



F3. FONCTION LOGARITHME

La fonction qui transforme les produits en sommes

TABLE DES MATIÈRES	5. LIMITES ET CROISSANCES COMPARÉES	11
	5.1. Les limites aux bornes	11
	5.2. La plus lente des fonctions qui divergent . .	12
1. LE PROBLÈME INVERSE	6. LES LOGARITHMES DE TOUTES LES BASES	13
1.1. Une équation, une solution, une fonction . .	6.1. Une famille entière pour le prix d'une	13
1.2. Les deux allers-retours	6.2. Toutes les machines à produits ★	14
2. PRODUITS EN SOMMES	7. LN AU TRAVAIL	15
2.1. La propriété fondamentale	7.1. Compter les chiffres sans écrire le nombre .	15
2.2. La machine qui a changé le calcul.	7.2. Prédire le coût d'une dichotomie	16
3. L'OUTIL À SEUILS	7.3. Gauss, quinze ans, et la densité des nombres premiers ♦	16
3.1. Le droit de passer au logarithme	7.4. La promesse de l'aire	17
3.2. La dette du chapitre A1 est soldée	8. LE LABORATOIRE : CALCULER $\ln 2$ SANS LA TOUCHE LN	17
4. LA DÉRIVÉE	8.1. Par dichotomie	17
4.1. Une dérivée qui n'a pas le droit d'exister? .	8.2. Par la méthode de Briggs (1624)	18
4.2. La récolte : variations, concavité, et $\ln u$. .	PRODUITS EN SOMMES, POUR TOUJOURS	19

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

♦ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« Artifice admirable [...] qui, en réduisant à quelques jours le travail de plusieurs mois, double, si l'on peut ainsi dire, la vie des astronomes. »

Laplace, à propos des logarithmes, Exposition du système du monde, 1796

Un capital placé à 5 % d'intérêts annuels est multiplié chaque année par 1,05. Au bout de combien d'années aura-t-il doublé ? Le chapitre A1 savait poser la question : il s'agit du plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 2$. Mais pour y répondre, il fallait tâtonner, à la calculatrice ou avec une boucle Python, car l'inconnue est *en exposant*, hors de portée de toutes nos techniques algébriques. Même impuissance devant $e^x = 2$: le chapitre F1 sait prouver qu'une solution existe et qu'elle est unique, et sait même l'encadrer par dichotomie, mais personne ne sait l'écrire.

Ce chapitre construit la clé qui manque : la **fonction réciproque** de l'exponentielle, celle qui à chaque réel strictement positif k associe l'unique exposant x tel que $e^x = k$. Elle s'appelle le **logarithme népérien**. Quatre siècles avant nous, elle a été calculée, tabulée et utilisée pour une tout autre raison : elle transforme les produits en sommes, et cette seule propriété a fait d'elle le plus formidable accélérateur de calcul de l'histoire, des tables de Kepler aux règles à calcul du programme Apollo.

Deux visages, donc : la réciproque d'exponentielle, outil de résolution des équations où l'inconnue est en exposant ; et la machine à produits, outil de calcul et de mesure des ordres de grandeur. Le chapitre les visite l'un après l'autre, puis met la fonction au travail : dérivée, limites, logarithmes de toutes les bases, et quelques applications où $\ln$ fait ce qu'aucune autre fonction ne sait faire.

En 1614, un baron écossais publie le fruit de vingt ans de calcul : des tables qui ramènent toute multiplication à une addition. Kepler s'en empare pour ses tables astronomiques, et Laplace dira qu'elles ont « doublé la vie des astronomes ». La fonction de ce chapitre est née outil, avant d'être une idée.

Napier · 1614

← **PRÉREQUIS**

F1 · Continuité

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (fonction continue strictement monotone) est l'acte de naissance de $\ln$: c'est lui qui la fait exister.

1. LE PROBLÈME INVERSE

1.1. Une équation, une solution, une fonction

Tout commence par un théorème du chapitre F1. L'équation $e^x = k$ n'a aucune solution si $k \leq 0$, puisque l'exponentielle est strictement positive. Mais si $k > 0$:

THÉORÈME – EXISTENCE ET UNICITÉ DE L'EXPOSANT

Pour tout réel $k > 0$, l'équation $e^x = k$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une **unique** solution.

OBJECTIFS

- ▷ Définir $\ln$ comme réciproque de $\exp$
- ▷ Manier les deux relations de réciprocité
- ▷ Lire la symétrie des deux courbes

Le TVI fait naître une fonction ♦.

Soit $k > 0$ fixé. La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (chapitre F1). Comme $k \in]0; +\infty[$, intervalle des valeurs prises, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone) garantit l'existence d'un **unique** réel x tel que $e^x = k$. ■

Relisez ce que ce théorème accomplit : il ne résout pas l'équation, il prouve qu'une solution existe et qu'elle est seule. C'est assez pour lui donner un nom, et donner un nom à la solution de chaque équation, c'est fabriquer une fonction.

À chaque $k > 0$ correspond donc un exposant et un seul. Cette correspondance mérite un nom.

DÉFINITION – LOGARITHME NÉPÉRIEN

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est définie sur $]0; +\infty[$: pour tout réel $x > 0$, $\ln x$ est l'unique solution de l'équation $e^t = x$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \ln x = t \iff x = e^t$$

Trois valeurs se lisent immédiatement dans la définition : $e^0 = 1$ donne $\ln 1 = 0$; $e^1 = e$ donne $\ln e = 1$; et $e^{-1} = \frac{1}{e}$ donne $\ln \frac{1}{e} = -1$. Pour les autres, la calculatrice possède une touche dédiée : $\ln 2 \approx 0,69$, $\ln 10 \approx 2,30$.

Logarithme : Mot forgé par Napier en 1614 : logos (le rapport) et arithmos (le nombre). Népérien est un hommage francisé à son nom, Napier.

Attention – Le domaine avant tout

L'écriture $\ln x$ n'a de sens que pour $x > 0$: demander $\ln(-5)$ ou $\ln 0$, c'est demander un exposant t tel que $e^t \leq 0$, ce qu'aucun réel ne fournit. Réflexe à automatiser : avant de manipuler $\ln(u(x))$, exiger $u(x) > 0$ et déterminer le domaine. C'est le « permis de logarithme », cousin du permis de racine du chapitre F2.

