



EXERCICES • F2. COMPLÉMENTS DE DÉRIVATION ET CONVEXITÉ

Trente et un exercices pour composer, courber, encadrer

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. La chaîne de montage	Ex. 1–5	★ à ★★★★★	■ ♦	cours F2, § 1
II. L'étage au-dessus	Ex. 6–8	★★ à ★★★★★	■ ♦	cours F2, § 2
III. Les trois regards	Ex. 9–12	★ à ★★★★★	■ ♦	cours F2, § 3
IV. La courbe et ses tangentes	Ex. 13–17	★★ à ★★★★★★	■ ♦ ★	cours F2, § 4
V. Études complètes	Ex. 18–23	★★★★ à ★★★★★★	■ ♦ ★	cours F2, § 2–5
VI. Histoires et belles mathématiques	Ex. 24–29	★★ à ★★★★★★	■ ♦ ★	tout le chapitre
VII. Python, le laboratoire	Ex. 30–31	★★ à ★★★★★	■ ♦ ★	cours F2, § 5–6

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Terminale Spécialité : fiches 8 (Révisions de dérivation), 9 (Composées) et 10 (Convexité).

Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. LA CHAÎNE DE MONTAGE

↔ s'appuie sur COURS F2, § 1 · la dérivée d'une composée et ses quatre formes usuelles

EXERCICE 1 · APL-F2-01



Gammes sur les quatre formes

Pour chacune des fonctions suivantes, justifier la dérivabilité sur l'intervalle indiqué puis calculer la dérivée.

1. $f_1(x) = (2x + 1)^5$ sur $\mathbb{R}$;

3. $f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$;

2. $f_2(x) = \sqrt{3x + 2}$ sur $]-\frac{2}{3} ; +\infty[$;

4. $f_4(x) = e^{5x-1}$ sur $\mathbb{R}$;

5. $f_5(x) = (x^2 - 4x)^3$ sur $\mathbb{R}$;

7. $f_7(x) = e^{2x-x^2}$ sur $\mathbb{R}$;

6. $f_6(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ sur $\mathbb{R}$;

8. $f_8(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$ sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$.

EXERCICE 2 · APL-F2-02

**Poupées à deux étages**

Mêmes consignes, mais les poupées s'emboîtent deux fois : à chaque étape, nommer la couche que l'on dérive.

1. $g_1(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$;

3. $g_3(x) = (e^x + e^{-x})^3$ sur $\mathbb{R}$;

2. $g_2(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$;

4. $g_4(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Coup de pouce

Pour la question 4 : après le calcul, vérifier que la dérivée peut s'écrire $g'_4(x) = g_4(x)(1 - g_4(x))$. Cette fonction en S, la sigmoïde, gouverne la croissance logistique du cours et les neurones artificiels ; son équation $y' = y(1 - y)$ vous attend au chapitre F5.

EXERCICE 3 · APL-F2-03

**Le permis de dériver**

Pour chaque fonction, déterminer le plus grand ensemble sur lequel la formule a un sens, puis le plus grand ensemble sur lequel la dérivée composée est licite, et calculer la dérivée sur ce dernier (on précisera à chaque fois sur quels intervalles on travaille).

1. $h_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

3. $h_3(x) = \sqrt{e^x - 1}$;

2. $h_2(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$;

4. $h_4(x) = \sqrt{x^2}$.

Coup de pouce

Pour h_4 : simplifier d'abord l'expression pour tout réel x , puis regarder ce qui se passe en 0. Le domaine de définition et le domaine de dérivabilité ne coïncident pas toujours.

EXERCICE 4 · THE-F2-04

**Les corollaires, démontrés**

Le tableau des formes usuelles du cours découle du théorème général $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$. Cet exercice le vérifie, ligne à ligne. Dans tout l'exercice, u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. En choisissant v convenablement, démontrer que e^u est dérivable sur I et que $(e^u)' = u' e^u$.2. On suppose de plus : $\forall x \in I, u(x) > 0$. Démontrer de même la formule de dérivation de $\sqrt{u}$.3. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que u^n est dérivable sur I avec $(u^n)' = n u' u^{n-1}$, en n'utilisant que la dérivée d'un produit (aucune composée : c'est l'autre chemin).

La sous-tangente de l'exponentielle

Soit $a \in \mathbb{R}$. On note T_a la tangente à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse a .

