



DM 1 · F3. POURQUOI DOUZE NOTES ?

De la forge de Pythagore au clavier de Bach

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. La spirale des quintes	△▲	les préliminaires
II. Le cent, mesure de la musique	△▲	R1 et la partie I
III. L'algorithme des accordeurs	△▲	R3 et la partie II
IV. Le clavier bien tempéré	△▲	les parties II et III ; calculatrice et Python
V. Les réduites sont imbattables	△▲◆	la partie III

Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Une question posée sur un clavier

REGARDEZ un piano : de chaque do au do suivant, douze touches, sept blanches et cinq noires. Une guitare : douze frettes pour parcourir l'octave. Douze notes en Occident, depuis des siècles, et personne ne semble trouver cela étrange. Pourquoi pas dix, comme les doigts, ou seize, comme les mesures ? La réponse n'est ni une convention ni un hasard : c'est un théorème, et il repose tout entier sur la vedette de ce chapitre, le logarithme. L'histoire commence il y a vingt-cinq siècles avec une corde tendue, passe par l'algorithme le plus ancien des mathématiques, celui d'Euclide, traverse la Chine des Han et celle des Ming, et s'achève sur le clavier de Jean-Sébastien Bach. Ce devoir refait le chemin : il construit la gamme comme les pythagoriciens, mesure la musique au logarithme, découvre que douze est le dénominateur d'une fraction très spéciale, et culmine sur le théorème qui garantit qu'aucun cycle de moins de quarante et une quintes ne se referme mieux que celui des douze notes.

Q1. Le monocorde. Les faits d'acoustique suivants sont admis dans tout le devoir : une corde tendue produit un son dont la fréquence est *inversement proportionnelle* à sa longueur ; et deux notes « sonnent bien » ensemble quand le rapport de leurs fréquences est une fraction simple. Les deux consonances reines sont l'*octave* (rapport 2) et la *quinte* (rapport $\frac{3}{2}$). Enchaîner deux intervalles, c'est *multiplier* leurs rapports.

- a) $\triangle$ Une corde de 60 cm donne une note de fréquence f . À quelle longueur faut-il la pincer pour entendre l'octave (fréquence $2f$) ? La quinte (fréquence $\frac{3}{2}f$) ? La *quarte* (fréquence $\frac{4}{3}f$) ? Vérifier qu'une quinte suivie d'une quarte reconstitue exactement l'octave.
- b) $\triangle$ Enchaîner deux quintes donne le rapport $\frac{9}{4}$, qui dépasse 2 : la note obtenue sort de l'octave. On la ramène en divisant par 2 (descendre d'une octave ne change pas le nom de la note). Quel rapport obtient-on ? C'est le *ton*, la brique des gammes ; tout ce devoir est né de ce petit calcul.

CROTONE, VI^E SIÈCLE AVANT NOTRE ÈRE

La légende veut que Pythagore, passant devant une forge, ait entendu des marteaux consonants et découvert que leurs poids étaient en rapports simples. C'est une belle histoire, et elle est fautive : la fréquence d'un marteau ne suit pas son poids, et l'expérience ne fonctionne pas. Mais le fond est exact, et les pythagoriciens l'ont vérifié sur un instrument fait pour cela, le *monocorde* : une corde, un chevalet mobile, et la découverte fondatrice que la consonance est affaire de *rapports de nombres entiers*. C'est peut-être la première loi physique quantitative de l'histoire, et elle a convaincu les Grecs que le monde entier était nombre.

Notations et outils. Dans tout le document, un *intervalle musical* est un rapport de fréquences $r > 0$; l'octave est 2, la quinte $\frac{3}{2}$. Les résultats encadrés R1 à R5 peuvent être cités partout. Le devoir repose sur le logarithme *binnaire* du cours : tout ce qui le dépasse est construit ici.

R1 – LE LOGARITHME BINAIRE ET LES PUISSANCES RÉELLES

Pour tout réel t , on note $2^t = e^{t \ln 2}$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$. Alors, pour tous $x, y \in]0; +\infty[$ et tous réels s et t :

$$\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y, \quad \log_2(x^t) = t \log_2 x, \quad 2^{s+t} = 2^s 2^t, \quad \log_2(2^t) = t.$$

La fonction $\log_2$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. (Admis : cours F3, § 2 et § 6.)

R2 – AUCUNE PUISSANCE COMMUNE

Il n'existe aucun couple d'entiers naturels non nuls (p, q) tel que $(\frac{3}{2})^p = 2^q$. (Démontré à l'Atelier, exercice « Le comma du guitariste », dernière question.)

R3 – IRRATIONALITÉ

Le nombre $\log_2 3$ est irrationnel. Il en va de même de $\log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - 1$: si l'un s'écrivait comme une fraction, l'autre aussi. (Démontré à l'Atelier, exercice « Aucune fraction ».)