1.2. Les deux allers-retours

Dire que $\ln$ défait ce que $\exp$ fait, c'est écrire deux identités, à connaître dans les deux sens.

PROPRIÉTÉ – RELATIONS DE RÉCIPROCITÉ

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^t) = t.$$

La première se lit « $\ln x$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir x » ; la seconde, « prendre l'exponentielle puis le logarithme ramène au point de départ ».

Exemple – Gammes de réciprocity

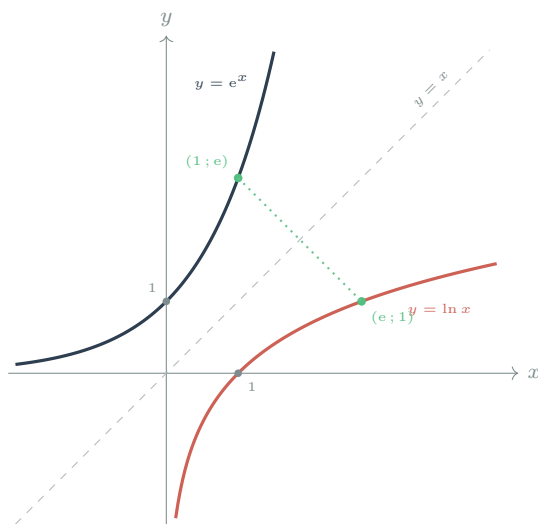
Sans calculatrice : $\ln(e^5) = 5$; $e^{\ln 3} = 3$; $\ln(e^{-2}) = -2$; et en composant, $e^{2 \ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 9$. Le dernier calcul contient déjà, en germe, toute la section suivante.

Graphiquement, la réciprocity a une traduction spectaculaire. Le point $(a; b)$ appartient à la courbe de $\exp$ si et seulement si $b = e^a$, c'est-à-dire $a = \ln b$, c'est-à-dire si le point $(b; a)$ appartient à la courbe de $\ln$. Échanger les deux coordonnées d'un point, c'est le réfléchir par rapport à la droite d'équation $y = x$:

PORTAIL ACT

ACT-F3 · Phases 1–4 ★

L'exposant caché : la table qui multiplie en additionnant, la chasse au t tel que $2^t = 3$, et l'enquête d'ouverture que ce paragraphe formalise. ■



PROPRIÉTÉ – SYMÉTRIE DES COURBES

Dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Cette symétrie est un dictionnaire : chaque propriété d'une courbe se traduit sur l'autre. La tangente de $\exp$ en $(0; 1)$, de pente 1, devient la tangente de $\ln$ en $(1; 0)$, de pente 1 : le paragraphe 4 le confirmera par le calcul.

La symétrie permet de lire, avant tout calcul, le portrait de la nouvelle fonction : définie sur $]0; +\infty[$, elle semble strictement croissante, négative sur $]0; 1[$, nulle en 1, positive au-delà, et sa croissance paraît de plus en plus poussive à mesure que x grandit. Tout le chapitre consiste à transformer ces impressions graphiques en théorèmes.

2. PRODUITS EN SOMMES

2.1. La propriété fondamentale

L'exponentielle transforme les sommes en produits :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Sa réciproque fait donc, nécessairement, le chemin inverse.

THÉORÈME – PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DU LOGARITHME

$$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes.

La démonstration vous revient : elle tient en trois lignes, en comparant les exponentielles des deux membres, et elle est menée en exercice guidé à l'Atelier, avec toute la descendance ci-dessous. Le cours se contente d'un indice : $e^{\ln(ab)}$ et $e^{\ln a + \ln b}$ valent tous deux ab .

JALON

Je sais définir $\ln x$ pour $x > 0$, utiliser les deux relations de réciprocity, et situer les courbes de $\exp$ et $\ln$ l'une par rapport à l'autre.

OBJECTIFS

- ▷ Connaître la propriété fondamentale
- ▷ Manier toute la famille algébrique
- ▷ Simplifier des expressions en $\ln$

John Napier calcule ses tables pendant vingt ans, seul dans son manoir de Merchiston, près d'Édimbourg. Publiées en 1614, elles font le tour de l'Europe savante en quelques années : Kepler les utilise pour ses tables astronomiques de 1627, les Tables rudolphiennes, dont il calcule même ses propres logarithmes.

PROPRIÉTÉ – LA DESCENDANCE DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$\text{inverse : } \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\text{quotient : } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{puissance : } \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\text{racine : } \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Chacune se déduit de la propriété fondamentale ; les démonstrations, guidées, vous attendent à l'Atelier (la puissance réclame la récurrence du chapitre A0).

Exemple – Tout exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

Simplifions, sans calculatrice, en n'utilisant que la famille ci-dessus :

$$\ln 72 = \ln(2^3 \times 3^2) = 3 \ln 2 + 2 \ln 3, \quad \ln \frac{9}{8} = 2 \ln 3 - 3 \ln 2,$$

$$\ln \sqrt{48} = \frac{1}{2} \ln(2^4 \times 3) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3,$$

$$\ln 36 - 2 \ln 6 = \ln 36 - \ln 36 = 0.$$

La morale du dernier calcul : avant de sortir la calculatrice, regarder si la structure multiplicative fait tout le travail.

Attention – Les deux faux amis

Le logarithme ne transforme **que** les produits. Il n'existe aucune formule pour $\ln(a + b)$: en particulier $\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$ en général (sinon, avec $a = b = 1$: $\ln 2 = 0$, absurde). Et $\ln a \times \ln b$ n'est pas $\ln(ab)$: le produit de logarithmes n'a pas de formule non plus. La machine convertit les produits en sommes, elle ne convertit rien d'autre.

ÉCHO EXO

EXO-F3 · Ex. 1–5 ★

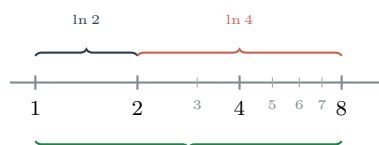
Les gammes de la machine à produits :

allers-retours de réciprocity, tout en $\ln 2$

et $\ln 3$, permis de logarithme et équations éclair. ■

2.2. La machine qui a changé le calcul

Pourquoi cette propriété a-t-elle bouleversé les sciences ? Parce qu'une addition se pose en quelques secondes, quand une multiplication de deux nombres à sept chiffres demande de longues minutes et invite l'erreur. La recette de 1614 : pour multiplier a par b , chercher $\ln a$ et $\ln b$ dans la table, les *additionner*, puis chercher dans la table, à rebours, le nombre dont le logarithme vaut cette somme. Trois lectures de table, une addition : le produit est là.