1. Déterminer une équation de T_a , puis vérifier que T_a coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $a - 1$.
2. En déduire une construction géométrique de la tangente en n'importe quel point de la courbe, à la règle seule, et l'exécuter sur un croquis aux points d'abscisses 0, 1 et 2.
3. Soit $k > 0$. Reprendre la question 1 pour la fonction $x \mapsto e^{kx}$ au point d'abscisse a : montrer que la tangente coupe l'axe des abscisses en $a - \frac{1}{k}$. La distance horizontale entre le point de contact et cette intersection, la *sous-tangente*, ne dépend donc pas de a : c'est la signature géométrique des exponentielles. Florimond de Beaune posa le problème de cette courbe à Descartes en 1638 ; Descartes n'en vint pas à bout, et c'est Leibniz qui l'identifia en 1684, quarante-six ans après la question.

II. L'ÉTAGE AU-DESSUS

↔ s'appuie sur COURS F2, § 2 · la dérivée seconde et sa lecture cinématique

La seconde couche

Justifier que chaque fonction est deux fois dérivable sur l'intervalle indiqué, puis calculer sa dérivée seconde.

1. $f_1(x) = x^3(x - 2)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$;
3. $f_3(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$;
4. $f_4(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $f_5(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Le drone sur son rail

Un drone de livraison se déplace sur un rail rectiligne. Sa position (en mètres) est modélisée par : $\forall t \in [0 ; 6], x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (le temps t en secondes).

1. Calculer la vitesse $x'(t)$ et l'accélération $x''(t)$, puis dresser le tableau de signes de chacune sur $[0 ; 6]$.
2. Sur quels intervalles le drone avance-t-il ? recule-t-il ? Où fait-il demi-tour ?
3. Sur quels intervalles le mouvement est-il *accélééré* (vitesse et accélération de même signe) ? *freiné* ? À quel instant la marche arrière est-elle la plus rapide ?

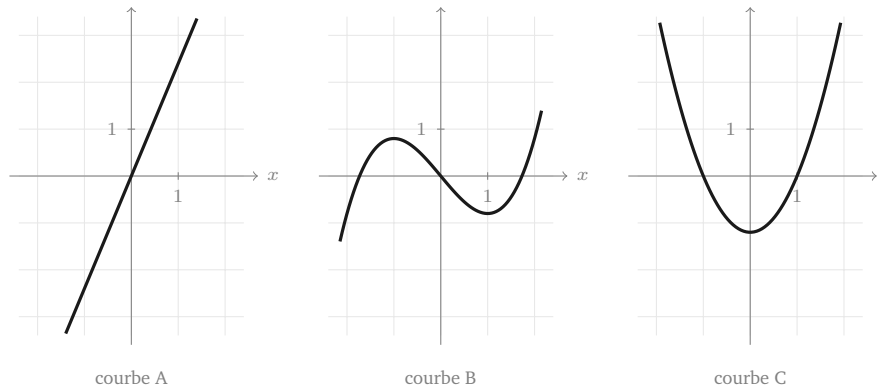
4. Résumer le trajet du drone en trois phrases, comme dans un rapport de vol, avec les positions atteintes aux instants charnières.

EXERCICE 8 · SYN-F2-08



Qui est qui ?

Les trois courbes ci-dessous représentent, dans le désordre, une fonction f , sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' . Identifier chacune, en justifiant par au moins trois arguments croisés (variations, signes, annulations, courbure). Le quadrillage est au pas 1.



Remarque : le repère est orthonormé d'unité 1 sur chaque panneau : toutes les valeurs lues sont exploitables.

III. LES TROIS REGARDS

↔ s'appuie sur COURS F2, § 3 · la convexité par les cordes, par f' , par f''

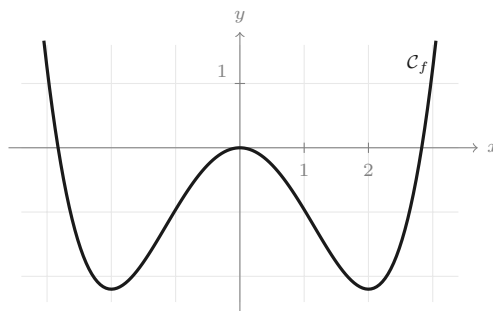
EXERCICE 9 · APL-F2-09



Lire la courbure

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-3; 3]$. Par lecture graphique (valeurs approchées acceptées) :

1. donner les intervalles sur lesquels f semble convexe, puis concave ;
2. situer les abscisses des points d'inflexion ;
3. donner le signe de $f''(-2)$, de $f''(0)$ et de $f''(2)$;
4. en chaque point d'inflexion, dire comment la tangente se place par rapport à la courbe.



