



F2. COMPLÉMENTS DE DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

La pente dit où l'on va, la courbure dit comment on tourne

TABLE DES MATIÈRES

	3.2. Le regard des pentes $\star$	8
	3.3. Le regard du calcul : les caractérisations . .	9
	4. LA COURBE AU-DESSUS DE SES TANGENTES	10
1. LA CHAÎNE DES VARIATIONS	2	4.1. La démonstration du chapitre
1.1. Composer, c'est enchaîner.	2	4.2. La machine à inégalités
1.2. Le facteur de zoom	3	4.3. Le rendez-vous de Rolle $\star$
1.3. Les quatre formes du quotidien	3	5. LE POINT D'INFLEXION
2. LA DÉRIVÉE DE LA DÉRIVÉE	5	14
2.1. Un geste tout simple	5	5.1. Là où le monde change de côté
2.2. Ce que la pente ne voit pas	6	5.2. L'inflexion comme événement
2.3. La lecture cinématique.	6	5.3. La courbure des routes.
3. CONVEXITÉ : TROIS REGARDS SUR UNE MÊME		6. LE LABORATOIRE : LA CORDE QUI CHERCHE UNE
IDÉE	7	RACINE
3.1. Le regard des cordes	7	16
		VOIR LA COURBURE
		18

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Les mathématiciens estiment l'argent à proportion de sa quantité, et les hommes de bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. »

Gabriel Cramer, lettre à Nicolas Bernoulli, 1728

Deux jeunes entreprises publient leurs chiffres. Toutes deux partent de zéro, toutes deux atteignent le même palier quatre ans plus tard, et leurs deux courbes de croissance *montent sans jamais redescendre*. Dressez leurs tableaux de variations : ils sont **identiques**, flèche pour flèche. Et pourtant les deux histoires n'ont rien de commun. La première a explosé au départ puis s'est essoufflée ; la seconde a longtemps végété avant de décoller. Tout investisseur voudrait les distinguer, et l'outil roi du chapitre F1, le tableau de variations, est *aveugle* à cette différence.

Il manque un instrument. La dérivée f' mesure la **pen**te : elle dit si l'on monte. Elle ne dit pas si la montée s'amplifie ou s'épuise, si la courbe s'incurve vers le haut ou vers le bas : elle ne voit pas la **cour**bure. Ce chapitre construit l'instrument qui la voit, et il tient en un geste d'une simplicité désarmante : *dérivée la dérivée*. De ce geste sortiront une notion géométrique, la **conv**exité, un point remarquable, le **point d'inflexion**, et une moisson d'inégalités qui rendront des services jusqu'au bac et bien au-delà.

Il nous faudra d'abord compléter la boîte à outils du calcul : savoir dériver une **fonction composée**, ces fonctions en poupées russes comme $x \mapsto \sqrt{1 + e^{2x}}$ que la classe de première laissait de côté. Et à la fin du chapitre, une promesse ancienne sera tenue : un théorème laissé en attente au chapitre F1 y trouvera enfin sa maison.

À la fin du dix-neuvième siècle, Antoni Gaudí conçoit ses églises à l'envers : des chaînettes lestées, suspendues au-dessus d'un miroir. La chaîne pend en traction pure ; renversée, elle devient un arc en compression pure. Lire une courbure, c'est déjà construire.

Gaudí · Colònia Güell

← PRÉREQUIS

F1 · Dérivation

La dérivabilité, l'équation de tangente $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et le lien admis entre signe de f' et variations (chapitre F1 et classe de première) sont supposés acquis.

1. LA CHAÎNE DES VARIATIONS

1.1. Composer, c'est enchaîner

Le chapitre F1 a appris à composer des *limites* : pour trouver la limite de $\sqrt{4 + \frac{1}{x}}$, on suit la chaîne, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ puis $\sqrt{4 + X} \rightarrow 2$. La même chaîne se dérive. Rappelons d'abord l'objet.

DÉFINITION – FONCTION COMPOSÉE

Soient u définie sur un intervalle I et v définie sur un intervalle J , avec $u(I) \subseteq J$ (toute sortie de u est une entrée légitime de v). La **composée** de u suivie de v est la fonction notée $v \circ u$, définie par :

$$\forall x \in I, \quad (v \circ u)(x) = v(u(x)).$$

Exemple – Démonter une poupée russe

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$. C'est la composée $h = v \circ u$ avec

$$\begin{aligned} u : x &\mapsto 1 + e^{2x} && \text{(couche intérieure),} \\ v : X &\mapsto \sqrt{X} && \text{(couche extérieure).} \end{aligned}$$

OBJECTIFS

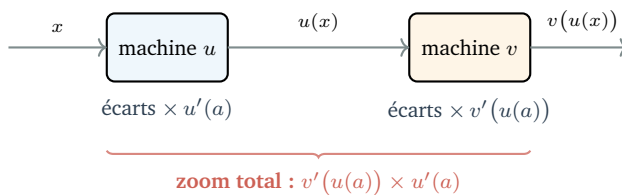
- ▷ Reconnaître une composée $v \circ u$
- ▷ Dériver une composée
- ▷ Mobiliser les quatre formes usuelles

Composée : La notation $v \circ u$ se lit « v rond u » : u agit d'abord, v ensuite, et l'ordre compte. La notation $f(x)$ est d'Euler (1734) ; le petit rond, lui, ne s'est imposé qu'au vingtième siècle.

La condition de composition est remplie : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 1 + e^{2x} > 1 > 0$, donc $u(\mathbb{R}) \subseteq]0; +\infty[$, domaine où la racine est définie (et dérivable). Remarquez que u est elle-même une composée : les poupées s'emboîtent autant qu'on veut.

1.2. Le facteur de zoom

Comment la chaîne se dérive-t-elle ? L'intuition tient dans une image : **une dérivée est un facteur d'agrandissement local**. Dire que $u'(a) = 3$, c'est dire qu'autour de a , la machine u étire les petits écarts d'un facteur 3 : si x s'écarte de a d'un petit h , alors $u(x)$ s'écarte de $u(a)$ d'environ $3h$. Enchaînons deux machines : la première étire les écarts d'un facteur $u'(a)$, la seconde étire ce qu'elle reçoit d'un facteur $v'(u(a))$, mesuré là où elle travaille, c'est-à-dire en $u(a)$. Deux zooms successifs se multiplient :



Un écart h en entrée devient environ $u'(a)h$ après la première machine, puis $v'(u(a)) \times u'(a)h$ après la seconde. Le taux d'accroissement total est le produit des taux : c'est toute l'idée de la preuve.