$\ln 2 + \ln 4 = \ln 8$: mettre bout à bout les longueurs, c'est multiplier

Graduez une règle en plaçant chaque nombre x à la distance $\ln x$ de l'origine : les produits deviennent des mises bout à bout. Deux règles semblables qui coulisent l'une contre l'autre font l'addition toutes seules : c'est la **règle à calcul**, inventée vers 1622, retraitée en 1972.

CONTEXTE HISTORIQUE – BRIGGS, L'HOMME QUI A INDUSTRIALISÉ LE LOGARITHME

À Londres, Henry Briggs lit la table de Napier et en est ébloui. Il fait deux fois le voyage vers Édimbourg, en 1615 et 1616, pour rencontrer l'inventeur ; ensemble, ils refondent le système autour de la base dix, si commode pour notre écriture décimale. Napier meurt en 1617, Briggs poursuit seul : mille logarithmes à quatorze décimales en 1617, puis trente mille en 1624 dans son *Arithmetica Logarithmica*. Sa méthode de calcul, sans dérivée ni série, tient de l'exploit : des **racines carrées extraites en cascade**, cinquante-quatre fois de suite pour le seul nombre dix. Le laboratoire de ce chapitre, au paragraphe 8, la fera revivre en trois lignes de Python.

JALON

Je connais la propriété fondamentale et sa descendance, et je sais réduire une expression en $\ln$ à sa plus simple écriture.

3. L'OUTIL À SEUILS

3.1. Le droit de passer au logarithme

Résoudre, c'est transformer une équation en une équation équivalente et plus simple. Le logarithme s'y prête parfaitement, à condition de connaître ses règles de passage.

PROPRIÉTÉ – ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DE RÉFÉRENCE

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b, \quad \ln a < \ln b \iff a < b,$$

$$e^t = a \iff t = \ln a, \quad e^t < a \iff t < \ln a.$$

En particulier, le **signe** de $\ln$ se lit par comparaison à 1 : pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$, et $\ln x > 0 \iff x > 1$.

OBJECTIFS

- ▷ Résoudre les équations en e^x et $\ln x$
- ▷ Résoudre les inéquations $q^n \leq k$
- ▷ Surveiller le signe de $\ln q$

Ces équivalences découlent de la réciprocity et de la stricte croissance de l'exponentielle : par exemple, $a < b$ s'écrit $e^{\ln a} < e^{\ln b}$, ce qui équivaut à $\ln a < \ln b$ puisque $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le logarithme *hérte* la stricte croissance de sa fonction miroir, avant même que le paragraphe 4 ne la retrouve par la dérivée.

MÉTHODE – RÉSOUDRE AVEC $\ln$ SANS SE FAIRE PIÉGER

- ▷ 1. **Isoler** le bloc exponentiel ou logarithmique (le facteur ou le terme qui contient l'inconnue).
- ▷ 2. **Contrôler le domaine** : une équation en $\ln u$ exige $u > 0$; le noter avant de transformer.
- ▷ 3. **Passer au logarithme (ou à l'exponentielle)** des deux côtés, en équivalence.
- ▷ 4. **Surveiller le signe** de tout facteur par lequel on divise : diviser par $\ln q$ avec $0 < q < 1$, c'est diviser par un nombre *strictement négatif*, et l'inéquation change de sens.

Exemple – Trois résolutions modèles

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^{2x} - 5 = 0$. Elle équivaut à $e^{2x} = \frac{5}{3}$, donc à $2x = \ln \frac{5}{3}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}} \quad (\approx 0,26).$$

2. Résolvons dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $\ln x \leq 3$. Par stricte croissance de l'exponentielle, elle équivaut à $x \leq e^3$. Avec le domaine, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]0; e^3]}$: ne pas oublier la borne ouverte en 0, imposée par le domaine et non par le calcul.

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+3) = 2 \ln 2$. Domaine : $x > -3$. Sur ce domaine, l'équation équivaut à $\ln(x+3) = \ln 4$, donc à $x+3 = 4$, soit $x = 1$, qui appartient bien au domaine : $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$.

3.2. La dette du chapitre A1 est soldée

Au chapitre A1, l'étude des suites géométriques butait toujours sur la même porte : à partir de quel rang q^n dépasse-t-il un seuil donné ? La réponse existait (croissance, limite), mais le rang exact se cherchait à la machine. Le logarithme ouvre la porte : $q^n \geq k$ se traite en prenant le logarithme des deux membres, et la propriété de la puissance ($\ln(q^n) = n \ln q$, pour tout $q > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$) fait descendre l'inconnue de l'exposant.

Exemple – Le capital de l'ouverture, résolu pour de bon

Cherchons le plus petit entier n tel que $1,05^n \geq 2$. Comme les deux membres sont strictement positifs, l'inégalité équivaut, par stricte croissance de $\ln$, à $\ln(1,05^n) \geq \ln 2$, c'est-à-dire $n \ln 1,05 \geq \ln 2$. Or $1,05 > 1$, donc $\ln 1,05 > 0$: la division conserve le sens.

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,21, \quad \text{donc} \quad \boxed{n = 15} :$$

le capital double au cours de la quinzième année. Le tâtonnement du chapitre A1 est devenu un calcul de trois lignes.

ÉCHO EXO

EXO-F3 · Ex. 6-9 ★★

L'outil à seuils en batterie : inéquations complètes, le bilan du second degré et la règle des 72 des banquiers. ■ ◆

Exemple – Quand la raison est plus petite que 1

Une balle perd 3 % de sa hauteur à chaque rebond : la hauteur relative après n rebonds est $0,97^n$. Quand passe-t-elle sous la moitié de la hauteur initiale ? On résout $0,97^n \leq 0,5$: comme les deux membres sont strictement positifs, l'inégalité équivaut, par stricte croissance de $\ln$, à $n \ln 0,97 \leq \ln 0,5$. Cette fois $0,97 < 1$, donc $\ln 0,97 < 0$: **la division renverse l'inégalité** :

$$n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,97} \approx 22,76, \quad \text{donc} \quad \boxed{n = 23}.$$

Le piège classique du chapitre est là, dans ce changement de sens : au brouillon comme en copie, écrire explicitement « car $\ln 0,97 < 0$ ».

