



DM 1 · F2. LA CHAÎNE ET L'ARC

De la lettre du jeune Huygens à l'arche de Saint-Louis

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. Les jumelles	△▲	les préliminaires
II. La physique du fil	△▲◆	R2, R4, R5, R6 et la partie I
III. Le procès de la parabole	△▲	R3 et l'équation de la partie II
IV. L'arche de l'Ouest	△▲	la partie I ; calculatrice et Python
V. Le théorème du fil	△▲◆	R3 et les parties I et II

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

L'adolescent contre le vieux maître

UN collier tenu par ses deux extrémités, un câble électrique entre deux pylônes, une toile d'araignée perlée de rosée : partout où un fil pend sous son propre poids, la même courbe apparaît. Laquelle ? Galilée, dans son dernier livre, avait avancé qu'elle ressemble à une parabole, et le monde l'avait cru sur parole. À l'automne 1646, un adolescent de dix-sept ans ose écrire au père Mersenne, le centre du courrier savant de l'Europe, que le vieux maître s'est trompé : la chaîne pendante n'est pas une parabole, et il le démontre par la statique. L'adolescent s'appelle Christiaan Huygens. Mais réfuter n'est pas résoudre : dire ce que la courbe n'est pas laisse entière la question de ce qu'elle est, et il faudra quarante-cinq ans, un défi public et un calcul tout neuf, celui des dérivées, pour l'identifier. Ce devoir refait le chemin : il construit les deux fonctions qui nomment la courbe, dérive l'équation que la pesanteur impose au fil, la résout, la renverse pour en faire un monument de cent quatre-vingt-dix mètres, et culmine sur le théorème qui garantit que la solution trouvée est la seule possible.

Q1. Toucher la courbe. On note c la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- a) △ Calculer $c(0)$, puis des valeurs approchées de $c(1)$, $c(-1)$, $c(2)$ et $c(-2)$ à 10^{-4} près. Que remarque-t-on sur les valeurs en x et en $-x$? Où la fonction semble-t-elle minimale ?

- b) $\triangle$ Tracer la courbe de c sur $[-2; 2]$ à la calculatrice, et décrire son allure en une phrase. C'est *exactement* la forme d'une chaîne suspendue ; à la fin de ce devoir, vous aurez démontré pourquoi, et démontré qu'aucune autre courbe ne pouvait prendre sa place.

Notations et outils. Dans tout le document, l'exponentielle est celle de la classe de première : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, strictement croissante, et $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous réels x et y . Les résultats encadrés R1 à R7 peuvent être cités partout. Tout ce qui dépasse ce socle est construit dans le document ; en particulier, *aucune* fonction réciproque de l'exponentielle n'est disponible : elle attendra le chapitre F3.

R1 – VALEURS INTERMÉDIAIRES

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. Si de plus f est strictement monotone, cette solution est unique ; le résultat s'étend aux intervalles non bornés en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite correspondante. (*Admis : théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, démontrés au chapitre F1, « voir F1, Limites, fonctions continues ».*)

R2 – LIMITES DE L'EXPONENTIELLE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Par ailleurs, si trois fonctions vérifient $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si u et w tendent vers la même limite ℓ en $+\infty$, alors v tend vers ℓ en $+\infty$; le même énoncé d'encadrement vaut pour les limites au voisinage d'un réel ou de $-\infty$. (*Admis : chapitre F1 et classe de première.*)

R3 – DÉRIVÉE NULLE SUR UN INTERVALLE

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I . Si, pour tout $x \in I$, $g'(x) = 0$, alors g est constante sur I . (*Admis ici : c'est le corollaire du théorème des accroissements finis, démontré au cours F2, § 4.3, parcours X. Ce résultat est la clef de voûte des parties III et V : tout ce que le devoir affirme d'unique repose sur lui.*)

R4 – CONVEXITÉ ET DÉRIVÉE SECONDE

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Alors f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$; concave si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. (*Admis : caractérisation du cours F2, § 3.3.*)

PARTIE I

s'appuie sur les préliminaires

Les jumelles

Quand le défi de la chaînette est enfin résolu, en 1691, les vainqueurs décrivent tous la même courbe, construite sur l'exponentielle. L'écriture moderne de leur solution tient en deux fonctions jumelles, obtenues en coupant e^x en ses parties paire et impaire. Cette partie les construit de zéro : ce sont les personnages principaux du devoir, et il faut tout savoir d'elles avant de faire parler la physique.

DÉFINITION – COSINUS ET SINUS HYPERBOLIQUES

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* les fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La fonction c du prologue est donc ch . Les noms, hérités du dix-huitième siècle, annoncent une parenté avec la trigonométrie que le chapitre F4 éclairera ; ici, aucun résultat de trigonométrie n'est utilisé ni nécessaire.

Q2. Premiers portraits.