EXERCICE 10 · APL-F2-10



Le signe de f'' en batterie

Pour chaque fonction, mener l'étude de convexité complète sur l'intervalle indiqué : justification de la double dérivabilité, calcul de f'' , tableau de signes, intervalles de convexité et de concavité, points d'inflexion éventuels avec leurs coordonnées.

1. $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f_2(x) = x^4 + 4x^3$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f_3(x) = (x + 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_4(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 11 · THE-F2-11



Par les cordes

Retour à la définition : dans cet exercice, ni f' ni f'' ne sont autorisées.

1. Soient a et b deux réels et $t \in [0; 1]$. Montrer que :

$$(1 - t)a^2 + tb^2 - ((1 - t)a + tb)^2 = t(1 - t)(a - b)^2.$$

En déduire que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$, avec égalité dans l'inégalité des cordes si et seulement si $t \in \{0; 1\}$ ou $a = b$.

2. Montrer qu'une fonction affine est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la somme de deux fonctions convexes sur un intervalle I est convexe sur I .

EXERCICE 12 · SYN-F2-12



Le tribunal de la convexité

Pour chaque affirmation, rendre le verdict (vrai ou faux) et produire la pièce à conviction : une démonstration si c'est vrai, un contre-exemple précis si c'est faux.

1. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est deux fois dérivable et $f''(a) = 0$, alors la courbe de f admet un point d'inflexion en a .

3. Si f est convexe sur un intervalle I , et si g est convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est convexe sur I .
4. Si f et g sont convexes sur $\mathbb{R}$, alors $f \times g$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est convexe sur $[a; b]$, alors le maximum de f sur $[a; b]$ est atteint en a ou en b .
6. Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être majorée, sauf si elle est constante.

Coup de pouce

Question 3 : enchaîner les deux définitions, la croissance de g d'abord, sa convexité ensuite. Question 4 : chercher deux paraboles décalées dont le produit se creuse au milieu. Question 5 : utiliser la définition des cordes avec la corde joignant les extrémités. Question 6 ★ : si f n'est pas constante, deux points donnent une corde de pente non nulle, et l'inégalité des trois pentes (cours, § 3.2, parcours ★) force la fonction à suivre cette pente au-delà de la corde, du côté où elle pousse.

IV. LA COURBE ET SES TANGENTES

↔ s'appuie sur COURS F2, § 4 · la position tangente-courbe et la machine à inégalités

EXERCICE 13 · APL-F2-13

★★ ■ ⌚

Au-dessus, au-dessous

1. Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1, puis démontrer la position de la courbe par rapport à T_1 sur $]0; +\infty[$ par l'argument de convexité du cours.
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^3$. Déterminer la tangente T_1 au point d'abscisse 1, puis étudier la position de la courbe par rapport à T_1 sur $\mathbb{R}$ tout entier, en factorisant $g(x) - (3x - 2)$. Que se passe-t-il en $x = -2$, et pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème du cours ?

EXERCICE 14 · SYN-F2-14

★★★ ■ ⌚

La manivelle à inégalités

Établir chaque inégalité en choisissant une fonction convexe ou concave et un point de tangence, comme au § 4 du cours : la rédaction complète (dérivabilité, signe de f'' , tangente, position) est exigée pour la première, un argument resserré suffit ensuite.

1. $\forall x \in [0; +\infty[, \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 \geq 4x - 3$;
3. $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x} \geq \frac{4-x}{4}$;
4. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4 + b^4}{2}$ (par les cordes, cette fois).

EXERCICE 15 · THE-F2-15



La ROC du chapitre, en miroir

Le cours a démontré que la courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. Démontrer l'énoncé miroir, sans invoquer le résultat du cours mais en adaptant sa méthode : si f est deux fois dérivable sur un intervalle I avec $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$, alors la courbe de f est au-dessous de chacune de ses tangentes. Toutes les étapes (fonction écart, dérivée, variations, conclusion) sont attendues.

EXERCICE 16 · SYN-F2-16



La famille e^{kx} contre ses cordes

Soit $k \neq 0$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_k(x) = e^{kx} - kx - 1$.

