abscisse 0 : $f_1(0) = -1$ et $f_{-2}(0) = -4$).

Borné contre explosif

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ dont on sait seulement que : $\forall x \geq 0, 1 \leq f(x) \leq 3$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + f(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, en citant les théorèmes utilisés.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$. Le théorème « limite d'un produit » s'appliquait-il directement ? Pourquoi ?
3. La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe-t-elle nécessairement ? Proposer une fonction f vérifiant l'encadrement et n'ayant pas de limite en $+\infty$.
4. ★ Montrer que si, pour un $\delta > 0$, on a $f(x) \geq 1 + \delta$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x = +\infty$.
(Minorer d'abord $(f(x))^x$ par $(1 + \delta)^{\lfloor x \rfloor}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière rencontrée au paragraphe 5 du cours, puis appliquer l'inégalité de Bernoulli du chapitre A0.)

IV. LES CROISSANCES COMPARÉES

↔ s'appuie sur COURS F1, § 4 · l'exponentielle contre les puissances

La batterie de duels

Déterminer les limites suivantes.

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 10x^3)$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 e^x$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$ |

La ROC prolongée

Le cours a établi : $\forall x \geq 0, e^x > \frac{x^2}{2}$, et en a déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. On prolonge la méthode d'un étage.

1. Soit ψ définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall x \geq 0, \psi(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$. Justifier que ψ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et exprimer $\psi'(x)$.
2. À l'aide de l'inégalité du cours, déterminer le signe de ψ' et en déduire que : $\forall x \geq 0, e^x > \frac{x^3}{6}$.
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ par comparaison.
4. Décrire en une phrase comment ce mécanisme se prolonge à $\frac{e^x}{x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Portrait asymptotique de $x^2 e^{-x}$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, et en déduire l'asymptote de la courbe.
2. La courbe traverse-t-elle son asymptote ? (Étudier le signe de f .)
3. Comparer, en $+\infty$, les fonctions $f, x \mapsto x^{10} e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x/2}$: les classer par vitesse d'écrasement vers 0, en justifiant par un calcul de quotients.
4. ★ Trouver toutes les valeurs de $a > 0$ telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-ax} = 0$. Le résultat dépend-il de a ? Et pour $x^n e^{-ax}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ?

V. CONTINUITÉ ET TVI

↔ s'appuie sur COURS F1, § 5–6 · continuité, théorème des valeurs intermédiaires, dichotomie

L'art du raccord

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \neq 1, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, et $f(1) = a$. Déterminer la valeur de a pour laquelle f est continue en 1.
2. Soit g définie sur $[-3; +\infty[$ par : $\forall x \neq 1, g(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$, et $g(1) = b$. Déterminer b pour que g soit continue en 1.
3. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x < 2, h(x) = x + m$, et $\forall x \geq 2, h(x) = x^2 - 3x + 5$. Déterminer m pour que h soit continue sur $\mathbb{R}$, et justifier la continuité sur chacun des deux morceaux.

Compter les solutions sans calculer

Une fonction f , **continue** sur $[-4; 5]$, a le tableau de variations suivant (les flèches indiquent une stricte monotonie).

x	-4	-1	2	5
f	-2	3	-5	4

$\nearrow$ (entre -4 et -1) $\searrow$ (entre -1 et 2) $\nearrow$ (entre 2 et 5)

- Déterminer, en justifiant par le théorème adapté sur chaque intervalle de monotonie, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- Même question pour $f(x) = 3,5$, puis pour $f(x) = -6$.
- Donner, pour chaque solution de $f(x) = 0$, le plus petit intervalle du tableau qui la contient.

Le tribunal de la continuité

Vrai ou faux ? Preuve courte ou contre-exemple explicite.

- Toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si f est continue sur $[0; 1]$ et ne s'annule pas, alors f garde un signe constant sur $[0; 1]$.
- Si $f(0) < 0 < f(1)$, alors f s'annule sur $]0; 1[$.
- Si f est continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) \cdot f(1) > 0$, alors f ne s'annule pas sur $[0; 1]$.