CAHIER DE CALCUL · fiches 3 et 4 : propriétés algébriques en gammes, équations et inéquations. La vitesse s'acquiert là.

JALON

Je sais résoudre les équations et inéquations en e^x , $\ln x$ et q^n , en contrôlant le domaine et le signe de $\ln q$.

4. LA DÉRIVÉE

4.1. Une dérivée qui n'a pas le droit d'exister ?

La fonction $\ln$ n'est définie par aucune formule : elle est définie par une *propriété* (être l'exposant qui convient). Comment dériver une fonction dont on n'a pas l'expression ? Réponse : en dérivant la seule identité qu'on possède, $e^{\ln x} = x$. C'est la démonstration exigible du chapitre.

OBJECTIFS

- ▷ Connaître et démontrer $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- ▷ Dériver $\ln u$
- ▷ Exploiter la concavité de $\ln$

THÉORÈME – DÉRIVÉE DU LOGARITHME · DÉMONSTRATION EXIGIBLE

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ (résultat admis, démontré plus bas pour le parcours ★) et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Dériver l'identité de réciprocité ◆.

Poser la composée. On admet que $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. La fonction $x \mapsto e^{\ln x}$ est alors dérivable sur ce même intervalle, comme composée de $\ln$ suivie de $\exp$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle de la chaîne, chapitre F2), et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad (e^{\ln x})' = \ln'(x) \times e^{\ln x}.$$

Dériver les deux membres. Or, par réciprocité, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^{\ln x} = x$: fonction dont la dérivée vaut 1. En identifiant les deux dérivées :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln'(x) \times e^{\ln x} = 1, \quad \text{soit} \quad \ln'(x) \times x = 1.$$

Conclure. Comme $x \neq 0$ sur le domaine, on peut diviser : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$. ■

La démonstration précédente a un angle mort assumé : elle *admet* la dérivabilité pour calculer la dérivée. Le programme s'en contente. Mais rien ne nous oblige à nous en contenter, car la dérivabilité se démontre avec les outils du chapitre F1, au prix d'un joli changement de variable.

La dérivabilité elle-même, hors programme ★.

Le taux d'accroissement. Soit $a > 0$ fixé. Étudions la limite quand $x \rightarrow a$, $x > 0$, $x \neq a$, du taux :

$$\tau(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$$

Le changement de variable. Posons $h = \ln x - \ln a$: alors $e^h = e^{\ln x} / e^{\ln a} = \frac{x}{a}$, c'est-à-dire $x = ae^h$, et $h \neq 0$ pour $x \neq a$. Quand $x \rightarrow a$, la continuité de $\ln$ en a (admise : $\ln$ est la réciproque d'une fonction continue strictement monotone, et la symétrie des courbes du paragraphe 1 rend ce résultat lisible) donne $h \rightarrow 0$. Le taux s'écrit alors tout entier en fonction de h :

$$\tau(x) = \frac{h}{ae^h - a} = \frac{1}{a} \times \frac{h}{e^h - 1}.$$

La limite connue depuis la première. Or $\frac{e^h - 1}{h} = \frac{e^h - e^0}{h - 0}$ est le taux d'accroissement de $\exp$ en 0 : il tend vers $\exp'(0) = 1$ quand $h \rightarrow 0$. Le passage au quotient (licite car cette limite est non nulle), puis, comme $h \rightarrow 0$ avec $h \neq 0$, la composition de limites, donnent :

$$\lim_{x \rightarrow a} \tau(x) = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{a}.$$

La fonction $\ln$ est donc dérivable en tout $a > 0$, de nombre dérivé $\frac{1}{a}$: la dérivabilité et la formule tombent d'un même geste. ■

Le résultat a de quoi étonner : la dérivée de cette fonction transcendante est la plus simple des fractions. Cette coïncidence n'en est pas une, et le paragraphe 7 en donnera la raison géométrique profonde.

Retenez la stratégie plus encore que le calcul : pour étudier une réciproque, **changer de variable** pour tout ramener à la fonction directe. Le même geste servira au paragraphe 5 pour les limites, et au paragraphe 8 pour justifier la méthode de Briggs.

4.2. La récolte : variations, concavité, et $\ln u$

PROPRIÉTÉ – VARIATIONS ET CONCAVITÉ

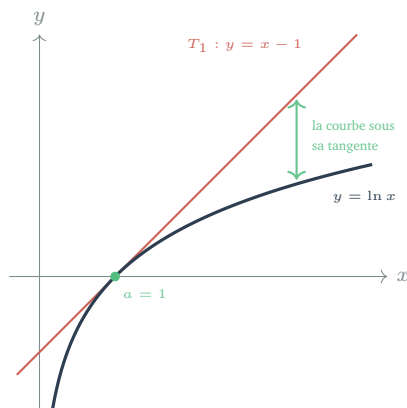
La fonction $\ln$ est **strictement croissante** et **concave** sur $]0; +\infty[$: elle y est deux fois dérivable, avec

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{et} \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Le paragraphe 3 connaissait déjà la stricte croissance, par miroir : le calcul la confirme. Et la concavité place la courbe sous chacune de ses tangentes (chapitre F2).

La concavité n'est pas un ornement : c'est une *usine à inégalités*, et le

chapitre F2 a appris à tourner la manivelle. Tangente en 1 : elle passe par (1 ; 0) avec la pente $\ln'(1) = 1$, d'où l'équation $y = x - 1$, et la courbe concave vit dessous :



PROPRIÉTÉ – L'INÉGALITÉ DE LA TANGENTE EN 1

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x \leq x - 1$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$. C'est l'inégalité de référence du chapitre : elle borne $\ln$ par une fonction affine, et elle resservira au paragraphe 8.

PROPRIÉTÉ – LA PROMESSE DU CHAPITRE F2 : MOYENNES GÉOMÉTRIQUE ET ARITHMÉTIQUE

$$\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2, \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2},$$

avec égalité si et seulement si $a = b$. La démonstration est un exercice guidé de l'Atelier, et elle tient en deux gestes : la concavité place la corde sous l'arc (milieux et moyennes, chapitre F2), donc

$$\ln\left(\frac{a + b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln \sqrt{ab},$$

puis l'exponentielle, croissante, transporte l'inégalité. Le chapitre F2 l'avait annoncée en clôture : promesse tenue.