THÉORÈME – DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

Soient u dérivable sur un intervalle I et v dérivable sur un intervalle J , avec $u(I) \subseteq J$. Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Résultat admis en classe ; l'idée de la démonstration est en marge, et le parcours $\star$ en trouvera la preuve complète en fin de paragraphe.

Leibniz utilise cette règle dès 1676, dans un mémoire, pour dériver une racine composée : avec une erreur de signe. L'Hôpital s'en sert sans l'énoncer, Euler la pratique en virtuose sans jamais l'ériger en règle, et il faut attendre Lagrange, en 1797, pour lire son premier énoncé explicite.

Leibniz · Lagrange

1.3. Les quatre formes du quotient

Quatre cas particuliers couvrent la quasi-totalité des besoins de terminale. Dans chacun, u est dérivable sur l'intervalle I considéré.

PROPRIÉTÉ – FORMES USUELLES DE DÉRIVATION COMPOSÉE

fonction	dérivée	conditions sur I
$u^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$n u' u^{n-1}$	aucune condition supplémentaire
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
e^u	$u' e^u$	aucune condition supplémentaire

Chaque ligne s'obtient en prenant pour v la fonction de référence correspondante dans le théorème.

MÉTHODE – DÉRIVER UNE COMPOSÉE SANS SE PERDRE

- ▷ **1. Nommer les couches.** Identifier la couche extérieure v (la dernière opération que l'on ferait à la calculatrice) et la couche intérieure u .
- ▷ **2. Vérifier le permis.** Justifier la dérivabilité : u dérivable sur I , v dérivable là où u envoie I (racine : $u > 0$; inverse : $u \neq 0$).
- ▷ **3. Dériver de l'extérieur vers l'intérieur.** Écrire $v'(u(x))$, puis multiplier par $u'(x)$: le zoom extérieur d'abord, le zoom intérieur ensuite.

Exemple – Trois poupées à démonter

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (3x^2 + 1)^4$. C'est u^4 avec $u(x) = 3x^2 + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \times 6x \times (3x^2 + 1)^3 = 24x(3x^2 + 1)^3.$$

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$. C'est e^u avec $u(x) = -x^2$. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2xe^{-x^2}$: positive avant 0, négative après, la célèbre courbe en cloche monte puis descend.

3. Reprenons $h : x \mapsto \sqrt{1 + e^{2x}}$. La couche intérieure $u(x) = 1 + e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et $u > 0$, permis de racine accordé), avec $u'(x) = 2e^{2x}$, elle-même obtenue en composant. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$$

Deux poupées démontées d'un seul geste : la chaîne se parcourt couche par couche, de l'extérieur vers l'intérieur.

Attention – L'erreur de substitution

La dérivée d'une composée n'est **pas** $v'(u'(x))$, ni $v'(x) \times u'(x)$. Comparez sur $f(x) = (x^2)^3 = x^6$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) : la vraie règle donne $3(x^2)^2 \times 2x = 6x^5$, conforme à la dérivée directe de x^6 . La formule fausse $v'(u'(x)) = 3(2x)^2 = 12x^2$ ne l'est pas. Le facteur v' s'évalue en $u(x)$, jamais en x ni en $u'(x)$: la seconde machine zoome là où elle travaille.

Preuve de la règle de la chaîne ★.

Le taux qui se factorise. Soit $a \in I$, et supposons d'abord que $u(x) \neq$

CAHIER DE CALCUL · fiches 8 et 9 : révisions de dérivation et gammes sur les composées. L'automatisme se gagne là, le cours ne fait qu'ouvrir la porte.

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 1-3 ★

Les gammes de la chaîne : les quatre formes usuelles, les poupées à deux étages, et le permis de dériver qu'on n'oublie plus. ■

$u(a)$ pour x proche de a , $x \neq a$. Le taux d'accroissement de $v \circ u$ en a se factorise :

$$\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x - a} = \underbrace{\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)}}_{\text{taux de } v \text{ entre } u(a) \text{ et } u(x)} \times \underbrace{\frac{u(x) - u(a)}{x - a}}_{\text{taux de } u \text{ entre } a \text{ et } x}.$$

Quand $x \rightarrow a$: le second facteur tend vers $u'(a)$ par définition. Pour le premier, u est continue en a (car dérivable, chapitre F1), donc $u(x) \rightarrow u(a)$, et le taux de v tend vers $v'(u(a))$ par composition de limites (F1, § 2). Le produit tend vers $v'(u(a)) u'(a)$.

Le point délicat. Si $u(x) = u(a)$ pour des x arbitrairement proches de a , la factorisation divise par zéro. On répare en remplaçant le taux de v par la fonction θ définie par $\theta(X) = \frac{v(X) - v(u(a))}{X - u(a)}$ si $X \neq u(a)$ et $\theta(u(a)) = v'(u(a))$: elle est continue en $u(a)$, et l'identité $v(u(x)) - v(u(a)) = \theta(u(x))(u(x) - u(a))$ vaut cette fois pour tout x . On conclut comme avant. C'est ce raccomodage que la preuve de Leibniz ignorait. ■

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 4–5 ★★

Les quatre formes démontrées une à une, puis la sous-tangente de l'exponentielle : la même longueur partout. ■ ♦

JALON

Je sais reconnaître une composée, justifier sa dérivabilité, et appliquer $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ dans les quatre formes usuelles.

2. LA DÉRIVÉE DE LA DÉRIVÉE

2.1. Un geste tout simple

La dérivée f' d'une fonction est une fonction comme une autre. Rien n'interdit de la dériver à son tour.