Coup de pouce

Pour la question 3, raisonner par l'absurde avec le TVI. Les questions 4 et 5 se règlent chacune par un dessin devenu contre-exemple.

L'équation $g(x) = 0$, de bout en bout

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 3x - 3$.

- Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de g (limites comprises).
- Calculer $g(-1)$ et en déduire que g ne s'annule pas sur $]-\infty; 1]$.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et justifier que $\alpha \in]2; 3[$.
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

La dichotomie, chronomètre en main

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x^3 + x^2 - 5$.

1. Montrer que h s'annule au moins une fois dans $[1; 2]$, puis exactement une fois (on établira la stricte monotonie de h sur cet intervalle). On note β cette racine.
2. Dérouler trois étapes de dichotomie à la main, en consignait à chaque étape l'intervalle retenu et le signe calculé.
3. Après k étapes, quelle est la longueur de l'intervalle obtenu ? Combien d'étapes garantissent un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-9} ? (On cherchera le plus petit k tel que $2^k > 10^9$.)
4. ☆ La dichotomie localise β , mais peut-elle prouver que β est irrationnel ? Qu'est-ce qu'un algorithme d'approximation ne pourra jamais établir seul ?

VI. LES SUITES RÉCURRENTES

↔ s'appuie sur COURS F1, § 7 · point fixe, escalier, toile d'araignée

Escalier ou toile ?

Les deux diagrammes ci-dessous représentent des suites définies par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), pour deux fonctions affines.

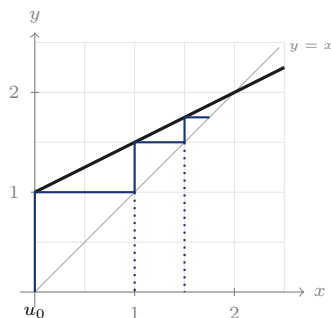


diagramme (A)

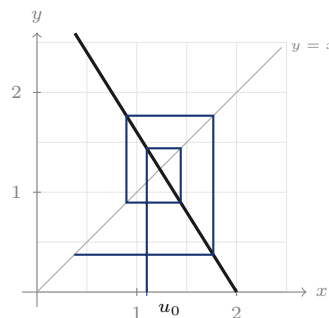


diagramme (B)

1. Sur le diagramme (A), lire les valeurs exactes de u_1 et u_2 (le quadrillage est au demi-carreau), conjecturer le sens de variation et la limite de la suite, et lire l'abscisse du point fixe.
2. Sur le diagramme (B), décrire le comportement de la suite. Le point fixe attire-t-il ou repousse-t-il ?
3. Les deux fonctions sont $f(x) = \frac{x+2}{2}$ et $g(x) = 3,2 - 1,6x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$). Attribuer chaque fonction à son diagramme, calculer le point fixe de chaque fonction, et relier le comportement observé au coefficient directeur.

Le point fixe double

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$ (on vérifiera au passage que la suite est bien définie : $u_n \neq 6$).
2. Montrer que si (u_n) converge vers un réel $\ell < 6$, alors $\ell = 3$, et que ce point fixe est *double* (l'équation aux points fixes a une racine double).
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$. Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. La convergence est-elle rapide ? Comparer $u_4 \approx 2,45$ à ce qu'aurait donné une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ partant à la même distance de sa limite.

Coup de pouce

Question 3 : calculer $v_{n+1} - v_n$ en réduisant au même dénominateur, et utiliser $u_{n+1} - 3 = \frac{3(u_n - 3)}{6 - u_n}$.

Deux points fixes en compétition

Soit f définie sur $] -2; +\infty[$ par : $\forall x > -2, f(x) = \frac{8(x-1)}{x+2}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer les deux points fixes de f .
2. Montrer que : $\forall x > -2, f(x) - x = \frac{-(x-2)(x-4)}{x+2}$, et en déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[2; 4]$.
3. Montrer que l'intervalle $[3; 4]$ est stable par f (on pourra établir que f est croissante sur cet intervalle), puis que (u_n) est croissante et majorée.
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite. Pourquoi l'autre point fixe ne pouvait-il pas être la limite ?
5. ★ Que se passe-t-il si $u_0 = 2$? Et si $u_0 = 1,9$? (On pourra calculer deux itérés.) Interpréter avec le vocabulaire aimant/ressort des Coulisses.