Reste à dériver les composées. La règle de la chaîne du chapitre F2 ajoute une cinquième forme à son catalogue des formes usuelles :

PROPRIÉTÉ – DÉRIVÉE DE $\ln u$

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I . Alors $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ÉCHO EXO

EXO-F3 · Ex. 17–22 ★★

Les six preuves que le cours vous a déléguées, de la propriété fondamentale au compteur de chiffres, récurrence et concavité en main. ■ ◆

Exemple – Une étude complète

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x - \ln x$. Elle est dérivable comme différence de la fonction identité et de $\ln$, toutes deux dérivables sur $]0; +\infty[$, et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Sur ce domaine le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ est du signe de $x - 1$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0; 1]$, strictement croissante sur $[1; +\infty[$, et atteint en 1 son minimum $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$. Comme ce minimum est strictement positif :

$$\forall x \in]0; +\infty[, x - \ln x \geq 1 > 0, \text{ donc } \boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \ln x < x}$$

La courbe du logarithme reste sous la première bissectrice, et même à un écart vertical d'au moins 1 : voilà qui prépare le paragraphe suivant, où cet écart se creusera sans limite.

Exemple – Le réflexe $\ln u$

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(x^2 + 1)$. Le permis de logarithme est acquis d'office : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 1 > 0$, et $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

du signe de x : la fonction g décroît sur $]-\infty; 0]$, croît sur $[0; +\infty[$, avec un minimum $g(0) = \ln 1 = 0$. Une vasque évasée, tangente à l'axe des abscisses en l'origine.

5. LIMITES ET CROISSANCES COMPARÉES

5.1. Les limites aux bornes

THÉORÈME – LIMITES DU LOGARITHME

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

La courbe admet donc l'axe des ordonnées pour **asymptote verticale**.

La première limite se prouve par la méthode des seuils du paragraphe 3 : pour tout seuil $A \in \mathbb{R}$, on a $\ln x > A$ dès que $x > e^A$, donc $\ln x$ finit par dépasser n'importe quel seuil. La seconde s'en déduit par le changement de variable du chapitre : en posant $X = \frac{1}{x}$, on a $\ln x = -\ln X$ avec

JALON

Je sais démontrer la formule

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \text{ dériver } \ln u \text{ après}$$

contrôle du permis, et mobiliser la

concavité de $\ln$ pour produire des

inégalités.

OBJECTIFS

▷ Connaître les limites aux bornes

▷ Démontrer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

▷ Manier les croissances comparées

$X \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Le portrait de la fonction est complet :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		+
$\ln$		$-\infty$  $+\infty$

Une asymptote verticale en 0, aucune asymptote horizontale en $+\infty$: la fonction monte indéfiniment, mais son allure de plus en plus couchée annonce le théorème central de ce paragraphe.

5.2. La plus lente des fonctions qui divergent

La courbe de $\ln$ semble s'aplatir toujours davantage, et pourtant elle franchit tout seuil. Les **croissances comparées** quantifient cette longueur : face à n'importe quelle puissance de x , et même face à $\sqrt{x}$ (l'Atelier le démontrera), le logarithme perd.

THÉORÈME – CROISSANCES COMPARÉES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et, plus généralement :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

En 0, le miroir de ce résultat est la **démonstration exigible** ci-dessous :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

La limite de $\frac{\ln x}{x}$ se démontre en exercice guidé à l'Atelier, par le changement de variable $X = \ln x$ qui la ramène aux croissances comparées du chapitre F1.

$x \ln x$ en 0 · démonstration exigible ♦.

Changer de variable. Soit $x \in]0; 1[$. Posons $X = \ln x$, de sorte que $x = e^X$. Quand $x \rightarrow 0^+$, on a $X = \ln x \rightarrow -\infty$ (limite aux bornes ci-dessus). Le produit s'écrit :

$$x \ln x = e^X \times X = X e^X.$$

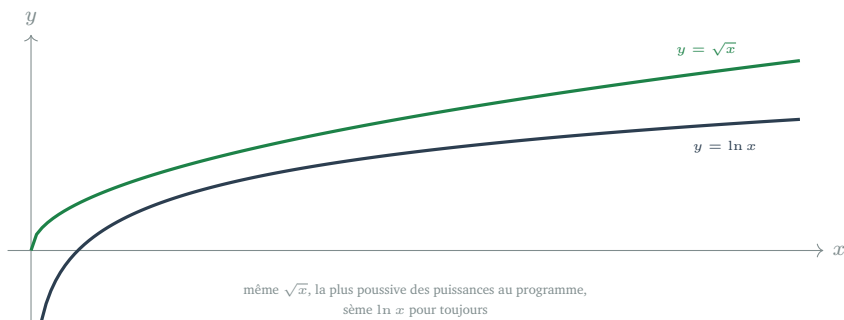
Invoquer la croissance comparée connue. Or le chapitre F1 a établi :

$\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ (l'exponentielle écrase toute puissance, y compris en $-\infty$).

Conclure par composition. Par composition de limites : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$. ■

Toujours le même geste : $X = \ln x$ traduit chaque question sur $\ln$ en une question sur $\exp$, où le chapitre F1 a déjà fait le travail. Une réciproque bien comprise ne se fatigue jamais : elle délègue.

Près de 0, le facteur x qui fond l'emporte donc sur le facteur $\ln x$ qui explose : le produit s'éteint. En $+\infty$, l'image à retenir est celle d'une course perdue d'avance :



Exemple – Lever une indétermination

Étudions $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$. Forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Factorisons par le terme dominant :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad \ln x - x = x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right).$$

Quand $x \rightarrow +\infty$: $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc le facteur entre parenthèses tend vers -1 , et par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = -\infty$$

Le réflexe est le même qu’au chapitre F1 : face à une indétermination mêlant $\ln$ et puissances, **factoriser par le plus fort**, et les croissances comparées font le reste.