1. Étudier les variations de φ_k sur $\mathbb{R}$ (on distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$, et l'on remarquera que le signe de φ'_k se lit sans logarithme).
2. En déduire : $\forall k \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, e^{kx} \geq 1 + kx$. Retrouver ce résultat en une ligne par l'argument de convexité du cours.
3. ★ Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 2 que $e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, en élevant à la puissance n une inégalité bien choisie (on justifiera que l'opération conserve l'ordre). On admet que la suite de droite est croissante et tend vers e^x : vous venez de majorer, par sa limite même, la définition historique de l'exponentielle par Euler.

EXERCICE 17 · APR-F2-17



Jensen en action

Le cours a démontré l'inégalité de Jensen à poids égaux. Cet exercice la fait travailler.

1. Soient a, b, c trois réels positifs. Établir :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}.$$

2. Soient a, b, c trois réels. Établir $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, et préciser le cas d'égalité. En donner une lecture statistique : que dit cette inégalité de la moyenne de trois notes et de la moyenne de leurs carrés ?
3. Démontrer l'inégalité de Jensen pour $n = 4$ points en n'utilisant *que* le cas $n = 2$, appliqué trois fois (méthode dyadique : couper le paquet en deux, deux fois).

Coup de pouce

Question 1 : la concavité de la racine, établie sur $]0; +\infty[$, s'étend à $[0; +\infty[$ par continuité (cours, § 4.2). Question 2, cas d'égalité : le développement $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ le livre d'un coup ; on le vérifiera.

V. ÉTUDES COMPLÈTES

↔ s'appuie sur COURS F2, § 2 À 5 · variations, convexité, inflexions : le portrait complet

Le format des études qui suivent est celui des sujets de bac : ensemble d'étude, limites (chapitre F1), dérivée et variations, dérivée seconde et convexité, points d'inflexion, tracé soigné avec tangentes remarquables.

EXERCICE 18 · SYN-F2-18

★★★ ■ ♦ ⌚

Une cubique de bout en bout

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

1. Mener l'étude complète de f (limites, variations, convexité, inflexion), puis tracer la courbe avec ses extremums, son point d'inflexion Ω et la tangente en Ω .
2. Vérifier que l'abscisse de Ω est la moyenne des abscisses des deux extremums.
3. ★ Montrer que : $\forall h \in \mathbb{R}, f\left(\frac{3}{2} + h\right) + f\left(\frac{3}{2} - h\right) = 2f\left(\frac{3}{2}\right)$. Comment cette identité se lit-elle sur la courbe, et que dit-elle du point d'inflexion d'une cubique ?

EXERCICE 19 · SYN-F2-19

★★★ ■ ♦ ⌚

La rationnelle aux deux asymptotes

Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\forall x \neq 1, g(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \neq 1$: $g(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
2. Étude asymptotique complète (chapitre F1) : limites aux bornes, asymptote verticale, asymptote oblique, position de la courbe par rapport à l'oblique.
3. Variations de g sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
4. Convexité de g et bilan : pourquoi cette courbe n'a-t-elle aucun point d'inflexion, alors que sa convexité change ?
5. Tracé complet (asymptotes, extremums locaux, allure).

EXERCICE 20 · SYN-F2-20

★★★★ ■ ♦ ⌚

La famille $x e^{-ax}$

Pour $a > 0$, on définit f_a sur $[0; +\infty[$ par : $\forall x \geq 0, f_a(x) = x e^{-ax}$. (Ce modèle, concentration d'un médicament après injection, reviendra au chapitre F5.)

1. Déterminer la limite de f_a en $+\infty$ (poser $t = ax$ et invoquer les croissances comparées de F1).
2. Étudier les variations de f_a et dresser son tableau complet. Où le maximum est-il atteint, et que vaut-il ?
3. Étudier la convexité de f_a et les coordonnées du point d'inflexion.

4. La famille entière d'un seul regard : montrer que, lorsque a parcourt $]0; +\infty[$, les sommets des courbes décrivent la droite d'équation $y = \frac{x}{e}$ privée de l'origine, et les points d'inflexion la droite $y = \frac{x}{e^2}$ privée de l'origine. Tracer f_1 et f_2 sur un même repère avec ces deux droites en pointillé.

EXERCICE 21 · SYN-F2-21



La famille des cloches

Pour $a > 0$, on définit g_a sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{-ax^2}$.