- Justifier que ch et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et calculer $\operatorname{ch} 0$ et $\operatorname{sh} 0$.
- Montrer que ch est paire et que sh est impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$.
- Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} :$$

réunies, les jumelles reconstituent l'exponentielle.

Q3. Les dérivées croisées.

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x :$$

chacune est la dérivée de l'autre. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

- En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh}''(x) = \operatorname{sh} x$: chacune est égale à sa dérivée seconde. Peu de fonctions savent faire cela ; la partie V démontrera qu'à vrai dire, aucune autre ne le sait.
- Étudier le signe de $\operatorname{sh} x$ selon celui de x (on comparera e^x et e^{-x} grâce à la stricte croissance de l'exponentielle). En déduire le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}$, et la valeur de son minimum.
- Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x > 0$, puis, à l'aide de R4, que ch est convexe sur $\mathbb{R}$.

Q4. La carte d'identité.

- Démontrer, à l'aide de la question Q2c, l'identité fondamentale des jumelles :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

(Une factorisation bien connue rend le calcul immédiat.)

- En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}.$$

On précisera pourquoi c'est la racine *positive* qui s'impose. Cette égalité est le pont entre les deux jumelles ; la partie II la fera travailler. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2},$$

et en déduire que $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout réel x , avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Q5. La sœur bijective.

- △ Déterminer, à l'aide de R2, les limites de sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
- ▲ Justifier que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis, à l'aide de R1, que pour tout réel y , l'équation $\operatorname{sh} x = y$ admet une *unique* solution dans $\mathbb{R}$: sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- △ On s'intéresse à l'unique solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$. Vérifier que $\operatorname{sh} 1 < 2 < \operatorname{sh} 1,5$, puis mener deux étapes de dichotomie pour l'encadrer dans un intervalle d'amplitude 0,125. La calculatrice affiche 1,4436... ; mais aucune des fonctions de ce devoir ne permet d'écrire cette solution par une *formule*. La fonction qui saura le faire, réciproque de l'exponentielle, est la vedette du chapitre F3.

Q6. Les formules de la famille.

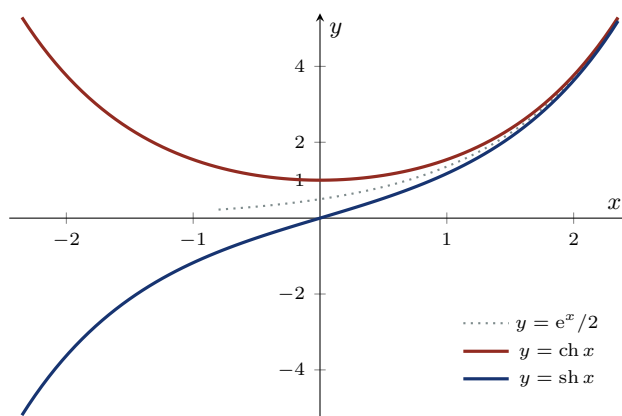
- ▲ Démontrer que, pour tous réels x et y :

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

(Développer le membre de droite avec les définitions, ou utiliser la question Q2c.)

- ▲ En déduire, avec l'aide de la question Q4a, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$; puis, en appliquant le a) au couple $(x, -y)$ et la parité de la question Q2b, que pour tous réels x et y :

$$\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y) = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y.$$



Les jumelles : ch (paire, minimum 1, convexe) et sh (impaire, bijective). Vers la droite, toutes deux se collent sur $e^x/2$: la moitié e^{-x} qui les distingue s'évanouit.

BÂLE ET TOUTE L'EUROPE, 1690-1691

En mai 1690, Jakob Bernoulli lance dans les *Acta Eruditorum* un défi public : trouver la courbe d'une corde suspendue entre deux points fixes. En juin 1691 paraissent trois solutions justes, celles de Leibniz, de Huygens, l'adolescent de 1646 devenu un savant de soixante-deux ans, et de Johann Bernoulli, le propre frère de Jakob. Le nom latin *catenaria*, la chaînette, s'impose dans leur correspondance. Jakob, lui, n'avait pas su résoudre son propre défi ; Johann s'en vantera toute sa vie, racontant qu'une nuit entière de calcul lui avait livré la courbe et qu'au matin, il avait couru chez son frère qui se débattait encore avec le problème. La famille la plus douée des mathématiques était aussi la moins tendre.

La physique du fil

Pourquoi la chaîne choisit-elle cette courbe et aucune autre ? Parce que chacun de ses points est en équilibre : la pesanteur tire vers le bas, la tension tire le long du fil, et la forme s'ajuste jusqu'à ce que tout se compense. Cette partie traduit cet équilibre en une équation sur la dérivée seconde, le langage même du chapitre F2, puis vérifie que ch la résout. Deux résultats de physique sont admis ; tout le reste est démontré.