DÉFINITION – PARTIE ENTIÈRE

Pour tout réel x , la *partie entière* $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif m tel que $m \leq x < m + 1$. Par exemple $\lfloor 1,58 \rfloor = 1$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$, $\lfloor -0,3 \rfloor = -1$.

La spirale des quintes

Le programme des pythagoriciens tient en une phrase : engendrer *toutes* les notes à partir des deux seules consonances parfaites, l'octave et la quinte. On part d'une note, on monte de quinte en quinte, et chaque fois que l'on sort de l'octave, on redescend d'autant d'octaves qu'il faut pour y rentrer. La question de tout le devoir est de savoir si ce voyage se termine.

DÉFINITION – RÉDUCTION À L'OCTAVE

Soit $r \geq 1$ un rapport de fréquences. Réduire r à l'octave, c'est le remplacer par $\frac{r}{2^m}$, où $m \in \mathbb{N}$ est choisi pour que $\frac{r}{2^m} \in [1; 2[$: même note, ramenée dans l'octave de départ.

Q2. La gamme de Pythagore.

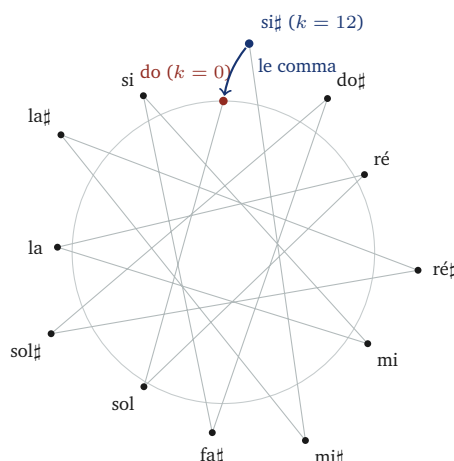
- ▲ Justifier, à l'aide de R1, que pour tout réel $r \geq 1$ il existe un *unique* entier naturel m tel que $\frac{r}{2^m} \in [1; 2[$, et qu'il vaut $m = \lfloor \log_2 r \rfloor$: la réduction à l'octave est bien définie, et c'est déjà le logarithme qui la pilote. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)
- △ Pour $k = 7$: vérifier à la main que $\left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{128}$, puis que sa réduction à l'octave est $\frac{2187}{2048}$.
- △ La table ci-dessous donne les douze premières quintes empilées, réduites à l'octave (l'entier k désigne la note atteinte après k quintes). Compléter les valeurs décimales manquantes à 10^{-5} près, et vérifier au passage que chacune est bien dans $[1; 2[$.

k	note	rapport réduit	valeur décimale
0	do	1	1
1	sol	$3/2$	1,5
2	ré	$9/8$	1,125
3	la	$27/16$	1,6875
4	mi	$81/64$	...
5	si	$243/128$	...
6	fa♯	$729/512$	...
7	do♯	$2187/2048$	1,06787
8	sol♯	$6561/4096$	...
9	ré♯	$19\,683/16\,384$	...
10	la♯	$59\,049/32\,768$	...
11	mi♯	$177\,147/131\,072$	...
12	si♯	$531\,441/524\,288$	1,01364

Q3. La spirale ne se referme jamais.

- ▲ Supposons qu'après $k \geq 1$ quintes, la réduction à l'octave retombe *exactement* sur 1, la note de départ. Montrer qu'il existerait alors un entier naturel non nul q tel que $\left(\frac{3}{2}\right)^k = 2^q$, et conclure à l'aide de R2 : le cycle des quintes ne se referme jamais, quelle que soit la patience de l'accordeur.
- ▲ Plus fort : montrer que les notes de la spirale sont deux à deux *distinctes* (si deux réductions coïncidaient pour $k < \ell$, appliquer le même argument à $\ell - k$ quintes). La spirale est donc infinie : chaque tour apporte des notes nouvelles, à jamais.
- △ Tout serait perdu sans la dernière ligne de la table : après douze quintes, la spirale *frôle* son point de départ. L'écart est le rapport $\frac{531\,441}{524\,288} \approx 1,01364$, le *comma pythagorien*, que vous avez déjà calculé

à l'Atelier sous la forme $(\frac{3}{2})^{12}/2^7$. Vérifier l'égalité $\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288}$: douze quintes valent *presque* sept octaves, et tout l'art des gammes va consister à escamoter ce « presque ».



La spirale des quintes : chaque segment gris est une quinte, chaque tour de cadran une octave. Après douze quintes, la note $k = 12$ frôle le do initial sans le toucher : l'écart est le comma pythagoricien, et Q3 démontre qu'aucun nombre de quintes, jamais, ne le fera disparaître.