1. Que valent $g_a(0)$ et les limites de g_a en $\pm\infty$, quel que soit $a > 0$? Comparer $g_a(-x)$ et $g_a(x)$ pour tout réel x : qu'en déduit-on pour la courbe ? Étudier enfin les variations de g_a .
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g_a''(x) = 2a(2ax^2 - 1)e^{-ax^2}$, puis déterminer les « épaules » de la cloche (ses points d'inflexion).
3. Comment les épaules se déplacent-elles quand a augmente ? Tracer $g_{1/4}$, $g_{1/2}$ et g_2 sur un même repère et formuler le rôle du paramètre a en une phrase.
4. ★ Vérifier que toutes les cloches ont leurs épaules à la même hauteur $e^{-1/2} \approx 0,61$, quelle que soit la valeur de a . Les statisticiens, qui écrivent $a = \frac{1}{2\sigma^2}$, retrouvent là leurs inflexions à $\pm\sigma$.

EXERCICE 22 · SYN-F2-22



La promesse du cours : le pic, sans logarithme

Le §5 du cours a affirmé, calcul promis à l'Atelier, que la courbe épidémique N bascule à mi-hauteur. Voici la promesse tenue, et sans logarithme : tout le calcul se fait sans jamais résoudre en t . On reprend : $\forall t \geq 0, N(t) = \frac{1000}{1 + 99e^{-0,6t}}$, et l'on pose, pour tout $t \geq 0, u(t) = 99e^{-0,6t}$, de sorte que $N = \frac{1000}{1+u}$.

1. Justifier que u est dérivable et strictement positive sur $[0; +\infty[$, avec $u' = -0,6u$, puis déterminer la limite de N en $+\infty$.
2. Montrer que : $\forall t \geq 0, N'(t) = \frac{600u(t)}{(1+u(t))^2}$, et en déduire les variations de N .
3. Montrer que : $\forall t \geq 0, N''(t) = \frac{360u(t)(u(t)-1)}{(1+u(t))^3}$.
4. En déduire que N'' s'annule en changeant de signe exactement lorsque $u(t) = 1$, c'est-à-dire lorsque $N(t) = 500$: l'inflexion tombe à la **mi-hauteur**, comme le cours l'annonçait, et comme l'activité le laissait deviner. La calculatrice situe cet instant vers $t^* \approx 7,66$; aucun logarithme n'a été nécessaire pour prouver le où, seule la date exigerait F3.

Coup de pouce

Question 3 : dériver $N' = 600u(1+u)^{-2}$ comme un produit dont le second facteur est une composée, puis factoriser par $u'(1+u)^{-3}$.

EXERCICE 23 · APR-F2-23

 $x^4 + kx^2$: la discussion

Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit h_k sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_k(x) = x^4 + kx^2$. L'objectif est un portrait de famille complet, discuté selon k , à la manière des problèmes de classe préparatoire.

1. Discuter, selon le signe de k , le nombre et la position des extremums de h_k .
2. Discuter de même le nombre de points d'inflexion (on montrera qu'il vaut 0 ou 2, jamais 1, et l'on précisera le cas $k = 0$).
3. Dresser le tableau récapitulatif (extremums, inflexions, allure) pour $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$, et esquisser les trois silhouettes.
4. La transition $k = 0$: en quoi la courbe de $h_0 = x^4$ est-elle le point de bascule de la famille ? Relier au contre-exemple $f''(0) = 0$ sans inflexion du cours.

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

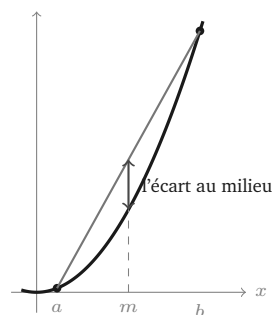
↔ s'appuie sur TOUT LE CHAPITRE · six voyages où la convexité travaille pour de vrai

EXERCICE 24 · SYN-F2-24



Archimède, vers 250 av. J.-C. : l'écart de la corde

Syracuse, vers 250 avant notre ère. Dans une lettre à son ami Dosithée, Archimède annonce un résultat qu'aucun géomètre n'avait osé : l'aire exacte comprise entre une parabole et une corde. Sa clé est l'écart vertical entre les deux, qui obéit à une loi d'une simplicité parfaite, et que le chapitre permet de retrouver en trois questions. Soient $a < b$ deux réels, et la corde joignant les points de la parabole $y = x^2$ d'abscisses a et b .