ÉCHO EXO

EXO-F3 · Ex. 10–16 ★★★

Études type bac : la bosse de $\frac{\ln x}{x}$, la famille à un paramètre, la suite au point fixe et la meilleure constante, en format examen. ■ ♦ ☆

6. LES LOGARITHMES DE TOUTES LES BASES

6.1. Une famille entière pour le prix d’une

Le logarithme népérien répond à la question « quel exposant donner à e ? ». Mais la question se pose pour toute base : quel exposant donner à 10 pour obtenir 1000 ? À 2 pour obtenir 1024 ? La réponse ne demande aucune construction nouvelle : une simple division.

DÉFINITION – LOGARITHME DE BASE a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Le **logarithme de base a** est la fonction définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

JALON

Je connais les limites de $\ln$ aux bornes, je sais démontrer que $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ , et lever une indétermination par factorisation du terme dominant.

OBJECTIFS

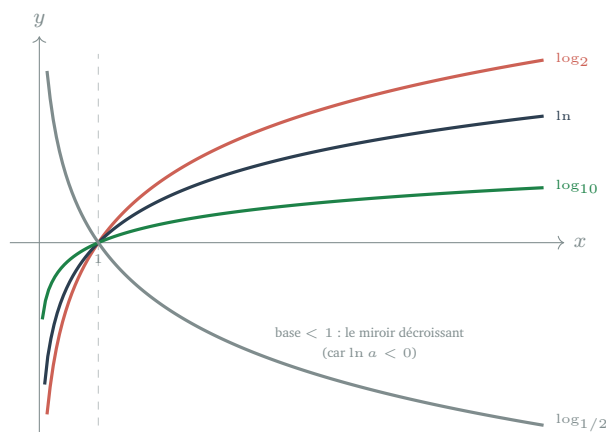
- ▷ Définir $\log_a$ à partir de $\ln$
- ▷ Connaître $\log_{10}$ et $\log_2$
- ▷ Changer de base

Elle vérifie $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, et surtout : $\forall n \in \mathbb{Z}, \log_a(a^n) = n$.
Les deux bases vedettes ont leurs notations propres : le **logarithme décimal** $\log = \log_{10}$ et le **logarithme binaire** $\log_2$.

Chaque $\log_a$ hérite de tout ce que ce chapitre a construit : $\log_a$ transforme les produits en sommes (diviser la propriété fondamentale par $\ln a$), et le **changement de base** s'obtient en une ligne, guidé à l'Atelier : pour toutes bases licites a et b ,

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Toutes les fonctions logarithmes sont donc *proportionnelles* entre elles : une seule courbe, étirée verticalement, et retournée quand la base est plus petite que 1 (car alors $\ln a < 0$).



Remarque – Chaque base a son métier

$\log_{10}$ parle la langue de notre écriture décimale : $\log 1000 = 3$, $\log 10^n = n$, et le paragraphe 7 en fera un compteur de chiffres. C'est la base de Briggs, celle des tables historiques et des règles à calcul. $\log_2$ parle la langue du binaire et du doublement : $\log_2 1024 = 10$, et c'est lui qui compte les étapes d'une dichotomie. Quant à $\ln$, il règne sur l'analyse : seule base dont la dérivée est exactement $\frac{1}{x}$, sans facteur correctif, il est à l'exposant ce que le radian est à l'angle : l'unité naturelle.

6.2. Toutes les machines à produits ★

Le chapitre a construit une famille de fonctions qui transforment les produits en sommes. En existe-t-il d'autres ? Essentiellement aucune, et c'est un théorème : toute fonction *dérivable* qui transforme les produits en sommes est un multiple de $\ln$, autrement dit un logarithme (ou, cas dégénéré, la fonction nulle).

La famille est au complet ★.

Base : Napier n'avait pas de base : la notion n'émerge qu'avec Euler, qui définit en 1748 le logarithme comme réciproque de a^x . La base e est celle qui rend la dérivée parfaite : $\frac{1}{x}$, sans constante parasite.

CIBLE DA

DM-F3.1 · Parties I–V ★★

Pourquoi douze notes ? La spirale des quintes, l'algorithme d'Euclide devenu musique et les fractions continues de $\log_2 3$, de Pythagore au clavier de Bach.



Le cadre. Soit f dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Montrons que f est proportionnelle à $\ln$.

Une valeur imposée. En prenant $x = y = 1$: $f(1) = 2f(1)$, donc $f(1) = 0$.

Dériver l'équation fonctionnelle. Fixons $y > 0$ et dérivons par rapport à x l'identité $f(xy) = f(x) + f(y)$, licite car f est dérivable (règle de la chaîne, chapitre F2, avec la fonction intérieure $x \mapsto xy$) :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad y f'(xy) = f'(x).$$

En particulier, pour $x = 1$: $\forall y \in]0; +\infty[, \quad f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$.

Reconnaître le logarithme. Posons $k = f'(1)$ et $g = f - k \ln$, dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $\forall y \in]0; +\infty[, \quad g'(y) = \frac{k}{y} - \frac{k}{y} = 0$: sur cet intervalle, g est constante, égale à $g(1) = f(1) - k \ln 1 = 0$. Donc $f = k \ln$: toute machine à produits dérivable est un logarithme, celui de la base $e^{1/k}$ si $k \neq 0$, ou la fonction nulle si $k = 0$. ■

Ce petit théorème est un premier contact avec un grand thème : caractériser une fonction non par sa formule, mais par l'équation qu'elle satisfait. En classe préparatoire, ces équations fonctionnelles forment un genre à part entière.

JALON

Je sais définir $\log_a$, calculer avec $\log_{10}$ et $\log_2$, et passer d'une base à l'autre.

OBJECTIFS

- ▷ Compter les chiffres d'un entier
- ▷ Prédire le coût d'une dichotomie
- ▷ Rencontrer la densité des nombres premiers

7. LN AU TRAVAIL

Une fonction se juge à ses œuvres. Voici quatre endroits, tous intérieurs aux mathématiques, où le logarithme accomplit ce qu'aucun autre outil ne sait faire : mesurer des ordres de grandeur.

7.1. Compter les chiffres sans écrire le nombre

Combien l'entier 2^{100} a-t-il de chiffres en écriture décimale ? Le calculer pour les compter serait un aveu d'échec. Le logarithme décimal répond sans calculer : un entier a d chiffres exactement lorsqu'il vit entre 10^{d-1} et 10^d , et $\log$ lit ces encadrements.