On considère un fil pesant, homogène, parfaitement souple, suspendu entre deux points. On note f la fonction dont la courbe est la forme du fil, M_0 son point le plus bas, choisi comme origine des abscisses, μ la masse du fil par unité de longueur (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$), g l'intensité de la pesanteur et $H > 0$ la composante horizontale de la tension, dont la physique montre qu'elle est la même en tout point du fil.

R5 – ABSCISSE CURVILIGNE

Pour $x \geq 0$, on note $s(x)$ la longueur du fil entre le point bas M_0 et le point d'abscisse x . On admet que la fonction s est dérivable et que

$$s(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0, \quad s'(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

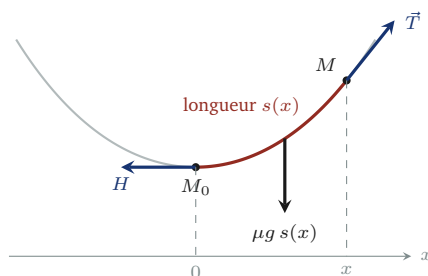
(Admise. L'idée : un arpenteur qui avance de dx en horizontale monte de $f'(x)dx$ en verticale, et parcourt donc, par Pythagore, environ $\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ de fil. La partie V fera de ce résultat un usage spectaculaire.)

R6 – ÉQUILIBRE DU TRONÇON

On admet que l'équilibre du tronçon de fil compris entre M_0 et le point d'abscisse $x \geq 0$ impose

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = \frac{\mu g}{H} s(x).$$

(Admise. Trois forces s'exercent sur le tronçon : la tension horizontale H en M_0 , la tension $\vec{T}$ en M , tangente au fil, et le poids $\mu g s(x)$, vertical. L'équilibre horizontal donne à $\vec{T}$ une composante horizontale H ; l'équilibre vertical lui donne une composante verticale $\mu g s(x)$; la pente du fil en M , qui est $f'(x)$, est le rapport des deux.)



Le tronçon M_0M (en rouge) et ses trois forces : la tension horizontale en M_0 , la tension tangente en M , le poids, proportionnel à la longueur $s(x)$. L'équilibre impose R6.

Q7. L'équation du fil. On pose $a = \frac{H}{\mu g}$, un réel strictement positif, homogène à une longueur.

- a) ▲ Dédurre de R5 et R6 que f' est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que

$$\forall x \geq 0, \quad f''(x) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

C'est l'équation du fil : elle dit que la dérivée seconde est dictée, en chaque point, par la pente.

- b) △ Justifier, à l'aide de R4, que toute courbe d'équilibre est *convexe* sur $[0; +\infty[$; on admettra que le fil est symétrique par rapport à la verticale de son point bas, ce qui étend la conclusion à l'autre moitié : quel que soit son réglage, un fil pendu tient toujours son creux vers le bas. (La question de savoir si l'arc renversé retourne cet énoncé attendra la partie IV.)

Q8. La chaînette. Pour $a > 0$, on note y_a la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$y_a(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

- a) ▲ Justifier que y_a est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_a(x)$ et $y''_a(x)$ à l'aide de sh et ch (dérivées de composées, cours F2, § 1).
- b) ▲ Vérifier, à l'aide de la question Q4b, que y_a satisfait l'équation du fil :

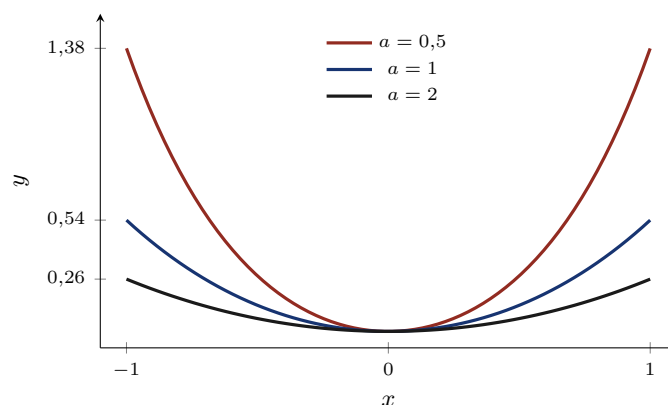
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''_a(x) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'_a(x)^2}.$$

(ce résultat peut être admis pour la suite)

- c) △ Vérifier que $y_a(0) = a$ et que la tangente au point d'abscisse 0 est horizontale : le point bas du fil est bien en $x = 0$, à l'altitude a .

Q9. Le réglage du creux. Le paramètre a pilote la forme. On suspend le fil entre deux poteaux d'abscisses -1 et 1 , et on appelle *flèche* la profondeur du creux : pour tout $a > 0$, $d(a) = y_a(1) - y_a(0) = a \left(\operatorname{ch} \frac{1}{a} - 1 \right)$.