PARTIE II

s'appuie sur R1 et la partie I

Le cent, mesure de la musique

Multiplier des rapports devient vite illisible : l'oreille, elle, perçoit les intervalles comme des *distances*, qui s'additionnent. Il faut donc une règle graduée qui transforme les produits en sommes ; c'est très exactement le métier du logarithme, et la musicologie a la sienne depuis le XIX^e siècle.

DÉFINITION – LE CENT

Pour tout rapport $r > 0$, la *mesure en cents* de l'intervalle r est

$$c(r) = 1200 \log_2 r.$$

L'octave vaut ainsi $c(2) = 1200$ cents, et le cent est le centième du demi-ton de la gamme moderne, comme la partie IV le confirmera.

Q4. La règle graduée de l'accordeur.

- a) $\triangle$ Vérifier $c(1) = 0$ et $c(2) = 1200$, puis démontrer, à l'aide de R1, que pour tous rapports $r, s > 0$:

$$c(rs) = c(r) + c(s), \quad c\left(\frac{1}{r}\right) = -c(r), \quad c(r^k) = k c(r) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Enchaîner des intervalles, c'est désormais *additionner* des longueurs : la machine à produits du chapitre est devenue le mètre-ruban de la musique. (ce résultat peut être admis pour la suite)

- b) $\triangle$ Calculer $c(\frac{3}{2})$ à 10^{-3} près, puis, *sans nouvelle valeur approchée*, exprimer $c(\frac{4}{3})$ et $c(\frac{9}{8})$ à l'aide de $c(\frac{3}{2})$ et de 1200 (on se souviendra que $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$ et que $\frac{9}{8} = \frac{3}{2} \div \frac{4}{3}$). En donner les valeurs à 10^{-3} près.

- c) ▲ Démontrer que le comma pythagoricien mesure exactement $12c(\frac{3}{2}) - 8400$ cents, et donner sa valeur à 10^{-3} près. L'oreille humaine distingue deux notes à partir de quelques cents d'écart : le comma, environ un quart de demi-ton, s'entend très nettement.

Q5. Le rêve impossible de la gamme juste. On appelle *gamme égale* à n degrés ($n \in \mathbb{N}^*$) la gamme qui découpe l'octave en n intervalles identiques : ses notes sont aux rapports $2^{k/n}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, et chaque degré mesure $\frac{1200}{n}$ cents.

- a) ▲ Montrer, à l'aide de R1, que la quinte pure tombe exactement sur un degré de la gamme si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\log_2 \frac{3}{2} = \frac{p}{n}$.
- b) ▲ Conclure avec R3 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \quad 2^{p/n} \neq \frac{3}{2}$$

Aucune gamme égale, quel que soit le nombre de ses notes, ne contiendra jamais de quinte rigoureusement juste. Toute gamme est donc un *compromis* : le jeu n'est plus d'atteindre $\log_2 \frac{3}{2}$, mais de s'en approcher au mieux par une fraction $\frac{p}{n}$, avec n raisonnable. Tout le reste du devoir est l'histoire de ce jeu.

Q6. Le tournoi des petites gammes. Pour une gamme égale à n degrés, le mieux est de placer la quinte sur le degré p le plus proche de $n \log_2 \frac{3}{2} \approx 0,58496 n$; l'erreur commise, en cents, est $|1200 \frac{p}{n} - c(\frac{3}{2})|$.

- a) △ Compléter la table du tournoi à 10^{-3} près :

n	meilleur degré p	quinte de la gamme (cents)	erreur (cents)
1	1	1200	498,045
2	1	600	101,955
3	2	800	98,045
4	2	600	101,955
5	3	720	...
6	4	800	98,045
7	4	...	...
8	5	750	48,045
9	5	666,667	35,288
10	6	720	18,045
11	6	654,545	47,410
12	...	...	...

- b) △ Commenter le résultat : que fait $n = 12$ aux onze concurrents qui le précèdent ? On notera aussi les scores honorables de $n = 5$ et $n = 7$: la gamme *pentatonique* à cinq notes et les gammes à sept degrés portent une grande part des musiques du monde, et ce n'est pas un hasard.

L'algorithme des accordeurs

Essayer tous les n l'un après l'autre est une stratégie de brute. Il existe un procédé qui trouve les champions *directement*, et c'est le plus vieil algorithme des mathématiques : celui d'Euclide, qui soustrait sans relâche le plus petit du plus grand. Appliqué à l'octave et à la quinte, il va engendrer, un à un, tous les intervalles célèbres de la théorie musicale, puis livrer la clef de la question des douze notes.

Q7. L'octave contre la quinte.