PROPRIÉTÉ – FORMULE DU NOMBRE DE CHIFFRES

Tout entier $N \geq 1$ possède exactement $\lfloor \log N \rfloor + 1$ chiffres en écriture décimale, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. La démonstration, un encadrement guidé à l'Atelier, tient en trois lignes.

Exemple – Le plus grand nombre premier connu

Le 12 octobre 2024, le projet collaboratif GIMPS établit que $2^{136\,279\,841} - 1$ est premier : le plus grand nombre premier connu à ce jour. Combien de chiffres ? Comme $2^{136\,279\,841}$ n'est pas une

puissance de 10, retrancher 1 ne change pas le compte, et :

$$\begin{aligned}\log(2^{136\,279\,841}) &= 136\,279\,841 \times \log 2 \\ &\approx 136\,279\,841 \times 0,301\,029\,995\,66 \approx 41\,024\,319,94,\end{aligned}$$

d'où 41 024 320 chiffres : de quoi remplir une vingtaine de romans. Les découvreurs connaissaient cette taille *avant* d'avoir jamais écrit le nombre : le logarithme mesure ce qu'on ne peut pas voir. Notez la précision exigée : avec l'arrondi courant $\log 2 \approx 0,301\,03$, l'erreur, multipliée par cent trente-six millions, déplacerait le compte d'un chiffre entier. Mesurer un géant demande un instrument à une dizaine de décimales.

L'ordre de grandeur d'un nombre, c'est son logarithme décimal arrondi : dire que l'univers observable contient environ 10^{80} atomes, c'est donner $\log N \approx 80$ et renoncer, lucidement, au reste.

7.2. Prédire le coût d'une dichotomie

Depuis le chapitre F1, la dichotomie est notre outil à tout faire : chaque étape divise par 2 la longueur de l'intervalle de recherche. Combien d'étapes pour atteindre une précision ε en partant d'un intervalle de longueur L ? Il faut $\frac{L}{2^n} \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $2^n \geq \frac{L}{\varepsilon}$: une inéquation de seuil, que le paragraphe 3 sait résoudre.

$$n \geq \log_2 \frac{L}{\varepsilon} = \frac{\ln(L/\varepsilon)}{\ln 2}.$$

Sur $[0; 1]$ avec $\varepsilon = 10^{-6}$: $n \geq \log_2 10^6 \approx 19,9$, donc **20 étapes**, ni plus ni moins. Le paragraphe 8 vérifiera cette prédiction en direct. Six décimales exigent vingt étapes, neuf en exigeraient trente : le coût croît comme le *logarithme* de la précision demandée, et c'est précisément pour cela que la dichotomie est efficace.

7.3. Gauss, quinze ans, et la densité des nombres premiers ♦

En 1792, un lycéen de Brunswick nommé Carl Friedrich Gauss dépouille des tables de nombres premiers, tranche de mille par tranche de mille. Les premiers se raréfient, c'est entendu ; mais à *quelle vitesse* ? Gauss note au dos d'une table une conjecture d'une audace folle : autour d'un grand entier n , la proportion de nombres premiers est environ $\frac{1}{\ln n}$. Autrement dit, si $\pi(x)$ désigne le nombre de premiers inférieurs ou égaux à x :

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \quad \text{pour } x \text{ grand.}$$

ÉCHO EXO

EXO-F3 · Ex. 23–28 ★★

Histoires et belles mathématiques : la table de Stifel, le comma du guitariste, e^π contre π^e , le couple unique et la marche harmonique. ■ ♦ ★

x	$\pi(x)$ (exact)	$x/\ln x$	rapport
10^2	25	21,7	1,151
10^4	1 229	1 085,7	1,132
10^6	78 498	72 382,4	1,084
10^9	50 847 534	48 254 942,4	1,054

Le rapport fond vers 1 : la conjecture du lycéen est un théorème, le **théorème des nombres premiers**, mais il faudra attendre 1896, et des mathématiciens d'une tout autre puissance (Hadamard et La Vallée Poussin, indépendamment), pour le démontrer. Gauss n'a jamais publié sa note : il la révélera dans une lettre, en 1849, cinquante-sept ans après.

Arrêtons-nous sur ce que ce théorème dit du logarithme : né dans des tables de calcul pour *accélérer des multiplications*, le voilà, deux siècles plus tard, qui gouverne la répartition des nombres premiers, l'objet le plus multiplicatif qui soit. La machine à produits mesure la matière première des produits. Ce n'est plus un outil : c'est une loi de la nature arithmétique.

Pourquoi des tables de logarithmes donnaient-elles aussi les nombres premiers ? Parce que les recueils de l'époque imprimaient les deux côte à côte : le jeune Gauss avait reçu en cadeau un tel volume. Le hasard fait bien les choses : la clé de la répartition des premiers figurait sur la page d'en face.

Gauss · 1792

7.4. La promesse de l'aire

Une dernière œuvre, en forme de rendez-vous. En 1647, le jésuite Grégoire de Saint-Vincent étudie l'aire sous l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et découvre une propriété étrange : quand les abscisses progressent *géométriquement*, les aires progressent *arithmétiquement*. Des produits d'un côté, des sommes de l'autre : vous reconnaissez la signature. Son élève Sarasa l'écrit noir sur blanc : **l'aire sous l'hyperbole est un logarithme**. Le chapitre F6, consacré au calcul intégral, donnera un sens précis à cette aire et démontrera que, entre les abscisses 1 et x , elle vaut exactement $\ln x$: la dérivée $\frac{1}{x}$ du paragraphe 4 n'attendait que cette explication géométrique.

SUITE →

F6 · Calcul intégral

L'aire sous $y = \frac{1}{x}$ entre 1 et x vaut exactement $\ln x$.

8. LE LABORATOIRE : CALCULER $\ln 2$ SANS LA TOUCHE LN

D'où viennent les valeurs que crache la touche $\ln$ de la calculatrice ? Ce laboratoire fabrique $\ln 2$ à la main, deux fois : par la dichotomie, notre méthode de toujours, puis par la méthode historique de Briggs, celle des tables de 1624. Interdiction d'utiliser la touche $\ln$, évidemment.