- a) △ Calculer des valeurs approchées de $d(0,5)$, $d(1)$ et $d(2)$ à 10^{-4} près, et vérifier l'accord avec la figure ci-dessous.
- b) ▲ On rappelle que $a = \frac{H}{\mu g}$. À tension horizontale H égale, comment la flèche évolue-t-elle quand le fil est plus lourd (quand μ augmente) ? Et pour un fil donné, que faut-il faire à H pour tendre le fil, c'est-à-dire réduire la flèche ? Répondre en une phrase pour chaque cas, en s'appuyant sur les valeurs du a) et la limite du c). (La décroissance de d , que ces indices suggèrent, est exacte, mais sa démonstration n'est pas demandée : un outil analogue à celui de la question Q16a permettrait de la mener.)
- c) ♦ Démontrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} d(a) = 0$. On pourra poser $u = \frac{1}{a}$, établir grâce à l'inégalité $e^t \geq 1 + t$ (chapitre F1) que $e^u - 1 \leq u e^u$ pour $u \geq 0$, puis encadrer $\operatorname{ch} u - 1$ à l'aide de la question Q4c. Aucun fil réel n'est jamais parfaitement rectiligne, mais une tension arbitrairement grande l'approche autant qu'on veut de l'horizontale.



Trois chaînettes entre les mêmes poteaux, ancrées à leur point bas : plus a est petit, plus le creux est profond. Les trois flèches sont celles de la question Q9a.

LONDRES, 1675

Quinze ans avant le défi de Bâle, Robert Hooke avait déjà compris l'autre moitié de l'histoire, celle qui mène aux monuments. Pour dater sa découverte sans la dévoiler, il la publie sous forme d'anagramme, une chaîne de lettres mélangées, dont la solution ne sera révélée qu'en 1705, après sa mort : *ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum*, « comme pend le fil flexible, ainsi, renversé, tiendra l'arc rigide ». Le fil pendu ne travaille qu'en traction ; retournez sa forme, et chaque traction devient compression : l'arc qui épouse une chaînette renversée tient sans ciment, chaque pierre pressant la suivante. Deux siècles plus tard, un architecte catalan concevra ses églises en suspendant des chaînes lestées au-dessus d'un miroir ; son histoire est racontée dans les Coulisses du chapitre. Ce devoir suit l'anagramme jusqu'à son plus grand accomplissement : une arche de cent quatre-vingt-dix mètres au bord du Mississippi.

PARTIE III

s'appuie sur R3 et l'équation de la partie II

Le procès de la parabole

Il est temps de rendre justice à Galilée, et de comprendre pourquoi sa parabole, fausse pour la chaîne libre, est pourtant la bonne réponse à une question voisine. Tout se joue sur *ce que porte le fil*.

Q10. Le pont suspendu. Dans un pont suspendu, le câble porte, par l'intermédiaire de suspentes verticales, un tablier horizontal dont le poids écrase celui du câble. La charge n'est plus proportionnelle à la longueur de câble $s(x)$, mais à la longueur *horizontale* x : l'équilibre du tronçon, repris comme en R6, donne cette fois, en notant w_0 le poids du tablier par mètre horizontal,

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = \frac{w_0}{H} x \quad (\text{admis, même raisonnement que R6}).$$

- a) ▲ On pose, pour $x \geq 0$, $g(x) = f(x) - \frac{w_0}{2H} x^2$. Calculer g' , puis déduire de R3 que

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad f(x) = f(0) + \frac{w_0}{2H} x^2 :}$$

le câble d'un pont suspendu est une *parabole*, et R3 garantit qu'aucune autre courbe n'est possible.
(ce résultat peut être admis pour la suite)

- b) △ Résumer le verdict du procès en deux phrases : quelle courbe prend un fil qui ne porte que lui-même, et quelle courbe prend un câble dont la charge est un tablier horizontal dominant ? (C'est

exactement la distinction que Huygens, à dix-sept ans, avait entrevue dans sa lettre à Mersenne.)

- c) ▲ Expliquer pourquoi, près du point bas, les deux régimes se confondent presque : montrer que si la pente $f'(x)$ reste proche de 0, l'équation du fil de la question Q7 prescrit une dérivée seconde presque constante, ce qui est précisément la signature de la parabole du a).

Q11. Le « presque » de Galilée, au chiffre près. La question Q10c dit que l'erreur de la parabole est contrôlée par l'écart entre $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ et 1.

- a) △ Calculer $\sqrt{1 + p^2}$ à 10^{-4} près pour une pente $p = 0,2$, puis pour $p = 1$ (une montée à 45°).
- b) ▲ En déduire, en pourcentage, l'écart entre la dérivée seconde réelle du fil et celle du modèle parabolique dans chacun des deux cas, et formuler en une phrase le domaine de validité du « presque » de Galilée : pour quelles chaînes, tendues ou ventruës, sa parabole est-elle une excellente approximation ?