La récurrence aux radicaux

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + u_n - \sqrt{3 + u_n^2}$.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 + x - \sqrt{3 + x^2}$. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et vérifier que ses solutions sont -1 et 1 .
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x > 0 \iff -1 < x < 1$. (Les deux bornes de cet encadrement vous rappellent-elles quelque chose ?)

3. Montrer que l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f . (On admettra, ou l'on prouvera en défi, que f est croissante sur $\mathbb{R}$: pour tout x , $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} > 0$.)
4. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1, puis qu'elle converge, et déterminer sa limite.
5. ★ Défi. Pourquoi la limite ne peut-elle pas être -1 , qui est pourtant un point fixe ?

VII. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur TOUT LE CHAPITRE · six récits authentiques, six vraies preuves

EXERCICE 23 · SYN-F1-23

★★★★ ◆ ⌚

Héron, I^{er} siècle : la racine des Babyloniens

Pour extraire $\sqrt{2}$, Héron d'Alexandrie itère la moyenne d'un nombre et de son quotient : $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. Une tablette babylonienne (YBC 7289, dix-huit siècles avant lui) porte déjà la valeur sexagésimale $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414213$.

1. Montrer que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang 1 (étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$).
3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite (on vérifiera que la fonction itérée est continue sur $]0; +\infty[$).
4. Calculer u_1 , u_2 , u_3 en fractions, puis en valeurs décimales. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ à chaque étape ? Comparer u_3 à la valeur de la tablette.

EXERCICE 24 · SYN-F1-24

★★★★ ◆ ⌚

Fibonacci, 1225 : neuf décimales sans algèbre

Dans le *Flos* (1225), Léonard de Pise, dit Fibonacci, relève un défi lancé à la cour de l'empereur Frédéric II : résoudre $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Il démontre d'abord que la solution ne peut être construite à la règle et au compas, puis en donne, sans aucune formule, l'approximation sexagésimale $1,3688081075\dots$, exacte à **neuf décimales**. Nul ne sait précisément comment il a calculé.

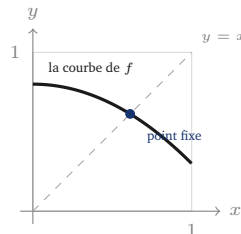
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ (on calculera le discriminant).
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α , et qu'elle appartient à $]1; 2[$.
3. Effectuer deux étapes de dichotomie et donner un encadrement de α d'amplitude 0,25. La valeur de Fibonacci est-elle dans votre intervalle ?
4. Combien d'étapes de dichotomie faudrait-il pour *garantir* les neuf décimales de Fibonacci (amplitude 10^{-9}) ? Que penser de la performance de 1225 ?

Brouwer, 1911 : le point fixe inévitable

En 1911, le mathématicien néerlandais L.E.J. Brouwer démontre un théorème de point fixe devenu central en économie comme en théorie des jeux. En dimension 1, il tient en une ligne de TVI : *toute fonction continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ admet au moins un point fixe.*

Soit donc f continue sur $[0; 1]$, telle que : $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$.



La courbe vit dans le carré : elle entre sur le bord gauche, sort sur le bord droit, et la diagonale lui barre la route.

1. On pose : $\forall x \in [0; 1], g(x) = f(x) - x$. Justifier que g est continue, puis déterminer les signes de $g(0)$ et de $g(1)$.
2. Conclure à l'existence d'un point fixe (on traitera à part le cas où $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$).
3. Le point fixe est-il nécessairement unique ? Justifier par un exemple.
4. Chacune des deux hypothèses est indispensable : donner une fonction continue de $]0; 1[$ dans $]0; 1[$ sans point fixe, puis une fonction non continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ sans point fixe.