DÉFINITION – DÉRIVÉE SECONDE

Soit f dérivable sur un intervalle I . Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I , on dit que f est **deux fois dérivable** sur I , et la dérivée de f' est appelée **dérivée seconde** de f , notée f'' :

$$\forall x \in I, \quad f''(x) = (f')'(x).$$

Exemple – Deux fonctions qu'on reverra

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x + 6$. Polynôme, donc dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 4x^3 - 12x + 5, \quad f''(x) = 12x^2 - 12.$$

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$. On a vu $g'(x) = -2x e^{-x^2}$; ce produit se dérive (règle du produit puis composée) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x e^{-x^2}) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

PORTAIL ACT

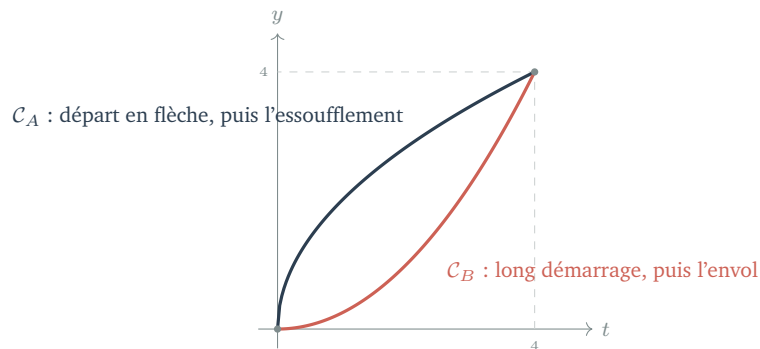
ACT-F2 · Phases 1–4 ★

La rumeur, treize jours durant : l'enquête se mène seul à la maison, et elle prépare ce paragraphe et le cinquième. ■

Retenez ces deux fonctions : elles reviendront au paragraphe 5, où leurs dérivées secondes révéleront leurs points d'inflexion.

2.2. Ce que la pente ne voit pas

Revenons aux deux entreprises de l'ouverture. Voici leurs courbes : mêmes extrémités, mêmes variations, destins opposés.

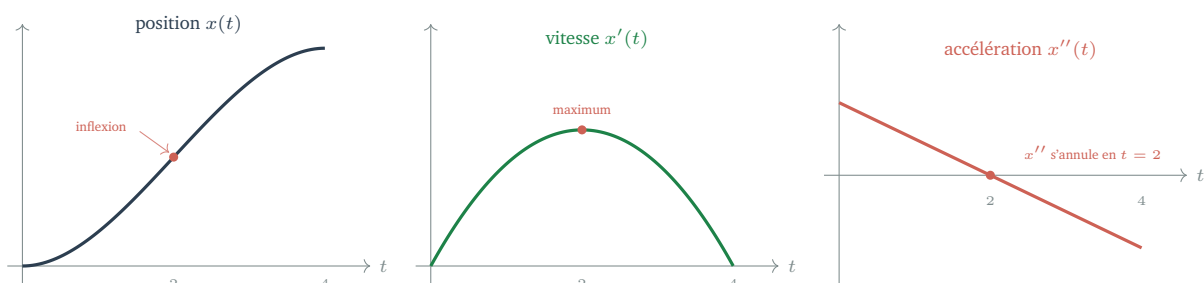


Sur $[0; 4]$, les deux fonctions sont strictement croissantes : le tableau de variations est le même (pour C_A , la dérivée vit sur $]0; 4]$: en 0 même, la pente est infinie). Ce qui les distingue est le *comportement de la pente* : sur C_A , la pente part très forte et ne cesse de diminuer (f' décroissante) ; sur C_B , la pente part nulle et ne cesse d'augmenter (f' croissante). L'instrument qui voit cela est la dérivée de f' , c'est-à-dire f'' : négative pour C_A , positive pour C_B . **La dérivée seconde mesure la variation de la pente : c'est la courbure.**

Deux courbes peuvent avoir le même tableau de variations et des géométries opposées : le tableau enregistre le signe de f' , pas son évolution. La section suivante donne un nom à cette géométrie.

2.3. La lecture cinématique

Le physicien connaît ce trio depuis Newton : si $x(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t , alors $x'(t)$ est sa **vitesse** et $x''(t)$ son **accélération**. Suivons une rame de métro automatique entre deux stations, dont la position est modélisée par : $\forall t \in [0; 4], x(t) = 6t^2 - t^3$ (en unités convenablement choisies).



La rame accélère pendant deux secondes ($x'' > 0$: la courbe de position s'incurve vers le haut), puis freine jusqu'à l'arrêt ($x'' < 0$: elle s'incurve vers le bas). À l'instant $t = 2$ exactement, l'accélération s'annule en changeant de signe : c'est là que la vitesse est **maximale** ($x'(2) = 12$), et là que la courbe de position change de courbure. Ce point charnière porte un nom,

Les Principia de Newton (1687) placent l'accélération au cœur de la mécanique : la force ne crée pas la vitesse, mais son changement. La notation f'' à deux primes viendra de Lagrange, en 1797, dans le traité même qui énonce enfin la règle de la chaîne du paragraphe 1.

le point d'inflexion, et le paragraphe 5 lui est consacré. Retenez déjà la lecture physique : **le point d'inflexion de la position est un extremum de la vitesse**, ici son maximum, puisque x'' y passe du positif au négatif.

Attention – Ce que f'' ne dit pas

Le signe de f'' ne renseigne ni sur le signe de f , ni sur ses variations. La fonction carré ($x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$) a $f'' = 2 > 0$ partout : elle décroît pourtant sur $]-\infty; 0]$, et prend des valeurs aussi bien nulles que positives. Trois étages, trois informations : f dit la *hauteur*, f' dit la *pente*, f'' dit la *courbure*. Aucun étage ne parle pour un autre.

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 6–8 ★★

Le second étage : la dérivée seconde en gammes, le drone sur son rail, et le jeu d'appariement entre une courbe, sa pente et sa courbure. ■ ◆

JALON

Je sais calculer f'' , l'interpréter comme l'accélération, et expliquer pourquoi deux courbes de même tableau de variations peuvent différer.