FLORENCE, 1638

Le dossier Galilée mérite mieux que sa légende. Dans les *Discorsi*, son dernier livre, il écrit que la corde tendue se plie en lignes « qui approchent presque des paraboles », et il précise même que l'accord s'améliore quand la courbure diminue. Ses feuilles de travail, conservées, portent encore les trous des clous où il accrochait une chaînette par-dessus une parabole dessinée : il avait vu l'écart, et choisi son adverbe en conséquence. La réfutation rigoureuse viendra des autres, Joachim Jungius d'abord, publié en 1669, le jeune Huygens ensuite ; mais vos calculs de la question Q11 confirment surtout ceci : pour une chaîne bien tendue, le vieux maître avait raison à deux pour cent près.

PARTIE IV

s'appuie sur la partie I ; calculatrice et Python

L'arche de l'Ouest

En 1947, l'architecte Eero Saarinen gagne le concours du mémorial de Saint-Louis, au bord du Mississippi, avec une arche d'acier monumentale, porte symbolique de l'Ouest américain. Achèvement en 1965, haute comme large, elle est l'accomplissement de l'anagramme de Hooke : un arc qui tient parce qu'il est une chaîne renversée. Mais la formule officielle de sa ligne centrale réserve une surprise, et c'est elle que cette partie interroge.

R7 – LA DONNÉE DE SAINT-LOUIS

Les documents de construction décrivent la ligne centrale de l'arche (la ligne qui joint les centres des sections triangulaires d'acier) par la fonction

$$A(x) = 693,8597 - 68,7672 \operatorname{ch}(0,0100333 x), \quad x \in [-299,2239; 299,2239],$$

où x et $A(x)$ sont mesurés en *pieds* (1 pied = 0,3048 m). L'axe des abscisses est au sol, l'axe des ordonnées passe par le sommet. (*Donnée d'ingénierie, admise ; source : R. Osserman, Notices of the American Mathematical Society, 2010.*)

Q12. Lire le monument.

- a) △ Calculer $A(0)$ en pieds, puis le convertir en mètres à 10^{-2} près. La hauteur officielle de l'arche est de 630 pieds (192,02 m) : proposer une explication de l'écart, en se souvenant de ce que décrit exactement la ligne centrale.

- b) $\triangle$ Vérifier, à la calculatrice, que $A(299,2239) \approx 0$: la ligne centrale touche le sol aux deux extrémités du domaine.
- c) $\triangle$ En déduire la largeur au sol de la ligne centrale, en pieds puis en mètres, et la comparer à la hauteur du a) : la ligne centrale est un peu *moins* large que haute. L'égalité parfaite, 630 pieds de large sur 630 pieds de haut, vaut pour les cotes extérieures de l'acier : c'était un choix de Saarinen.

Q13. Le sommet.

- a) $\blacktriangle$ Justifier que A est deux fois dérivable et donner, pour tout x du domaine, l'expression de $A'(x)$ et de $A''(x)$ (dérivées de composées). Calculer $A''(0)$ à 10^{-6} près.
- b) $\blacktriangle$ Étudier le signe de A'' sur le domaine et conclure : l'arche est *concave* en tout point. Le fil de la question Q7b était convexe partout ; le renversement de Hooke est devenu un énoncé de chapitre F2.
- c) $\blacktriangle$ On admet qu'au voisinage d'un point à tangente horizontale, le cercle qui épouse le mieux la courbe, dit *osculateur*, a pour rayon $\frac{1}{|f''|}$ calculé en ce point : c'est la mesure chiffrée de la courbure dont le cours (§ 5.3) parlait en conducteur. Calculer le rayon de ce cercle au sommet de l'arche, en pieds puis en mètres : la taille du « virage » que négocie la crête, à cent quatre-vingt-dix mètres au-dessus du fleuve.

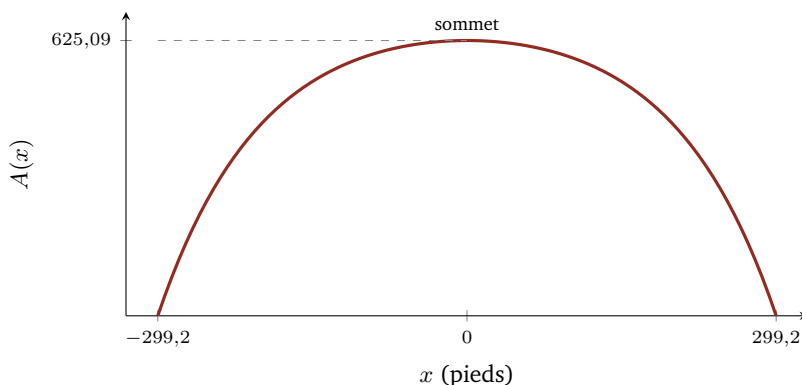
Q14. La fausse jumelle. L'arche est-elle une chaînette renversée, au sens strict de la partie II ?