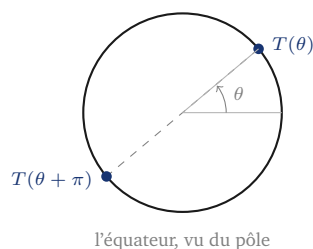
Coup de pouce

Question 4 : pour la première, penser à une fonction qui « pousse tout vers 1 » sans jamais l'atteindre ; pour la seconde, un escalier à deux marches bien placées suffit.

Borsuk, 1933 : le tour du monde des températures

Affirmation : à tout instant, il existe sur l'équateur deux points diamétralement opposés où la température est exactement la même. C'est le cas le plus simple d'un théorème prouvé par Karol Borsuk en 1933.

On repère un point de l'équateur par son angle θ (en radians), et l'on note $T(\theta)$ la température en ce point. On suppose T continue sur $[0; 2\pi]$, avec $T(2\pi) = T(0)$ (même point). On pose : $\forall \theta \in [0; \pi], d(\theta) = T(\theta + \pi) - T(\theta)$.



l'équateur, vu du pôle

1. Que mesure $d(\theta)$? Justifier que d est continue sur $[0; \pi]$.

2. Calculer $d(0) + d(\pi)$ et en déduire que $d(0)$ et $d(\pi)$ sont ou bien nuls, ou bien de signes contraires.
3. Conclure. Où la continuité de la température est-elle physiquement discutable, et pourquoi l'hypothèse est-elle pourtant raisonnable ?
4. L'énoncé reste-t-il vrai en remplaçant la température par n'importe quelle grandeur continue le long de l'équateur ? Donner deux exemples.

EXERCICE 27 · APR-F1-27

★★★★★ ☆ ⌂

Cauchy, 1821 : prouver le théorème du chapitre

Le cours a admis le TVI en signalant que la preuve de Cauchy tient dans la dichotomie. La voici, guidée : c'est l'exercice le plus profond de la feuille, et il n'utilise que le chapitre A1 et le paragraphe 5.

Soit f continue sur $[a; b]$ avec $f(a) < 0 < f(b)$. On construit deux suites (a_n) et (b_n) ainsi : $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ le milieu : si $f(m_n) \leq 0$ on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

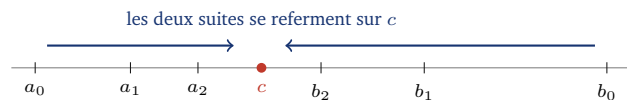


Schéma de principe : (a_n) monte, (b_n) descend, l'écart est divisé par deux à chaque étape.

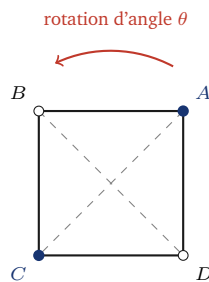
1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0 < f(b_n)$.
2. Montrer que (a_n) est croissante, (b_n) décroissante, et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$.
3. Justifier que (a_n) et (b_n) convergent (théorème d'A1 à citer avec ses hypothèses) et qu'elles ont la même limite c .
4. En utilisant le théorème « image d'une suite convergente » du paragraphe 5, montrer que $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$, et conclure.
5. Où, très exactement, la continuité de f a-t-elle servi ? Et où la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (via le théorème de la limite monotone) se cache-t-elle ?

EXERCICE 28 · APR-F1-28

★★★★★ ☆ ⌂

Baritomba, 2005 : la table bancaire, démontrée

Une table carrée boite sur un sol irrégulier : trois pieds touchent, le quatrième flotte. Le théorème (prouvé rigoureusement par Baritomba, Löwen, Polster et Ross en 2005) affirme qu'une rotation sur place suffit à la stabiliser. En voici la version guidée, sous hypothèses simplifiées : la table est carrée à pieds égaux, elle tourne autour de la verticale de son centre, et le sol est continu et assez peu pentu pour qu'à tout angle θ on puisse poser trois pieds au sol, le pied restant, toujours le même couple diagonal, flottant à une hauteur algébrique $g(\theta)$ (négative si, pour poser ce pied, il faudrait enfoncer la table). On **admet** que g est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.