3. CONVEXITÉ : TROIS REGARDS SUR UNE MÊME IDÉE

3.1. Le regard des cordes

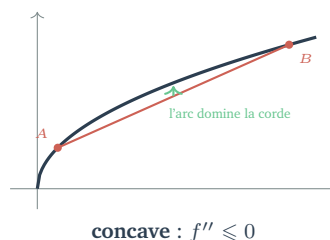
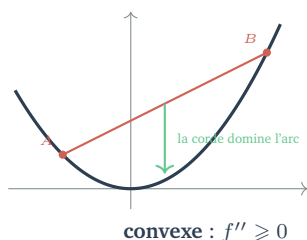
Donnons un nom à la géométrie découverte au paragraphe précédent. La définition officielle ne parle ni de dérivée ni de courbure : elle ne demande qu'une règle et un crayon.

DÉFINITION – FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

Soit f définie sur un intervalle I . On dit que f est **convexe** sur I lorsque, pour tous points A et B de sa courbe, le segment $[AB]$ (la **corde**) est situé au-dessus de l'arc de courbe qu'il sous-tend. Analytiquement :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0; 1], \quad f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Autrement dit : quand x parcourt le segment $[a; b]$, la valeur $f(x)$ reste sous la valeur lue sur la corde à la même abscisse. On dit que f est **concave** lorsque l'inégalité est renversée (les cordes sont sous l'arc), c'est-à-dire lorsque $-f$ est convexe.



Remarque – Les deux à la fois

Une fonction affine ($x \mapsto mx + p$ sur $\mathbb{R}$) est à la fois convexe et concave : chaque corde est confondue avec l'arc, les deux inégalités sont des égalités.

OBJECTIFS

- ▷ Définir la convexité par les cordes
- ▷ La caractériser par f' puis f''
- ▷ Passer d'un regard à l'autre

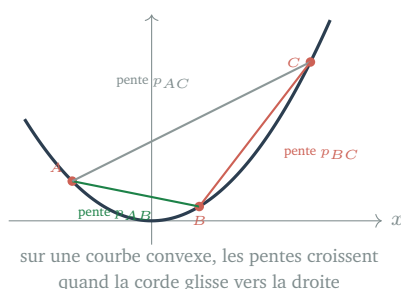
Convexe : Du latin convexus, voûté. Le bol vu de l'intérieur est convexe, le dôme vu de dessous est concave : la courbe convexe « tient l'eau ». La théorie de ces fonctions ne naît qu'en 1906, chez Johan Jensen, ingénieur des téléphones de Copenhague.

Le point $(1-t)a + tb$ balaie le segment $[a; b]$ quand t va de 0 à 1 : c'est le curseur. Au numérateur de la corde, les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ sont mélangées dans les mêmes proportions. Pour $t = \frac{1}{2}$: le milieu.

Ce sont les seules fonctions dans ce cas, et c'est cohérent avec le regard de la courbure : leur dérivée seconde est nulle partout. Une droite ne tourne pas.

3.2. Le regard des pentes ★

Entre les cordes (géométrie pure) et la dérivée seconde (calcul), il existe un pont, et ce pont est une inégalité d'une élégance rare. Prenez trois points $a < b < c$ dans I et regardez les trois cordes qu'ils déterminent.



PROPRIÉTÉ – INÉGALITÉ DES TROIS PENTES ★

Soit f convexe sur I . Alors, pour tous $a < b < c$ dans I :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Les pentes des cordes issues d'un point croissent quand l'autre extrémité se déplace vers la droite.

Par le jeu du curseur ★.

Écrire b comme un mélange. Posons $t = \frac{b - a}{c - a}$: comme $a < b < c$, on a $t \in]0; 1[$, et un calcul direct donne $b = (1 - t)a + tc$. La convexité appliquée aux points a et c avec ce t fournit :

$$f(b) \leq (1 - t)f(a) + tf(c).$$

Première pente. Retranchons $f(a)$ des deux côtés : $f(b) - f(a) \leq t(f(c) - f(a))$. Or $b - a = t(c - a) > 0$: en divisant par $b - a$, il vient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{t(f(c) - f(a))}{t(c - a)} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Seconde pente. Retranchons cette fois l'inégalité de convexité à $f(c)$: $f(c) - f(b) \geq (1 - t)(f(c) - f(a))$. Or $c - b = (1 - t)(c - a) > 0$: en divisant par $c - b$, strictement positif, l'inégalité conservée donne $\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$. Les deux encadrements mis bout à bout concluent. ■

Ce lemme est l'outil qui prouve l'équivalence admise ci-dessous : si les pentes croissent de gauche à droite, la pente limite en un point, c'est-à-dire f' , ne peut que croître aussi. La réciproque se montre avec le théorème des accroissements finis du paragraphe 4.

3.3. Le regard du calcul : les caractérisations

Pour une fonction dérivable, les regards coïncident, et le calcul de f'' s'y joint dès que la dérivée seconde existe. C'est le théorème central du chapitre.

THÉORÈME – CARACTÉRISATIONS DE LA CONVEXITÉ

Soit f dérivable sur un intervalle I . Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I ;
2. f' est croissante sur I .

Si de plus f est **deux fois** dérivable sur I , elles équivalent à une troisième : $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.

Énoncé analogue pour la concavité, avec f' décroissante et $f'' \leq 0$. L'équivalence entre 1 et 2 est admise (l'aller est esquissé en marge) ; celle avec la troisième est le lien entre monotonie et signe de la dérivée, appliqué à la fonction f' .

Exemple – Le bol, le dôme et l'exponentielle

Le carré. La fonction carré est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2)'' = 2 > 0$: la parabole est convexe, comme chaque corde le confirme.

La racine. La fonction racine est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ puis $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$: la racine est concave, son élan s'épuise.

L'exponentielle. Sur $\mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (e^x)'' = e^x > 0$: convexe, et même deux fois pour le prix d'un, puisque sa dérivée seconde est elle-même. L'inverse complète la galerie : $\forall x \in]0; +\infty[, (\frac{1}{x})'' = \frac{2}{x^3} > 0$, convexe.

Exemple – Une étude de convexité complète

Reprenons f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x + 6$, dont le paragraphe 2 a calculé $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$. Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines -1 et 1 , négatif entre elles :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
signe de $f''(x)$	+	0	–	0	+
géométrie de $\mathcal{C}_f$	convexe	•	concave	•	convexe

Donc f est convexe sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$, concave sur $[-1; 1]$. Aux deux jonctions, la courbure change de sens : les points $(-1; f(-1)) = (-1; -4)$ et $(1; f(1)) = (1; 6)$ sont les *points d'inflexion* que le paragraphe 5 étudiera de plein droit.