- a) $\blacktriangle$ Soit $a > 0$ et α un réel. Montrer que la chaînette renversée $y(x) = \alpha - a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) = -\frac{1}{a} \sqrt{1 + y'(x)^2} :$$

l'équation du fil, au signe du renversement près. Observer que le coefficient devant ch et l'inverse du coefficient interne y sont *le même* nombre a .

- b) $\blacktriangle$ Pour la donnée de Saint-Louis, calculer l'inverse de 0,0100333 et le comparer à 68,7672. Que faut-il en conclure : la ligne centrale de l'arche est-elle une chaînette renversée au sens strict ? Le dossier officiel du monument répond : sa forme est celle d'une chaîne *pondérée*, aux maillons plus légers au milieu, car l'arche réelle s'affine vers son sommet. La chaînette pure est la forme d'équilibre d'une chaîne *homogène* ; changez la répartition des masses, et vous sculptez la courbe.
- c) $\triangle$ La longueur de la ligne centrale ne se calcule pas à la main ; le script « ligne polygonale » de l'annexe B l'approche en remplaçant la courbe par mille segments et en sommant leurs longueurs (Pythagore, rien d'autre). Compléter la ligne manquante, exécuter, et donner la longueur en pieds puis en mètres.



La ligne centrale de l'arche de Saint-Louis, tracée d'après la donnée R7 : une chaînette pondérée renversée. Les cotes extérieures du monument font 630 pieds de large sur 630 de haut.

SAINT-LOUIS, 1965

Saarinén voulait une forme « qui monte », et trouvait la chaînette homogène trop pointue à son goût : il fit affiner l'acier vers le sommet, et la courbe d'équilibre s'aplatit en conséquence. Le 28 octobre 1965, la dernière section fut hissée au sommet ; l'arche tient depuis, en compression, exactement comme l'anagramme de 1675 l'avait promis. Détail pour les connaisseurs : la hauteur officielle, 630 pieds, se mesure à l'extérieur de l'acier ; votre calcul de la question Q12a, mené sur la ligne des centres, retrouve l'écart.

PARTIE V

s'appuie sur R3 et les parties I et II

Le théorème du fil

Restent deux dettes, et ce sont les plus belles. La première : R5 parle de la longueur du fil, mais la partie II ne l'a jamais calculée. La seconde : la partie II a *vérifié* que la chaînette résout l'équation du fil, mais qui garantit qu'aucune autre courbe ne la résout aussi ? Les deux réponses sortent du même outil, le résultat R3, employé cette fois en profondeur.

Q15. La longueur exacte de la chaînette. On reprend la chaînette $y_a(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ de la question Q8, et son abscisse curviligne s , qui vérifie d'après R5 : $s(0) = 0$ et $s'(x) = \sqrt{1 + y_a'(x)^2}$ pour $x \geq 0$.

- a) ▲ Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $s'(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, puis vérifier que la fonction S définie, pour tout $x \geq 0$, par $S(x) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ satisfait $S(0) = 0$ et, pour tout $x \geq 0$, $S'(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.
- b) ▲ En appliquant R3 à $s - S$, conclure :

$$\forall x \geq 0, \quad s(x) = a \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} \right) :$$

la longueur de la chaînette est un sinus hyperbolique. Sans aucune primitive, R3 a suffi : deux fonctions de même dérivée et de même valeur en un point sont égales. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

- c) △ Application : pour une chaîne de paramètre $a = 30$ m, calculer la longueur de fil entre le point bas et le point d'abscisse 50 m, à 10^{-3} près, puis confronter au résultat du script « ligne polygonale » de l'annexe B appliqué à cette chaînette. (Valeur attendue : 76,584 m.)

Q16. Le fil de longueur imposée. Un fil de longueur $L = 3$ est suspendu entre deux poteaux d'abscisses -1 et 1 . Quelle chaînette prend-il ? Par parité, la longueur totale de la chaînette y_a entre -1 et 1 vaut, pour tout $a > 0$, $\ell(a) = 2a \operatorname{sh} \frac{1}{a}$ (question Q15b).