8.1. Par dichotomie

Puisque $\ln 2$ est *défini* comme la solution de $e^x = 2$, la dichotomie du chapitre F1 s'applique mot pour mot : encadrer la solution, couper au milieu, garder la bonne moitié. Il faut un intervalle de départ : l'inégalité de la tangente du paragraphe 4 l'offre gratuitement, car $\ln 2 < 2 - 1 = 1$ (l'égalité n'ayant lieu qu'en 1), et $\ln 2 > 0$ puisque $2 > 1$. Donc $\ln 2 \in]0 ; 1[$.

```
1 from math import exp, sqrt
```

JALON

Je sais compter les chiffres d'un entier par $\log$, prédire le coût d'une dichotomie par $\log_2$, et raconter ce que $\ln$ dit des nombres premiers.

OBJECTIFS

- ▷ Programmer $\ln$ par dichotomie
- ▷ Programmer la méthode de Briggs
- ▷ Comparer les deux stratégies

```

2
3 def ln_dichotomie(y, eps):      # resout exp(x) = y
4     a, b = 0, y - 1           # y >= 1 : ln y <= y-1
5     while b - a > eps:
6         m = (a + b) / 2
7         if exp(m) < y:
8             a = m
9         else:
10            b = m
11    return (a + b) / 2
12
13 print(ln_dichotomie(2, 1e-6))    # 0.6931471...

```

Le paragraphe 7 avait prédit le coût : partir d'un intervalle de longueur 1 et viser 10^{-6} coûte $\lceil \log_2 10^6 \rceil = 20$ tours de boucle. L'exécution en confirme exactement vingt (comptez-les en ajoutant un compteur) : la théorie du chapitre prédit le comportement de son propre programme.

Relisez la ligne `a, b = 0, y - 1` : c'est l'inégalité $\ln y \leq y - 1$ du paragraphe 4, devenue une borne d'initialisation, valable pour $y \geq 1$. Pour $0 < y < 1$, l'encadrement tombe : on calculerait $\ln y = -\ln \frac{1}{y}$. Une inégalité de cours est un fait utilisable, pas une relique d'épreuve.

8.2. Par la méthode de Briggs (1624)

Briggs n'avait ni exponentielle ni dérivée : il n'avait que la racine carrée, qu'on savait extraire à la main. Son idée, traduite dans nos notations : extraire la racine carrée de 2, puis la racine de la racine, et ainsi de suite k fois ($k \in \mathbb{N}^*$), c'est calculer

$$2^{1/2^k} = e^{\ln 2 / 2^k},$$

un nombre de la forme e^h avec $h = \frac{\ln 2}{2^k}$ minuscule. Or, pour h proche de 0, le taux d'accroissement de $\exp$ en 0, connu depuis la première (et revu au paragraphe 4), dit que $\frac{e^h - 1}{h} \approx 1$, c'est-à-dire $e^h - 1 \approx h$. Donc :

$$2^{1/2^k} - 1 \approx \frac{\ln 2}{2^k}, \quad \text{d'où} \quad \ln 2 \approx 2^k (2^{1/2^k} - 1).$$

Extraire des racines, retrancher 1, multiplier par 2^k : trois opérations élémentaires, et le logarithme apparaît.

```

1 def ln_briggs(y, k):          # k racines carrees
2     x = y
3     for _ in range(k):
4         x = sqrt(x)
5     return 2**k * (x - 1)      # x = y**(1/2**k)
6
7 print(ln_briggs(2, 25))       # 0.6931471...

```

ÉCHO EXO

EXO-F3 · Ex. 29–31 ★★

Le laboratoire : le compteur prophétique,
les deux routes chronométrées vers $\ln 2$,
et le premier chiffre du géant de Mer-
senne. ■ ♦ ★

L'erreur, c'est-à-dire l'écart entre $\ln_briggs(2, k)$ et la vraie valeur de $\ln 2$, fond à mesure que k grandit (valeurs recalculées) :

k	5	10	15	20	25
erreur	$7,6 \times 10^{-3}$	$2,3 \times 10^{-4}$	$7,3 \times 10^{-6}$	$2,3 \times 10^{-7}$	$9,4 \times 10^{-9}$

Chaque racine supplémentaire divise l'erreur par 2 environ, du moins

en arithmétique exacte : au-delà de $k \approx 26$, l'erreur des flottants de Python cesse de décroître, puis explose, car la soustraction $x - 1$ efface les décimales durement acquises (essayez $k = 54$: le programme rend 0,0, cherchez pourquoi). Briggs, lui, calculait à trente décimales : pour ses quatorze décimales publiées, il a extrait cinquante-quatre racines carrées de 10, à la plume, sans jamais se tromper. La touche ln de votre calculatrice est l'héritière directe de cette obstination.

Au passage, Briggs invente pour accélérer ses calculs les différences finies, et découvre le développement du binôme pour l'exposant $\frac{1}{2}$, un demi-siècle avant que Newton ne le généralise. Les tables étaient un laboratoire, pas une corvée.

Briggs · 1624

PRODUITS EN SOMMES, POUR TOUJOURS

Au départ, une équation insoluble, $e^x = 2$, et un théorème d'existence qui ne donnait pas la solution. À l'arrivée, une fonction complète, avec ses deux visages :

visage	ce qu'il donne
réci-proque de exp	les équations et seuils résolus, la dérivée $\frac{1}{x}$, les limites
machine produits $\rightarrow$ sommes	la famille algébrique, les $\log_a$, les ordres de grandeur

Les deux visages n'en font qu'un : c'est *parce que* ln défait l'exponentielle qu'il transforme les produits en sommes, et c'est cette double nature qui le rend inusable. La suite de l'année le confirmera. Au chapitre F5, la fonction $\frac{1}{x}$ cherchera une primitive parmi les fonctions de référence, ne la trouvera pas, et ln comblera ce vide, seul candidat possible. Au chapitre F6, l'aire de Saint-Vincent sera enfin calculée, et la boucle ouverte au paragraphe 7 se fermera. Plus loin, en probabilités comme en classe préparatoire, chaque fois qu'un produit de nombreux facteurs devra être dompté, une vraisemblance, une factorielle, un produit infini, le premier réflexe restera celui de Napier : prendre le logarithme, et laisser la somme faire le travail.

JALON

Je sais programmer le calcul de $\ln y$ par dichotomie et par la méthode de Briggs, et justifier mathématiquement chacune des deux méthodes.

SUITE $\rightarrow$

F5 · Primitives

Toute fonction de référence a une primitive dans le catalogue, sauf $\frac{1}{x}$: le logarithme prendra le poste vacant.