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 9–12 ★★

Les trois regards à l'épreuve : lire une courbure, la batterie de tableaux de signes, une convexité prouvée sans dérivée, et le tribunal des affirmations. ■ ◆ ★

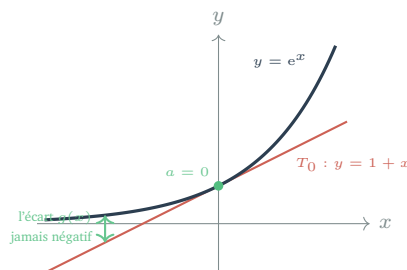
JALON

Je sais définir la convexité par les cordes, la caractériser par la croissance de f' ou le signe de f'' , et mener une étude de convexité complète.

4. LA COURBE AU-DESSUS DE SES TANGENTES

4.1. La démonstration du chapitre

Les cordes dominent l'arc, les pentes croissent : il reste un troisième acteur géométrique, la tangente. Pour une fonction convexe, elle passe *sous* la courbe, et cette fois, le programme demande la preuve. La voici, c'est la démonstration exigible du chapitre.



OBJECTIFS

- ▷ Démontrer la position tangente-courbe
- ▷ En tirer des inégalités
- ▷ Tenir le rendez-vous de Rolle ★

THÉORÈME – POSITION D'UNE COURBE CONVEXE ET DE SES TANGENTES – DÉMONSTRATION EXIGIBLE

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I , telle que : $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$. Alors la courbe de f est située **au-dessus de chacune de ses tangentes** :

$$\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour une fonction concave ($f'' \leq 0$), la courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes.

La fonction écart ♦.

Étape 1 : poser l'écart. Fixons $a \in I$ et mesurons l'écart vertical entre la courbe et la tangente T_a : soit g définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad g(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)].$$

Montrer le théorème revient à montrer que g est positive sur I .

Étape 2 : dériver l'écart. La fonction g est dérivable sur I comme différence de f et d'une fonction affine, et :

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Étape 3 : le signe de g' , offert par la convexité. Par hypothèse $f'' \geq 0$ sur I , donc f' est croissante sur I (caractérisation du paragraphe 3). Par croissance de f' : si $x \leq a$ alors $f'(x) \leq f'(a)$, donc $g'(x) \leq 0$; si $x \geq a$ alors $g'(x) \geq 0$.

Étape 4 : conclure par les variations de g . La fonction g est donc décroissante sur $I \cap]-\infty; a]$ puis croissante sur $I \cap [a; +\infty[$: elle atteint en a son **minimum** sur I . Or $g(a) = f(a) - f(a) = 0$. Il

s'ensuit :

$$\forall x \in I, g(x) \geq g(a) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a).$$

L'architecture de cette preuve, une fonction auxiliaire dont la dérivée contrôle le signe, est celle déjà rencontrée dans la démonstration des croissances comparées au chapitre F1. Une même stratégie, deux théorèmes : c'est un patron à retenir, pas une astuce.

4.2. La machine à inégalités

Ce théorème n'est pas une curiosité de géomètre : c'est une **usine à inégalités**. Choisissez une fonction convexe, choisissez un point de tangence, tournez la manivelle.

Exemple – L'inégalité de Bernoulli, revue d'en haut

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. La fonction g_n définie sur $[-1; +\infty[$ par : $\forall x \in [-1; +\infty[, g_n(x) = (1+x)^n$ est deux fois dérivable (composée d'une affine et d'une puissance), et

$$\forall x \in [-1; +\infty[, \quad g_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0$$

(expression licite jusqu'en -1 puisque $n \geq 2$). Donc g_n est convexe sur $[-1; +\infty[$, et sa courbe domine sa tangente en 0, qui a pour équation $y = g_n(0) + g_n'(0)x = 1 + nx$. La manivelle tourne, l'inégalité tombe :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx}$$

(les cas $n = 0$ et $n = 1$ étant des égalités immédiates). Vous avez déjà rencontré cette inégalité : démontrée par récurrence dans l'Atelier du chapitre A0 pour des x strictement positifs, elle a servi au chapitre A1 à établir que $q^n \rightarrow +\infty$ pour $q > 1$. La revoici sans récurrence, en deux lignes, étendue d'un coup à tout $x \geq -1$: la simple position d'une parabole généralisée au-dessus d'une de ses tangentes. Monter d'un étage change le paysage.

Autre pièce célèbre de l'usine, déjà utilisée dans le cours F1 (§ 4, au cœur de la preuve des croissances comparées) : la convexité de l'exponentielle et sa tangente en 0 donnent $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. C'est la figure d'ouverture de cette section.

Les cordes produisent leurs propres inégalités, tout aussi précieuses : en prenant $t = \frac{1}{2}$ dans la définition, la valeur de f au milieu de $[a; b]$ est dominée par la moyenne des valeurs aux bornes.

PROPRIÉTÉ – MILIEUX ET MOYENNES

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (\text{convexité du carré}),$$

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} \quad (\text{concavité de la racine}).$$

Dans les deux cas, l'égalité a lieu si et seulement si $a = b$: la corde ne touche l'arc qu'à ses extrémités. La racine, concave sur $]0; +\infty[$, reste au-dessus de ses cordes jusqu'en 0 par continuité.

Ces inégalités de moyennes ne sont pas un jeu formel. En 1728, le Genevois Gabriel Cramer écrit à Nicolas Bernoulli que la valeur d'un gain croît comme sa racine carrée : *concavement*, chaque ducat supplémentaire comptant un peu moins que le précédent. C'est l'épigraphe de ce chapitre, et l'acte de naissance de la concavité en économie ; le Compagnon Numérique raconte le paradoxe qui a provoqué cette lettre.

L'inégalité de Jensen, cas discret ★.