- a) ▲ On pose, pour $u \geq 0$, $\varphi(u) = u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u$. Calculer $\varphi'(u)$, en déduire le signe de φ sur $]0; +\infty[$, puis montrer que la fonction $u \mapsto \frac{\operatorname{sh} u}{u}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- b) ◆ En remarquant que $\ell(a) = 2 \frac{\operatorname{sh} u}{u}$ pour $u = \frac{1}{a}$, dresser le tableau de variations de ℓ sur $]0; +\infty[$, avec ses limites en 0^+ et en $+\infty$ (pour cette dernière, on admettra, dans l'esprit de la question Q9c, que $\frac{\operatorname{sh} u}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0^+$). En déduire, à l'aide de R1, que l'équation $\ell(a) = 3$ admet une *unique* solution $a^* > 0$: le fil n'a pas le choix de sa courbe.
- c) △ Vérifier que $\ell(0,61) > 3 > \ell(0,65)$ et encadrer a^* à 10^{-2} près par dichotomie (calculatrice, ou script de l'annexe B). Remarquer au passage ce que dit le tableau du b) : un fil à peine plus long que l'écart des poteaux exige un a immense, donc une tension colossale ; c'est pourquoi aucune ligne électrique n'est jamais tendue droite.

Q17. Le théorème : la chaînette est seule au monde. La question Q3b l'a montré : ch et sh sont égales à leur dérivée seconde. Voici la réciproque, le sommet du devoir : *ce sont les seules*, avec leurs combinaisons. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) = y(x).$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = y(x) - y(0) \operatorname{ch} x - y'(0) \operatorname{sh} x$.

a) ▲ Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = g(x), \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

b) ♦ On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = (g(x) + g'(x))e^{-x}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 0$; en déduire, à l'aide de R3, que u est constante, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -g(x).$$

c) ♦ On pose enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = g(x)e^x$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = 0$; en déduire, à l'aide de R3, que v est constante, puis que g est la fonction nulle.

d) ♦ Conclure : pour toute fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) = y(x)$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = y(0) \operatorname{ch} x + y'(0) \operatorname{sh} x.}$$

En particulier, l'unique fonction égale à sa dérivée seconde qui vaut 1 en 0 avec une tangente horizontale est ch : la courbe du prologue n'était pas une candidate parmi d'autres, c'était la seule.

Voilà le voyage accompli. Deux fonctions taillées dans l'exponentielle, une équation dictée par la pesanteur, un monument qui la renverse, et un théorème d'unicité démontré avec le seul corollaire des accroissements finis : le rendez-vous que le chapitre F1 avait donné à Rolle est tenu au-delà de la promesse. La prochaine fois que vous verrez un câble pendre entre deux pylônes, vous saurez trois choses que Galilée ignorait : le nom de la courbe, l'équation qui la contraint, et la raison pour laquelle elle n'avait pas le choix.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2a. Somme et quotient de fonctions dérivables ; $x \mapsto e^{-x}$ est la composée de $x \mapsto -x$ par l'exponentielle (cours F2, § 1).

Q3a. Dériver terme à terme : la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$. Comparer le résultat aux définitions.

Q3c. $\operatorname{sh} x > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x$ par stricte croissance de l'exponentielle.

Q4a. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$: utiliser Q2c et $e^x e^{-x} = 1$.

Q4b. De $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$ on tire $\operatorname{ch} x = \pm \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$: le signe + se justifie par $\operatorname{ch} x > 0$ (question Q3d).

Q4c. Développer le carré : $(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 = e^x - 2 + e^{-x}$. Pour le cas d'égalité : un carré est nul si et seulement si son contenu l'est, et l'équation $e^{x/2} = e^{-x/2}$ se résout par stricte croissance.

Q5b. $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \geq 1 > 0$ (questions Q3a et Q4c) ; appliquer ensuite R1 sur $\mathbb{R}$ avec les limites de la question Q5a.

Q6a. Écrire $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ avec les définitions et développer : huit produits d'exponentielles, dont les termes croisés s'éliminent tandis que les autres, doublés, reconstituent $\operatorname{ch}(x + y)$. Variante express : partir de $\operatorname{ch}(x + y) =$

$\frac{1}{2}(e^x e^y + e^{-x} e^{-y})$, remplacer chaque exponentielle par son expression de la question Q2c, et développer.

Q7a. $f'' = (f')'$: dériver l'égalité de R6, puis remplacer s' par son expression de R5.

Q8a. Poser $u(x) = \frac{x}{a}$: alors $y_a = a(\operatorname{ch} \circ u)$, et la formule de la dérivée d'une composée donne $y'_a(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$; recommencer pour y''_a .

Q9c. $d(a) = \frac{\operatorname{ch} u - 1}{u}$ pour $u = \frac{1}{a}$. Par Q4c puis la majoration $e^{u/2} - e^{-u/2} = e^{-u/2}(e^u - 1) \leq e^u - 1 \leq u e^u$, obtenir $0 \leq \operatorname{ch} u - 1 \leq \frac{u^2 e^{2u}}{2}$, puis conclure par encadrement (R2) avec $u \leq 1$.

Q10a. $g'(x) = f'(x) - \frac{w_0}{H}x = 0$ pour tout $x \geq 0$: R3 s'applique sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et la constante se lit en $x = 0$.