1. Montrer que la corde a pour équation $y = (a + b)x - ab$.
2. En déduire que l'écart vertical entre la corde et la parabole à l'abscisse médiane $m = \frac{a+b}{2}$ vaut $\frac{(b-a)^2}{4}$.
3. Montrer que cet écart médian est le *maximum* de l'écart corde-parabole sur $[a; b]$: on étudiera la fonction écart $e(x) = (a + b)x - ab - x^2$, dont on précisera la nature et la courbure.
4. L'écart maximal ne dépend que de la *largeur* $b - a$, pas de la position : que devient-il quand on coupe l'intervalle en deux moitiés ? C'est de là que vient, chez Archimède, le rapport constant entre

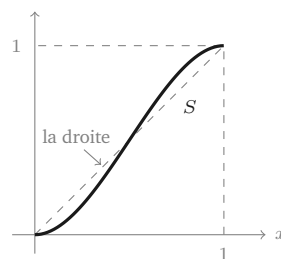
deux générations de triangles inscrits (moitié de base, quart de hauteur, deux triangles : un quart), et donc la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{4}{3}$, première sommation explicite d'une série géométrique de l'histoire, qu'Archimède, faute de la notion de limite, établit par double encadrement.

EXERCICE 25 · SYN-F2-25



Perlin, 1985 : la courbe qui anime les jeux vidéo

New York, 1985. Ken Perlin, qui recevra plus tard un Oscar technique pour ses textures de synthèse, publie l'algorithme de bruit qui habillera des décennies d'images de films et de jeux. Au cœur de la machine, une minuscule courbe d'atténuation : pour déplacer une caméra ou fondre une texture, la ligne droite est trop brutale au départ et à l'arrivée, et les moteurs lui préfèrent la fonction *smoothstep*, popularisée par ses travaux. La voici : S est définie sur $[0; 1]$ par $S(x) = 3x^2 - 2x^3$.



1. Calculer $S(0)$, $S(1)$, $S'(0)$, $S'(1)$. Pourquoi ces quatre valeurs font-elles de S un raccord parfait entre l'immobilité et l'immobilité ?
2. Montrer que S est strictement croissante sur $[0; 1]$.
3. Étudier la convexité de S : où l'animation accélère-t-elle, où freine-t-elle, et où bascule-t-elle ?
4. Montrer que : $\forall x \in [0; 1], S(1-x) = 1 - S(x)$. Traduire pour l'animateur : le freinage est-il le miroir exact du démarrage ?

EXERCICE 26 · SYN-F2-26



Cramer, 1728 : le juste prix, calculé

Saint-Petersbourg, 1713. Un jeu de pile ou face affole les mathématiciens d'Europe : le calcul lui donne une valeur infinie, et personne n'en offre plus de trois ducats. Il faudra un Genevois de vingt-quatre ans, Gabriel Cramer, pour réconcilier le calcul et le bon sens, d'une seule idée : compter le *plaisir* plutôt que l'argent. Cet exercice refait ses comptes.

La règle du jeu : on lance une pièce équilibrée jusqu'au premier pile ; si ce pile survient au lancer numéro k , ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{2^k}$, le joueur empoche 2^{k-1} ducats. Pour donner un sens précis aux moyennes, on limite d'abord le jeu à n lancers, et l'on appelle :

- **prix moyen** du jeu limité à n lancers le nombre $E_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \times 2^{k-1}$ (chaque gain, pondéré par sa chance d'arriver) ;
- **plaisir moyen**, au sens de Cramer, le nombre $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \times \sqrt{2^{k-1}}$ (chaque gain remplacé par sa racine carrée, la mesure du plaisir qu'il procure, pondérée de même).

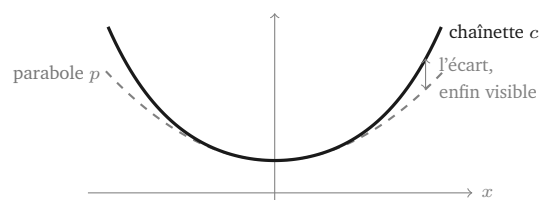
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n = \frac{n}{2}$. Que devient le prix moyen quand on autorise de plus en plus de lancers ? C'est le paradoxe : à ce compte, aucun prix d'entrée n'est trop cher.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2^k} \sqrt{2^{k-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1}$. En déduire que P_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. À l'aide du résultat encadré du chapitre A1 sur les sommes géométriques, déterminer la limite de (P_n) : on donnera la valeur exacte $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ et une valeur approchée. Le plaisir moyen, lui, ne s'envole pas.
4. En déduire l'équivalent certain du jeu : le gain sûr G dont la racine $\sqrt{G}$ vaut ce plaisir limite. Conclure en une phrase : pourquoi personne ne paie-t-il ce jeu plus de trois ducats ?
5. Où la concavité travaille-t-elle dans ce raisonnement ? Répondre en citant une propriété précise du chapitre.