La corde traite deux points ; la récurrence du chapitre A0 en traite autant qu'on veut. Montrons que pour f convexe sur I et pour tout $n \geq 2$:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Initialisation ($n = 2$) : c'est la définition de la convexité avec $t = \frac{1}{2}$.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n , et donnons-nous $x_1, \dots, x_{n+1}$ dans I . Notons $m = \frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1}$ la moyenne cherchée et $m' = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ celle des n premiers termes, qui appartient à I comme moyenne de n points de l'intervalle I . L'astuce est d'écrire m comme un mélange de m' et de x_{n+1} :

$$m = \frac{n m' + x_{n+1}}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) m' + \frac{1}{n+1} x_{n+1},$$

c'est-à-dire le point de curseur $t = \frac{1}{n+1}$ entre m' et x_{n+1} , tous deux dans I . La convexité donne alors $f(m) \leq \frac{n}{n+1} f(m') + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1})$, et l'hypothèse de récurrence majore $f(m')$ par la moyenne des $f(x_i)$:

$$f(m) \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} + \frac{f(x_{n+1})}{n+1},$$

et le membre de droite vaut exactement $\frac{f(x_1) + \dots + f(x_{n+1})}{n+1}$: l'hérédité est acquise.

Conclusion. Par le principe de récurrence, la propriété vaut pour tout $n \geq 2$. Une seule corde, itérée, domine tous les barycentres : appliquée à des fonctions bien choisies, cette inégalité engendre la majorité des inégalités classiques des concours. ■

4.3. Le rendez-vous de Rolle ★

Les Coulisses du chapitre F1 ont raconté Michel Rolle, sa méthode des cascades, et promis que son théorème trouverait ici « sa vraie maison ». Tenons parole. Tout ce paragraphe est hors programme, mais il soutient l'édifice entier : c'est lui qui prouve le lien, admis depuis la première, entre signe de f' et variations.

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 13–17 ★★

La manivelle à inégalités : position tangente-courbe, la ROC en miroir, la famille e^{kx} contre ses cordes, et Jensen mis au travail. ■ ♦ ★

THÉORÈME – THÉORÈME DE ROLLE ★

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Partir et arriver à la même altitude force un sommet ou un creux, donc une tangente horizontale. Penchez maintenant le tableau : si les altitudes de départ et d'arrivée diffèrent, la tangente forcée n'est plus horizontale, elle est *parallèle à la corde*.

THÉORÈME – THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS ★

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Quelque part entre a et b , la vitesse instantanée égale la vitesse moyenne.

L'idée de la preuve : f , continue sur un segment, atteint un maximum et un minimum ; si les deux étaient aux bornes, f serait constante (et tout c conviendrait) ; sinon un extremum vit à l'intérieur, et en un extremum intérieur d'une fonction dérivable, la tangente est horizontale.

De Rolle aux accroissements finis ★.

Redresser la corde. Soit φ la fonction qui mesure l'écart entre f et la corde :

$$\forall x \in [a; b], \quad \varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Elle est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ (différence de f et d'une affine), et un calcul direct donne $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 0$.

Appliquer Rolle. Les hypothèses du théorème de Rolle sont réunies pour φ : il existe donc $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, ce qui est l'égalité annoncée.

La récolte. Supposons $f' \geq 0$ sur un intervalle I , et soient $x_1 < x_2$ dans I . Le théorème appliqué sur $[x_1; x_2]$ fournit c tel que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) (x_2 - x_1) \geq 0 :$$

la fonction est croissante. Le grand théorème de la classe de première, « $f' \geq 0$ entraîne f croissante », admis depuis toujours, vient d'être ramené en trois lignes au théorème de Rolle. Et avec lui tout ce chapitre : la caractérisation de la convexité du paragraphe 3 reposait sur ce lien. La promesse des Coulisses F1 est tenue, et la boucle logique du chapitre est fermée. ■

CIBLE DA

DM-F2.1 · Parties I-V ★★

La chaîne et l'arc : pourquoi un fil qui pend n'est pas une parabole, de la lettre de Huygens à Gateway Arch. ♦

JALON

Je sais démontrer qu'une courbe convexe domine ses tangentes, et en tirer une inégalité en choisissant la fonction et le point de tangence.

5. LE POINT D'INFLEXION

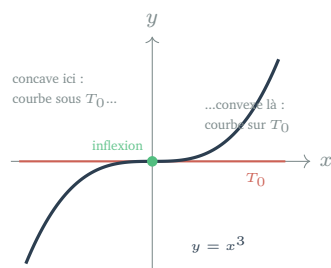
5.1. Là où le monde change de côté

La rame de métro du paragraphe 2 a déjà traversé l'instant que nous étudions ici : à $t = 2$, elle montait avant, elle monte encore après. Ce qui a basculé, ce n'est pas le sens de la marche, c'est la *façon* de monter. Donnons un nom à ce point de bascule.

DÉFINITION – POINT D'INFLEXION

Soit f définie sur un intervalle I et a un point intérieur à I . Le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque la convexité y change de sens : il existe $\alpha > 0$, avec $[a - \alpha; a + \alpha] \subseteq I$, tel que f soit convexe sur $[a - \alpha; a]$ et concave sur $[a; a + \alpha]$, ou l'inverse.

Géométriquement, pour une fonction dérivable, le point d'inflexion a une signature spectaculaire : **la tangente y traverse la courbe** en son point de contact, ce qu'elle ne fait nulle part ailleurs. Partout ailleurs sur une zone convexe, la courbe reste au-dessus de sa tangente au voisinage du contact (paragraphe 4) ; sur une zone concave, au-dessous. Au point de bascule, la tangente sépare : courbe au-dessous d'un côté, au-dessus de l'autre.



OBJECTIFS

- ▷ Définir un point d'inflexion
- ▷ Le détecter par f''
- ▷ Le lire dans le monde réel

Inflexion : Du latin *inflectere*, courber; *infléchir*. Le mot est passé dans la langue courante : une « *inflexion de politique* » n'est pas un revirement, c'est un changement de courbure du discours.

PROPRIÉTÉ – DÉTECTION PAR LA DÉRIVÉE SECONDE

Soit f deux fois dérivable sur I et a intérieur à I . Si f'' **s'annule en changeant de signe** en a , alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Attention – $f''(a) = 0$ ne suffit pas

L'annulation seule ne fait pas l'inflexion : il faut le *changement de signe*. Contre-exemple obligatoire, la fonction $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$: sa dérivée seconde, $x \mapsto 12x^2$, s'annule en 0 mais reste positive des deux côtés. La courbe est convexe sur $\mathbb{R}$ tout entier, aucune inflexion en 0 : le zéro de f'' y est un simple point de tangence avec l'axe, pas une bascule. Réflexe à automatiser : annoncer une inflexion, c'est exhiber le tableau de signes de f'' , jamais sa seule annulation.