- a) $\triangle$ Ôter un intervalle d'un autre, c'est *diviser* les rapports (Q4a). Vérifier les quatre identités exactes :

$$\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}, \quad \frac{3/2}{4/3} = \frac{9}{8}, \quad \frac{4/3}{(9/8)^2} = \frac{256}{243}, \quad \frac{9/8}{(256/243)^2} = \frac{531\,441}{524\,288}.$$

En français : l'octave contient une quinte, et il reste une quarte ; la quinte contient une quarte, et il reste un ton ; la quarte contient deux tons, et il reste le *limma* ($256/243$, le demi-ton des Grecs) ; le ton contient deux limmas, et il reste très exactement le comma de la partie I.

- b) $\triangle$ Traduire cette cascade en cents à l'aide de Q4, puis la prolonger de deux crans : compléter

$$1200 = 1 \times 701,955 + 498,045, \quad 701,955 = 1 \times 498,045 + \dots,$$

$$498,045 = 2 \times 203,910 + \dots, \quad 203,910 = 2 \times \dots + 23,460,$$

$$90,225 = 3 \times 23,460 + \dots, \quad 23,460 = 1 \times 19,845 + \dots$$

C'est mot pour mot l'algorithme d'Euclide, appliqué au couple (octave, quinte) : à chaque ligne, on retranche du grand intervalle autant de copies du petit que possible, et le reste devient le petit de la ligne suivante.

- c) $\blacktriangle$ Pour deux *entiers*, l'algorithme d'Euclide s'arrête toujours (le reste finit par être nul). Montrer que si l'algorithme ci-dessus s'arrêtait, le nombre $\log_2 \frac{3}{2}$ serait rationnel, et conclure avec R3 : l'octave et la quinte sont *incommensurables*, et la cascade d'intervalles ne s'arrêtera jamais.

DÉFINITION – FRACTION CONTINUE

Soit x un réel irrationnel positif. On pose $a_0 = \lfloor x \rfloor$ puis $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$, et l'on recommence : $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, et ainsi de suite (aucune division ne s'interrompt : x étant irrationnel, aucun x_k n'est entier). Les entiers $a_0, a_1, a_2, \dots$ sont les *quotients* de x , et l'on écrit

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad \text{noté} \quad x = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Ce sont les quotients successifs de l'anthyphère, le nom grec de la soustraction répétée de Q7.

Q8. Le développement de $\log_2 3$. On applique l'algorithme à $x = \log_2 3$.

- a) $\blacktriangle$ Justifier, par la stricte croissance de $\log_2$ (R1), que $a_0 = \lfloor \log_2 3 \rfloor = 1$, et vérifier que $x - a_0 = \log_2 \frac{3}{2}$.

- b) ▲ En déduire que $x_1 = \frac{1200}{c(\frac{3}{2})} = \frac{1200}{701,955\dots}$, puis que $a_1 = 1$ est le quotient de la première ligne de Q7b. On admet que le parallèle se poursuit : *les quotients suivants de $\log_2 3$ sont exactement les quotients successifs de l'anthyphérèse de l'octave par la quinte*. Conclure, à l'aide de Q7b :

$$\log_2 3 = [1; 1, 1, 2, 2, 3, \dots].$$

(ce résultat peut être admis pour la suite)

R4 – LES RÉDUITES

Soit $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ un irrationnel positif. On construit deux suites d'entiers par $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_1 a_0 + 1, q_1 = a_1$, puis, pour tout $k \geq 2$:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

On admet que la fraction $\frac{p_k}{q_k}$, appelée k^{e} réduite de x , est la valeur exacte de la fraction étagée $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ tronquée au rang k . Les réduites sont les héroïnes de la partie V.

Q9. La table des gammes.

- a) △ À l'aide des quotients $[1; 1, 1, 2, 2, 3]$ et de la récurrence de R4, calculer les réduites successives de $\log_2 3$ et vérifier :

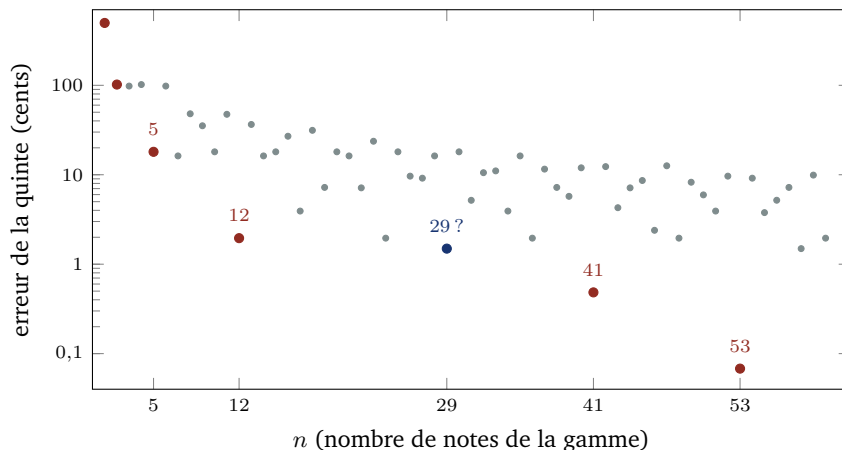
$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{19}{12}, \quad \frac{65}{41}.$$

(Le quotient suivant, $a_6 = 1$, se lit sur la dernière ligne de la cascade de Q7b ; il donne $\frac{84}{53}$: gardez ce nombre en réserve, la partie IV lui doit son plus beau moment.)