vue de dessus : après un quart de tour, la diagonale AC prend la place de BD

1. Expliquer pourquoi stabiliser la table, c'est résoudre $g(\theta) = 0$.
2. Après un quart de tour, les deux diagonales du carré ont échangé leurs positions. En déduire, par un argument de symétrie à rédiger soigneusement, que $g(0)$ et $g(\frac{\pi}{2})$ sont de signes contraires (ou que l'un des deux est nul).
3. Conclure avec le théorème adapté, en citant toutes ses hypothèses.
4. Discuter : parmi nos hypothèses, lesquelles excluent des sols réels ? (Les auteurs de 2005 démontrent le théorème pour des pentes allant jusqu'à 35 degrés ; une marche d'escalier, elle, reste fatale.)

VIII. PYTHON, LE LABORATOIRE

↔ s'appuie sur COURS F1, § 6.1 · la dichotomie instrumentée, et un microscope

EXERCICE 29 · SYN-F1-29



La dichotomie au compteur

Le cours donne une fonction `dichotomie(f, a, b, eps)`. On veut la munir d'un compteur d'étapes pour vérifier expérimentalement la loi des 3,32 étapes par décimale.

```

1 def dichotomie_compteur(f, a, b, eps):
2     n = 0
3     while b - a > eps:
4         m = (a + b) / 2
5         if f(a) * f(m) <= 0:
6             b = m
7         else:
8             a = m
9             n = n + 1
10    return (a + b) / 2, n
11
12 f = lambda x: x**3 + 2*x**2 + 10*x - 20    # l'equation de Fibonacci

```

1. Faire tourner ce script pour eps valant 10^{-1} , 10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-9} , 10^{-12} , sur $[1; 2]$, et consigner le nombre d'étapes dans un tableau.
2. Vos comptes doivent être 4, 10, 20, 30 et 40 étapes. Expliquer ces valeurs par un calcul exact (chercher le plus petit n tel que $2^n > 10^k$).

- Combien d'étapes *par décimale gagnée* ? Confronter à la valeur $\log_2(10) \approx 3,32$ du cours.
- Modifier le script pour qu'il affiche, à chaque étape, l'intervalle courant. La valeur historique de Fibonacci, 1,3688081075, finit par **sortir** des intervalles emboîtés : à partir de quelle étape ? Qu'est-ce que cela révèle sur la précision réelle de l'approximation de 1225, et pourquoi n'est-ce pas contradictoire avec ses neuf décimales exactes ?

EXERCICE 30 · SYN-F1-30

★★★ ♦ ⌚

Le microscope à monstres

Les Coulisses racontent la fonction de Weierstrass, continue partout et dérivable nulle part. Ce laboratoire la met sous le microscope. On trace ses sommes partielles : pour $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $W_N(x) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(3^n \pi x)$.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def W(x, N):
5     return sum(0.5**n * np.cos(3**n * np.pi * x) for n in range(N + 1))
6
7 x = np.linspace(-1, 1, 20000)
8 plt.plot(x, W(x, 8))
9 plt.show()
```

- Tracer W_N pour $N = 0, 2, 5, 8$: que fait chaque terme supplémentaire ?
- Zoomer d'un facteur 10 : remplacer l'intervalle par $[0,30; 0,32]$ (adapter `linspace`), puis zoomer encore. La courbe se « lisse »-t-elle, comme le ferait une parabole sous zoom ?
- Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, |W_8(x)| \leq 2$ (majorer chaque terme, puis sommer : on retrouve une somme géométrique du chapitre A1, de somme totale < 2).
- ★ Pourquoi ce procédé de tracé ne pourra-t-il jamais montrer la vraie W ? Formuler la réponse avec le vocabulaire du chapitre : que faudrait-il faire « passer à la limite » ?

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, les réponses aux défis étoilés, les scripts complets du laboratoire et le zoom sans fond dans la fonction de Weierstrass vous attendent sur le compagne numérique.