Exemple – La cloche et ses épaules

Reprenons $g : x \mapsto e^{-x^2}$ (sur $\mathbb{R}$), dont le paragraphe 2 a calculé $g''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Comme $e^{-x^2} > 0$ pour tout réel x , le signe de g'' est celui de $4x^2 - 2$, trinôme négatif entre ses racines $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$: la cloche est concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (le dôme du sommet) et convexe à l'extérieur (les jupes évasées). Deux points d'inflexion en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,71$: les « épaules » de la courbe en cloche, exactement là où, en statistiques, la cloche de Gauss place son écart type.

5.2. L'inflexion comme événement

Dans le monde réel, un point d'inflexion est rarement une curiosité géométrique : c'est un **événement**, le moment précis où une croissance cesse de s'amplifier et commence à s'épuiser. L'exemple canonique est la croissance *logistique*, celle d'une épidémie, d'une rumeur ou d'un produit qui sature son marché.

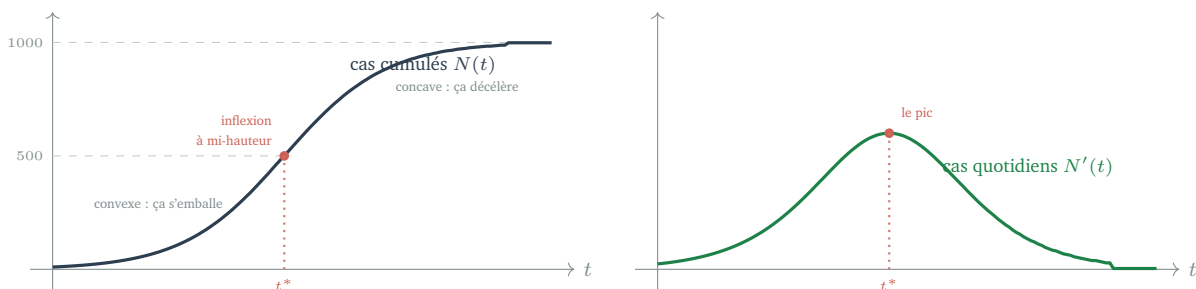
Exemple – La courbe en S

Une maladie se propage dans une population de 1000 individus. Le nombre de cas cumulés au jour t est modélisé par :

$$\forall t \geq 0, \quad N(t) = \frac{1000}{1 + 99e^{-0,6t}}.$$

Composées et quotient : N est deux fois dérivable, et le calcul (guidé à l'Atelier) montre que N'' s'annule en changeant de signe à l'instant $t^* = \frac{\ln 99}{0,6} \approx 7,66$ où $N(t^*) = 500$, la **mi-hauteur** exactement. Avant t^* , N est convexe : chaque jour apporte plus de cas que la veille, la croissance s'emballe. Après, N est concave : l'épidémie progresse encore, mais en décélérant.

L'écriture $\frac{\ln 99}{0,6}$ anticipe d'un chapitre : le logarithme, réciproque de l'exponentielle, sera construit en F3. Ici, une valeur approchée suffit, et la calculatrice la donne.



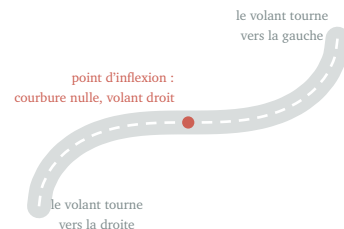
Les deux graphiques racontent le même instant t^* vu de deux étages : quand le cumul passe du convexe au concave, **son point d'inflexion est le pic du quotidien**. C'est la traduction mathématique d'une phrase entendue à chaque épidémie, « le pic est passé » : les cas s'accumulent toujours, mais la courbe des cas *quotidiens* redescend, car le cumul est passé en régime concave. Même lecture pour la diffusion d'un smartphone ou d'un réseau social : l'inflexion des ventes cumulées marque le pic du rythme des ventes, et le passage du marché des pionniers au marché de masse.

5.3. La courbure des routes

Terminons la visite par un endroit où la courbure se ressent dans le corps : une route. Ligne droite, puis virage circulaire ? Impossible de raccorder directement : sur la droite, la courbure vaut 0 ; sur le cercle, elle vaut une constante non nulle. Un raccord direct imposerait un *saut* de courbure, donc un coup de volant instantané et une secousse latérale (les passagers debout du métro la connaissent bien). Les ingénieurs insèrent entre les deux une **courbe de transition** dont la courbure varie continûment de zéro à la valeur du virage.

CONTEXTE HISTORIQUE – LA CLOTHOÏDE, OU LA COURBE DES QUATRE DÉCOUVREURS

La courbe de transition idéale porte la signature de quatre époques. **Euler** établit ses équations au dix-huitième siècle, en étudiant un ressort spiral : la « spirale d'Euler ». **Fresnel** puis **Cornu** la redécouvrent au dix-neuvième, en optique, dans l'étude de la diffraction de la lumière. En 1891, l'ingénieur américain **Arthur Talbot** la décrit pour les chemins de fer, avant de lui consacrer en 1899 un traité entier : c'est la « courbe de raccordement ferroviaire », la même à une notation près. Sa propriété définissante est taillée pour notre chapitre : *sa courbure est proportionnelle à la distance parcourue depuis son point d'inflexion*. Le conducteur qui la suit à vitesse constante tourne son volant à vitesse constante : aucune secousse. Ironie de l'histoire : la courbe étant pénible à calculer à la main, sa généralisation dans les tracés routiers a dû attendre les tables spécialisées puis l'ordinateur, bien après sa découverte.



Le S d'une route de montagne est donc un théorème en asphalte : entre deux virages de sens contraires, la courbure doit passer par zéro, et l'endroit où elle s'annule en changeant de signe, l'instant où le volant est parfaitement droit, est très exactement un point d'inflexion. Vous en traversez plusieurs à chaque trajet en car.