- b) △ En retranchant 1 à chaque réduite (rappel : $\log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - 1$), en déduire les approximations fractionnaires de la *quinte en octaves* :

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{24}{41}, \quad \frac{31}{53}.$$

- c) ▲ Traduire en musicien : une approximation $\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{p}{n}$ est une gamme égale à n notes dont la quinte occupe le degré p . Reconnaitre dans la liste du b) la gamme pentatonique ($n = 5$), la nôtre ($n = 12$), et deux gammes savantes ($n = 41$ et $n = 53$). Calculer l'erreur de quinte, en cents, des gammes 5, 12 et 53, et comparer aux champions du tournoi de Q6.
- d) △ Formuler la réponse à la question du titre du devoir en une phrase : pourquoi douze ?



Le grand tournoi, gammes de 1 à 60 notes (échelle verticale logarithmique : chaque graduation divise l'erreur par dix). Les dénominateurs des réduites, en rouge, écrasent leurs voisins. Le point bleu $n = 29$, qui n'est pas une réduite, semble pourtant battre $n = 12$: cette anomalie est une vraie subtilité, et la question Q16 lui est réservée.

D'ALEXANDRIE À SAINT-PÉTERSBOURG

La soustraction répétée est au cœur des *Éléments* d'Euclide (vers 300 avant notre ère), où elle mesure deux grandeurs l'une par l'autre et détecte leur incommensurabilité. L'écriture en fractions étagées, elle, est bien plus tardive : esquissée par Bombelli puis Cataldi autour de 1600, elle devient une théorie complète quand Euler, à Saint-Petersbourg, présente en 1737 son *De fractionibus continuis* (publié en 1744) : le même Euler que celui du nombre e , dont le cours a raconté la mise en ordre des logarithmes. Les réduites et leurs propriétés d'approximation, que la partie V démontrera, sont le joyau de cette théorie.

PARTIE IV

s'appuie sur les parties II et III ; calculatrice et Python

Le clavier bien tempéré

La gamme de Pythagore de la partie I a douze notes, mais elles sont inégales, et sa quinte du loup (celle qui doit refermer le cycle en avalant le comma) hurle assez pour mériter son nom. La solution radicale s'impose entre le XVI^e et le XVIII^e siècle : puisque douze est le bon nombre, découpons l'octave en douze degrés *rigoureusement égaux*, et répartissons le comma sur tout le monde. C'est le *tempérament égal*, la gamme de tous les pianos modernes.

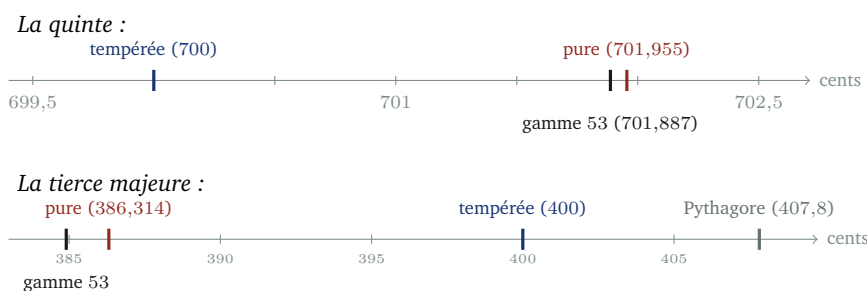
Q10. Douze douzièmes d'octave.