EXERCICE 27 · THE-F2-27

★★★★★ ♦ ☆ ⌚

Huygens, 1646 : la chaîne n'est pas une parabole

La Haye, octobre 1646. Le père Mersenne, qui écrit à toute l'Europe savante, sollicite un correspondant inhabituel : Christiaan Huygens, dix-sept ans. La question traîne depuis les *Discorsi* : Galilée y proposait la parabole comme forme d'une chaîne suspendue, en la présentant d'ailleurs comme une excellente approximation. Le jeune Huygens démontre qu'elle n'est pas exacte. Voici, avec les outils du chapitre, la version moderne de sa séparation. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (la chaînette) et $p(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ (sa doublure parabolique).



1. Vérifier que $c(0) = p(0)$, $c'(0) = p'(0)$ et $c''(0) = p''(0)$: la parabole imite la chaînette jusqu'à la courbure incluse. Aucun dessin ne peut donc les distinguer près du sommet.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) - 1 = \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2}{2}$. En déduire le signe de $c - 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. On pose $g = c - p$. Calculer g'' et en déduire que g est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. Conclure : g est convexe, $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$; montrer que g atteint en 0 son minimum, et que par conséquent la chaînette est au-dessus de sa doublure parabolique sur $\mathbb{R}$; on justifiera que l'égalité n'a lieu qu'en 0 (le signe strict de g'' hors de 0 y pourvoit). On pourra aussi conclure en une ligne avec le théorème exigible du § 4 : la tangente en 0 à g est l'axe des abscisses. Galilée n'était qu'à demi piégé : il avait vu l'approximation, pas la différence, qui ne se voit qu'aux grandes amplitudes.

Jensen, 1906 : l'inégalité pondérée par la tangente

Copenhague, 1906. Johan Jensen, ingénieur de la compagnie des téléphones, mathématicien du soir sans chaire ni étudiants, publie l'article qui fonde la théorie des fonctions convexes ; les Coulisses racontent l'homme. Voici, en son honneur, la preuve la plus courte de son inégalité à deux points pondérés, par la machine du § 4. Soient f deux fois dérivable et convexe sur un intervalle I , deux points $a, b \in I$ et un poids $\lambda \in [0; 1]$. On pose $m = \lambda a + (1 - \lambda)b$.

1. Justifier que $m \in I$.
2. Écrire l'inégalité de position tangente-courbe au point m , appliquée en $x = a$ puis en $x = b$.
3. Combiner ces deux inégalités avec les poids λ et $1 - \lambda$ pour obtenir :

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Où est passée la tangente dans la combinaison, et pourquoi ce miracle-là ne doit-il rien au hasard ?

4. Application : f est la fonction carré et $\lambda = \frac{1}{3}$ (poids $\frac{1}{3}$ sur a , $\frac{2}{3}$ sur b). Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(\frac{a + 2b}{3} \right)^2 \leq \frac{a^2 + 2b^2}{3}.$$

Fibonacci, 1202 : la corde des marchands converge

Pise, 1202. Dans le *Liber Abaci*, Léonard de Pise, dit Fibonacci, offre aux marchands d'Europe une méthode rapportée des comptoirs arabes, l'*elchataym*, le calcul par les deux erreurs : essayer deux valeurs fausses, et couper à la corde. Huit siècles plus tard, elle tourne encore dans les bibliothèques de calcul. Les Coulisses ont raconté sa vitesse ; cet exercice prouve sa *sûreté* sur les fonctions du chapitre : la corde des marchands ne rate jamais.

Soit f continue et **convexe** sur $[a; b]$, avec $f(a) < 0 < f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires (chapitre F1) fournit au moins un zéro de f dans $]a; b[$; **on admet** que, sous ces hypothèses, ce zéro est unique, et on le note ρ . On définit la suite de la fausse position : $c_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_{n+1} est l'abscisse où la corde joignant $(c_n, f(c_n))$ à $(b, f(b))$ coupe l'axe des abscisses. Enfin, si l'un des c_n vérifie $f(c_n) = 0$, alors $c_n = \rho$ et la suite stationne sur la racine : tout est dit. On écarte ce cas d'emblée, et l'on suppose désormais $f(c_n) < 0$ pour tout n .