CAHIER DE CALCUL · fiche 10 :
convexité et points d'inflexion, la
gamme complète des tableaux de
signes de f'' .

6. LE LABORATOIRE : LA CORDE QUI CHERCHE UNE RACINE

Le chapitre F1 s'est clos sur une équation sans formule, $x^5 - x - 1 = 0$, et sur la dichotomie qui l'approche en coupant des intervalles. Ses Coulisses ont chronométré une méthode plus rapide, celle des tangentes. Il en existe

JALON

Je sais définir un point d'inflexion, le
détecter par le changement de signe
de f'' , et l'interpréter sur une situation
concrète.

OBJECTIFS

- ▷ Programmer la méthode de la sécante
- ▷ Comprendre le rôle de la convexité
- ▷ Choisir entre trois algorithmes

une troisième, la dernière du programme, et elle appartient de plein droit à ce chapitre : elle remplace la tangente par une **corde**, l'objet même qui définit la convexité.

L'idée : pour chercher un zéro de f , prendre deux points de la courbe, tracer la corde qui les joint, et regarder où cette corde coupe l'axe des abscisses. Une corde étant une droite, ce point se calcule sans peine ; on recommence avec les deux points les plus récents.

MÉTHODE – LA MÉTHODE DE LA SÉCANTE

Partant de deux valeurs distinctes x_0 et x_1 , on itère :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

qui est l'abscisse où la corde passant par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$ coupe l'axe des abscisses. L'itération n'est licite que si $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$: deux points de même hauteur donneraient une corde horizontale, sans racine à offrir. Aucune dérivée à calculer : la corde entre deux points remplace la tangente.

```
1 def secante(f, x0, x1, eps):
2     while abs(x1 - x0) > eps:
3         pas = f(x1) * (x1 - x0) / (f(x1) - f(x0))
4         x0, x1 = x1, x1 - pas
5     return x1
6
7 f = lambda x: x**5 - x - 1
8 print(secante(f, 1, 2, 1e-12))    # ~ 1.167303978
```

Joyau pour les curieux ★ : on démontre que l'ordre de convergence de la sécante est le **nombre d'or** $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Chaque itération multiplie environ par φ le nombre de décimales exactes : entre la dichotomie (ordre 1) et les tangentes (ordre 2), la corde converge au rythme doré.

Sur l'équation du chapitre F1, en partant de $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$, les erreurs successives (recalculées ; c désigne la racine cherchée) tombent ainsi :

n	2	3	4	5	6	7	8
$ x_n - c $	$1,3 \times 10^{-1}$	$1,1 \times 10^{-1}$	$3,7 \times 10^{-2}$	$8,0 \times 10^{-3}$	$5,4 \times 10^{-4}$	$8,4 \times 10^{-6}$	$8,8 \times 10^{-9}$

Sept itérations pour huit décimales, là où la dichotomie demandait dix-neuf étapes pour six : presque la vitesse des tangentes, sans jamais calculer une dérivée.

Où la convexité entre-t-elle en scène ? Elle rend la méthode *prévisible*. Sur $[1; 2]$, notre fonction est convexe ($\forall x \in [1; 2], f''(x) = 20x^3 > 0$) : le paragraphe 3 garantit alors que **chaque corde est au-dessus de l'arc**. La corde coupe donc l'axe *avant* la courbe : tant qu'on garde une extrémité à droite de la racine, le point rendu par la corde reste systématiquement du côté gauche, celui où $f < 0$.

Remarque – La variante qui ne perd jamais la racine

La **méthode de la fausse position** exploite exactement cela : comme en dichotomie, on garde toujours un encadrement $[a; b]$ avec $f(a) < 0 < f(b)$, mais on coupe à la corde plutôt qu'au milieu. Pour notre fonction convexe, le calcul (recalculé) montre que toutes les coupes tombent du côté gauche :

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 30–31 ★★

Le laboratoire : la fausse position qui garde son encadrement, et un détecteur d'inflexions lâché sur les données de la rumeur. 🎨 ♦ ★

la borne $b = 2$ ne bouge jamais, et les c_n montent vers la racine en croissant. La convexité ne décore pas l'algorithme : elle *prédit son comportement*, dicte quelle borne est mobile, et garantit une convergence monotone. Savoir qu'une fonction est convexe, c'est savoir à l'avance de quel côté ses cordes se trompent.

VOIR LA COURBURE

Au départ, deux courbes croissantes que le tableau de variations confondait. À l'arrivée, un instrument complet pour les distinguer, et quatre lectures d'une même idée, interchangeables à volonté :

regard	la convexité, c'est...
les cordes	chaque corde domine son arc (la définition)
les pentes	les pentes des cordes croissent de gauche à droite
les tangentes	la courbe domine chacune de ses tangentes
le calcul	f' croissante, $f'' \geq 0$

La force de la notion est là : chaque regard a son terrain. Les cordes donnent les inégalités de milieux, les tangentes fournissent Bernoulli et $e^x \geq 1 + x$, le calcul détecte les inflexions, et les pentes soutiennent la théorie. Vous choisirez le regard comme on choisit un outil.

La suite de l'année ne cessera d'y revenir. Au chapitre F3, le logarithme arrivera avec sa concavité, et elle offrira l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique. Au chapitre F6, l'intégrale d'une fonction convexe se laissera encadrer par ses cordes et ses tangentes : la méthode des trapèzes en naîtra. Plus loin encore, en classe préparatoire, l'inégalité de Jensen prendra sa forme la plus profonde, avec l'espérance en curseur. Et à chaque épidémie, chaque lancement de produit, chaque S de route de montagne, vous verrez désormais ce que la pente ne voit pas.

JALON

Je sais programmer la méthode de la sécante, et expliquer comment la convexité prédit de quel côté les cordes approchent la racine.

ÉCHO EXO

EXO-F2 · Ex. 24–29 ★★★

Six voyages où la convexité travaille : Archimède, Perlin, Cramer, Huygens, Jensen et les marchands de Fibonacci.



SUITE →

F3 · Logarithme

Première halte : la réciproque de l'exponentielle, dont la concavité livrera de nouvelles inégalités.