- △ Le rapport $r > 0$ d'un degré de la gamme égale à douze notes vérifie $r^{12} = 2$. Justifier, à l'aide de R1, que $r = 2^{1/12}$ est l'unique solution strictement positive, et en donner une valeur approchée à 10^{-6} près.
- ▲ Démontrer, avec R1, que la quinte tempérée vaut *exactement* $c(2^{7/12}) = 700$ cents, et en déduire son erreur par rapport à la quinte pure, à 10^{-3} près.
- ▲ Démontrer l'identité *exacte* qui justifie le mot « répartir » :

$$c\left(\frac{3}{2}\right) - 700 = \frac{1}{12} c\left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)$$

La quinte tempérée est la quinte pure rabotée d'exactement un douzième de comma : le défaut que la spirale concentrait sur une seule quinte du loup est réparti, invisible, sur les douze. (ce résultat peut être admis pour la suite)

- △ La vraie victime du marché est ailleurs. La *tierce majeure* pure, votre $\frac{5}{4}$, mesure $c(\frac{5}{4}) \approx 386,314$ cents ; que vaut la tierce de la gamme tempérée (quatre degrés) ? Comparer les deux erreurs : celle de la quinte tempérée et celle de la tierce tempérée. (La gamme de Pythagore faisait pire encore : sa tierce $\frac{81}{64}$, la note $k = 4$ de la spirale, est à 407,820 cents, trahison que les musiciens de la Renaissance ont refusée les premiers.)



Deux règles graduées en cents (attention, les échelles diffèrent d'un facteur huit). La quinte se joue à moins de deux cents ; la tierce, à des dizaines : c'est elle que chaque tempérament sacrifie ou sauve.

PÉKIN, 1584

Le premier calcul complet du tempérament égal n'est ni européen ni musicalement timide : le prince Zhu Zaiyu, mathématicien et musicologue de la dynastie Ming, publie en 1584 les douze rapports de la gamme égale, obtenus par extractions de racines (deux racines carrées puis une cubique donnent $2^{1/12}$), avec, selon les sources, vingt-quatre chiffres exacts calculés au boulier. L'Europe y vient par d'autres chemins : Simon Stevin vers 1600, puis les organistes allemands ; Andreas Werckmeister publie en 1691 ses tempéraments « bien ordonnés », et en 1722 Jean-Sébastien Bach compose *Le Clavier bien tempéré*, vingt-quatre préludes et fugues dans les vingt-quatre tonalités, manifeste d'un clavier enfin capable de moduler partout. Les musicologues débattent encore du tempérament exact que Bach avait en tête : « bien tempéré » ne veut pas forcément dire « également tempéré », et c'est toute la saveur du titre.

Q11. La gamme des astronomes : cinquante-trois. La réduite $\frac{84}{53}$ mise en réserve en Q9 promet une gamme à 53 notes, de quinte $\frac{31}{53}$.

- △ L'exploit repéré par le théoricien chinois Jing Fang il y a plus de deux mille ans : calculer, en cents, l'écart entre 53 quintes pures et 31 octaves, à 10^{-3} près. (On l'a déjà rencontré : c'est le reste de la dernière ligne de la cascade de Q7b, appelé depuis *comma de Mercator*.)
- △ Calculer l'erreur de la quinte de la gamme 53, en cents, et vérifier qu'elle fait environ 29 fois mieux que notre gamme à douze.
- ▲ Le petit miracle : la gamme 53 sert aussi la tierce. Trouver le degré p qui minimise l'écart entre $\frac{1200p}{53}$ et $c(\frac{5}{4}) \approx 386,314$, et donner l'erreur à 10^{-2} près. Rien ne l'imposait : le développement de $\log_2 \frac{5}{4}$ est un tout autre nombre, et cette double réussite est la vraie raison de la célébrité de 53.
- △ Personne, pourtant, ne fabrique de piano à 53 touches par octave. Proposer, en une phrase, la raison de ce renoncement.

Q12. Le tournoi complet, à la machine. Le script « tournoi des gammes » de l'annexe B parcourt toutes les gammes égales jusqu'à $n = 1000$ et affiche chaque nouveau record d'erreur de quinte.

- △ Compléter la ligne manquante (l'erreur en cents), exécuter, et relever les records situés au-delà de 53.
- ▲ Commenter en deux phrases : combien de touches faut-il payer pour battre 53, et pour quel gain audible ? On admettra que des écarts de quelques centièmes de cent sont inaudibles. Conclure : dans l'histoire réelle de la musique, douze et cinquante-trois sont restés les deux grands compromis, et tous deux sont des dénominateurs de réduites.

DE CHANG'AN À LONDRES

Jing Fang, théoricien de la cour des Han (mort en 37 avant notre ère), prolonge le cycle chinois des douze *lǚ* et note qu'après 53 quintes la spirale frôle sa fermeture : son cinquante-quatrième tuyau sonne presque comme

le premier. Dix-sept siècles plus tard, Nicolaus Mercator, que vous connaissez déjà : c'est l'homme de la série de $\ln(1+x)$ racontée dans les Coulisses de ce chapitre, refait le calcul en Europe dans des manuscrits restés inédits, que William Holder popularisera ; le minuscule excédent de 53 quintes sur 31 octaves porte depuis son nom. La gamme à 53 degrés eut ses instruments : l'harmonium géant de Bosanquet (1876), toujours visible dans les collections scientifiques anglaises, offrait ses cinquante-trois touches par octave aux oreilles les plus exigeantes du XIX^e siècle.