1. Faire un croquis. Justifier que c_{n+1} est bien défini et que $c_n < c_{n+1} < b$.
2. Convexité au travail : justifier que la corde est au-dessus de l'arc sur $[c_n; b]$, et en déduire que $f(c_{n+1}) \leq 0$.
3. Montrer alors que la suite (c_n) est croissante et majorée par ρ , donc convergente ; on note ℓ sa limite.
4. En passant à la limite dans la relation de récurrence (on l'écrira explicitement), montrer que $f(\ell) = 0$: la corde des marchands ne rate jamais sa racine. Quelle hypothèse du chapitre a servi à chaque étage de la preuve ?
5. ★ Défi : démontrer l'unicité admise du zéro, avec l'inégalité des trois pentes du cours (§ 3.2) appliquée à un couple de zéros supposés distincts et au point a .

Coup de pouce

Question 4 : la relation s'écrit $c_{n+1} = c_n - f(c_n) \frac{b - c_n}{f(b) - f(c_n)}$; la continuité de f (chapitre F1) autorise le passage à la limite, et $f(b) > 0$ interdit à ℓ de valoir b .

VII. PYTHON, LE LABORATOIRE

↔ s'appuie sur COURS F2, § 5 ET 6 · la fausse position et le détecteur d'inflexions

EXERCICE 30 · SYN-F2-30



La fausse position, d'un seul côté

Le cours a programmé la sécante ; voici sa cousine prudente, celle de l'exercice 29, qui garde toujours un encadrement. On l'essaie sur l'équation historique de Fibonacci (*Flos*, v. 1225), $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, déjà domptée par la dichotomie au chapitre F1.

```
1 def fausse_position(f, a, b, n):
2     for k in range(n):
3         c = b - f(b) * (b - a) / (f(b) - f(a))
4         if f(a) * f(c) <= 0:
5             b = c
6         else:
7             a = c
8         print(k + 1, a, b)
9     return (a, b)
10
11 f = lambda x: x**3 + 2*x**2 + 10*x - 20
12 fausse_position(f, 1, 2, 12)
```

1. Vérifier que f est convexe sur $[1; 2]$ et que f change de signe entre 1 et 2.
2. Faire tourner le script. L'une des deux bornes ne bouge jamais : laquelle, et au bout de combien d'étapes obtient-on six décimales stables de la racine 1,36880810... ?
3. Expliquer le comportement de la borne immobile avec l'exercice 29 : quel résultat du chapitre prédit, avant tout calcul, de quel côté toutes les coupes tombent ?
4. Comparer au chapitre F1 : la dichotomie demandait 20 étapes pour six décimales sur cette même équation. Et modifier le script pour compter les étapes automatiquement.

Le détecteur d'inflexions

L'activité du chapitre datait « le jour où tout bascule » à la main ; ce laboratoire l'automatise. Pour une liste de valeurs cumulées N , les différences premières $d1$ approchent la dérivée, et les différences des différences, $d2$, approchent la dérivée seconde.

```

1 def detecte_bascule(N):
2     d1 = [N[j+1] - N[j] for j in range(len(N) - 1)]
3     d2 = [d1[j+1] - d1[j] for j in range(len(d1) - 1)]
4     for j in range(len(d2) - 1):
5         if d2[j] > 0 and d2[j+1] < 0:
6             return j + 2 # jour de la bascule reperee
7     return None
8
9 rumeur = [5, 10, 20, 40, 75, 140, 235, 365, 505, 620, 700, 745, 770]
10 video  = [3, 5, 9, 16, 28, 50, 88, 155, 270]
```

1. Exécuter à la main $d1$ et $d2$ sur la liste `rumeur` (les premières valeurs suffisent), et expliquer en quoi $d2$ joue le rôle de f'' .
2. Faire tourner le détecteur sur `rumeur` puis sur `video`. Confronter aux réponses de l'activité : le programme et vous êtes-vous d'accord ?
3. Le test `d2[j] > 0 and d2[j+1] < 0` traduit quelle propriété précise du cours ? Que détecterait-il, à tort, si l'on remplaçait `and` par `or` ?
4. ☆ Sur la liste `rumeur`, la valeur renvoyée diffère-t-elle du jour du maximum de $d1$? Expliquer ce décalage éventuel avec la précision d'une journée, comme dans l'activité.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, les réponses aux défis étoilés, le tableau de la course à trois entre la dichotomie, la corde et la tangente, et le détecteur d'inflexions appliqué à de vraies données épidémiques : tout vous attend sur le compagnon numérique du chapitre.