Q11b. L'équation du fil s'écrit $f'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + f'^2}$: le modèle parabolique consiste à remplacer la racine par 1. L'écart relatif est donc $\sqrt{1 + p^2} - 1$, à convertir en pourcentage.

Q13a. Composée interne $x \mapsto 0,0100333 x$: chaque dérivation fait sortir un facteur 0,0100333.

Q14b. Si l'arche était une chaînette renversée stricte, la question Q14a imposerait $68,7672 = \frac{1}{0,0100333}$: calculer le membre de droite et comparer.

Q15b. $(s - S)' = 0$ sur $[0; +\infty[$ et $(s - S)(0) = 0$: R3 donne $s - S$ constante, et la constante est nulle.

Q16a. $\varphi'(u) = u \operatorname{sh} u$ après simplification ; $\varphi(0) = 0$ et φ croît strictement sur $]0; +\infty[$, donc $\varphi > 0$ sur cet intervalle. Pour la croissance de $\frac{\operatorname{sh} u}{u}$, dériver le quotient : son signe est celui de $\varphi(u)$.

Q16b. Quand a croît, $u = \frac{1}{a}$ décroît, et $\ell(a) = 2\frac{\operatorname{sh} u}{u}$ hérite des variations *inversées* de $u \mapsto \frac{\operatorname{sh} u}{u}$. En 0^+ : poser $u = \frac{1}{a} \rightarrow +\infty$; par l'inégalité $e^t \geq 1 + t$, $e^u = (e^{u/2})^2 \geq (1 + \frac{u}{2})^2$, d'où $\operatorname{sh} u \geq \frac{e^u - 1}{2} \geq \frac{u}{2} + \frac{u^2}{8}$, puis $\frac{\operatorname{sh} u}{u} \geq \frac{1}{2} + \frac{u}{8} \rightarrow +\infty$.

Q17a. ch et sh sont deux fois dérivables (Q3), et $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{sh}'' = \operatorname{sh}$ (Q3b) : dans g'' , les trois termes se reproduisent. Les valeurs en 0 sortent de $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{sh} 0 = 0$ et des dérivées croisées.

Q17b. $u'(x) = (g'(x) + g''(x))e^{-x} - (g(x) + g'(x))e^{-x} = (g''(x) - g(x))e^{-x}$: conclure avec l'hypothèse $g'' = g$. La constante se lit en 0 ; enfin $e^{-x} \neq 0$ permet de revenir à $g + g' = 0$.

Q17c. $v'(x) = (g'(x) + g(x))e^x$: utiliser la question Q17b, puis R3 comme en b), la constante se lisant en 0. Enfin $g(x) = v(x)e^{-x}$.

Annexe B · Mesurer sans intégrer

Aucune des longueurs de ce devoir ne demande d'outil au-delà de Pythagore : on remplace la courbe par une ligne brisée de n segments, et on additionne. Plus n est grand, mieux la ligne épouse la courbe ; la question Q15c permet de contrôler la qualité de l'approximation sur un cas où la valeur exacte est connue.

Ligne polygonale (pour les questions Q14c et Q15c ; une ligne est à compléter) :

```

1  import math
2
3  def A(x):    # ligne centrale de l'arche (pieds)
4      k = 0.0100333
5      c = (math.exp(k*x) + math.exp(-k*x)) / 2
6      return 693.8597 - 68.7672 * c
7
8  n = 1000
9  xg, xd = -299.2239, 299.2239
10 L = 0.0
11 x0, y0 = xg, A(xg)
12 for i in range(1, n + 1):
13     x1 = xg + i * (xd - xg) / n
14     y1 = A(x1)
15     L = L + ...           # a completer : la longueur du segment (Pythagore)

```

```

16     x0, y0 = x1, y1
17     print(L, "pieds =", L * 0.3048, "metres")

```

Pour la question Q15c, remplacer la fonction A par la chaîne $a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ avec $a = 30$, et les bornes par 0 et 50.

Dichotomie pour le fil contraint (pour la question Q16c) :

```

1  import math
2
3  def longueur(a):    # longueur de la chaînette entre -1 et 1
4      return a * (math.exp(1/a) - math.exp(-1/a))
5
6  g, d = 0.61, 0.65   # longueur(g) > 3 > longueur(d)
7  while d - g > 1e-2:
8      m = (g + d) / 2
9      if longueur(m) > 3:
10         g = m
11     else:
12         d = m
13  print(g, d)

```

Valeurs de contrôle : longueur de la ligne centrale de l'arche $\approx 1480,28$ pieds; chaînette $a = 30$ entre 0 et 50 : 76,584, en accord avec $30 \operatorname{sh} \frac{5}{3}$.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

La lettre du jeune Huygens, la résolution de l'anagramme de Hooke, l'histoire complète de l'arche de Saint-Louis et les scripts prêts à exécuter vous attendent sur le compagnon numérique.