PARTIE V

s'appuie sur la partie III

Les réduites sont imbattables

La partie III a constaté sur une figure que les réduites écrasent le tournoi ; il reste à le *démontrer*, et c'est le sommet du devoir : un théorème de classe préparatoire, conquis pas à pas. Dans toute cette partie, x désigne un irrationnel positif de quotients $a_0 \in \mathbb{N}$, et $a_k \geq 1$ pour $k \geq 1$; les suites (p_k) et (q_k) sont celles de R4. L'enjeu est de donner un sens précis, puis une preuve, à la phrase : « aucune fraction de dénominateur raisonnable ne fait mieux qu'une réduite ».

Q13. L'armature.

- a) ▲ Démontrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, $q_k \geq q_{k-1} \geq 1$, puis que $q_1 < q_2 < q_3 < \dots$: la suite des dénominateurs est strictement croissante à partir du rang 1 (on utilisera $a_k \geq 1$).
- b) ♦ Démontrer par récurrence que

$$\forall k \geq 1, \quad p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

(Initialiser avec $p_1 q_0 - p_0 q_1$, puis remplacer p_{k+1} et q_{k+1} par la récurrence de R4 : le déterminant change exactement de signe à chaque rang.) (ce résultat peut être admis pour la suite)

- c) ▲ En déduire deux conséquences : la fraction $\frac{p_k}{q_k}$ est irréductible (tout diviseur commun de p_k et q_k divise ± 1), et deux réduites consécutives sont à distance

$$\left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

R5 – L'ALTERNANCE

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le réel x est *strictement compris* entre $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$: les réduites l'encadrent en alternant, les rangs pairs par en dessous, les rangs impairs par au-dessus, et le serrent de plus en plus. (Admis : la démonstration, qui repose sur l'algorithme lui-même, attend la classe préparatoire.)

Q14. Le certificat de qualité.

- a) ▲ Déduire de R5 et de Q13c que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}}$$

Chaque réduite est automatiquement excellente, et c'est le dénominateur *suivant* qui certifie sa qualité.

- b) $\triangle$ Application à $x = \log_2 3$ et à la réduite $\frac{19}{12}$: que vaut la borne $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$? Traduire en cents (multiplier par 1200) et confronter à l'erreur de 1,955 cents constatée en Q9c : la théorie tient largement sa promesse.

Q15. Le théorème de la meilleure approximation. Voici l'énoncé exact de « imbattable ». Soit $k \geq 1$, et soit (p, q) un couple d'entiers avec $1 \leq q < q_{k+1}$ et $(p, q) \neq (p_k, q_k)$. Le théorème affirme :

$$|qx - p| > |q_k x - p_k|.$$

La quantité $|qx - p|$ mesure l'erreur à l'échelle du dénominateur ; le c) en donnera le sens musical. La démonstration tient en trois gestes.

- a) $\blacklozenge$ Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs (α, β) tel que

$$p = \alpha p_k + \beta p_{k+1} \quad \text{et} \quad q = \alpha q_k + \beta q_{k+1}.$$

(Résoudre le système : par Q13b, son déterminant vaut ± 1 , et les formules obtenues ne produisent que des entiers.)

- b) $\blacklozenge$ Montrer que si $\beta = 0$ alors $(p, q) = \alpha(p_k, q_k)$ avec $\alpha \geq 2$, et que ce cas donne directement $|qx - p| = \alpha |q_k x - p_k| > |q_k x - p_k|$ (on justifiera $|q_k x - p_k| > 0$). Montrer ensuite que si $\alpha = 0$, alors $q \geq q_{k+1}$: exclu. Enfin, si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, montrer que α et β sont de signes contraires (raisonner sur $q = \alpha q_k + \beta q_{k+1} < q_{k+1}$ avec $q > 0$).
- c) $\blacklozenge$ D'après R5, x est strictement compris entre $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$: en déduire que $q_k x - p_k$ et $q_{k+1} x - p_{k+1}$ sont de signes contraires, puis que, dans le dernier cas du b), les deux nombres $\alpha(q_k x - p_k)$ et $\beta(q_{k+1} x - p_{k+1})$ sont de même signe. Conclure :

$$|qx - p| = |\alpha| \cdot |q_k x - p_k| + |\beta| \cdot |q_{k+1} x - p_{k+1}| > |q_k x - p_k|,$$

et le théorème est démontré. (ce résultat peut être admis pour la suite)

- d) $\blacktriangle$ Le corollaire musical. On admet que $\log_2 \frac{3}{2} = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \dots]$: mêmes quotients que $\log_2 3$ à partir de a_1 , de sorte que la récurrence de R4 lui donne pour réduites exactement les fractions de Q9b ; au rang $k = 4$, on a $\frac{p_4}{q_4} = \frac{7}{12}$ et $q_5 = 41$. Interpréter d'abord la quantité $1200 |nx - p|$: montrer qu'elle mesure, en cents, l'écart entre n quintes pures empilées et p octaves (c'est le *comma* du cycle à n quintes, celui que la partie I a rencontré pour $n = 12$). En déduire, par le théorème :

$$\boxed{\forall n \in [1; 40], \forall p \in \mathbb{N}, (n, p) \neq (12, 7) \implies |n \log_2 \frac{3}{2} - p| > |12 \log_2 \frac{3}{2} - 7|}$$

Aucun cycle de moins de quarante et une quintes ne se referme mieux que celui de la spirale à douze : la gamme du piano est, en ce sens précis, un optimum démontré.

Q16. L'anomalie de la figure. Le point bleu $n = 29$ du graphique de la partie III nargue le théorème : sa quinte est *plus juste* que la nôtre. Il est temps de rendre son verdict.

- a) $\triangle$ La gamme 29 place sa quinte au degré 17. Calculer son erreur $1200 \left| \log_2 \frac{3}{2} - \frac{17}{29} \right|$ à 10^{-3} près, et vérifier qu'elle bat bel et bien les 1,955 cents de la gamme 12.
- b) $\triangle$ Calculer maintenant les deux écarts du théorème, $|29 \log_2 \frac{3}{2} - 17|$ et $|12 \log_2 \frac{3}{2} - 7|$, à 10^{-4} près : lequel est le plus petit ? Vérifier la cohérence avec le théorème de Q15.
- c) $\blacklozenge$ Expliquer la coexistence des deux verdicts. On remarquera que $1200 \left| x - \frac{p}{n} \right| = \frac{1200 |nx - p|}{n}$: la justesse *par quinte* et la fermeture *du cycle entier* sont deux mesures du mérite, et 29 ne gagne la

première qu'en dépensant plus du double de notes. Le théorème protège la seconde ; des fractions comme $\frac{17}{29}$, dites *intermédiaires*, se glissent entre les réduites pour la première. Conclure en une phrase : au vu des deux mesures et du nombre de touches, pourquoi l'histoire a-t-elle tranché pour douze ?

Voilà le voyage accompli, et la question du titre a sa réponse. Douze n'est ni une convention ni un accident : c'est le dénominateur d'une réduite de $\log_2 3$, et le théorème de la partie V garantit qu'à moins de quarante et une quintes, nul cycle ne se refermait mieux. La prochaine fois que vos doigts courront sur un clavier, vous saurez ce que les touches doivent à Euclide, à un prince Ming armé d'un boulier, et à un nombre irrationnel dont ce chapitre vous a appris le nom : les douze notes de la musique occidentale sont une fraction continue que l'oreille a trouvée avant les mathématiciens.

Q17. Pour continuer le voyage (questions ouvertes, à explorer librement).

- ♦ La tierce pure $\frac{5}{4}$ a son propre développement : $\log_2 \frac{5}{4} = [0; 3, 9, 2, 2, \dots]$. Vérifier le quotient $a_1 = 3$ (comparer $(\frac{5}{4})^3$ et $(\frac{5}{4})^4$ à 2), calculer les premières réduites, et constater qu'aucun de leurs dénominateurs (3, 28, 59, ...) n'a fait une gamme célèbre. La tierce seule est une mauvaise conseillère : pourquoi ?
- ♦ Les gammes de l'histoire servent la quinte *et* la tierce à la fois. Mesurer, pour $n = 12, 19, 31$ et 53, les deux erreurs (quinte et tierce) en cents, et découvrir la spécialité de chacune. La gamme à 31, défendue par Christiaan Huygens en personne, cache la plus belle surprise.
- ♦ Question libre : à partir de quel critère diriez-vous qu'une gamme à n notes « mérite » ses touches ? Proposer une mesure du compromis justesse contre nombre de touches, et faire tourner le script de l'annexe B avec votre critère.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q2a. L'encadrement $2^m \leq r < 2^{m+1}$ équivaut, par stricte croissance de $\log_2$ et $\log_2(2^t) = t$, à $m \leq \log_2 r < m+1$: c'est la définition de la partie entière.

Q3a. Si $\frac{(3/2)^k}{2^m} = 1$, alors $(\frac{3}{2})^k = 2^m$; il reste à écarter $m = 0$ (pour $k \geq 1$, $(\frac{3}{2})^k > 1$).

Q3b. Si les réductions de k et ℓ quintes coïncident, leur quotient vaut 1 : $(\frac{3}{2})^{\ell-k} = 2^{m'-m}$, et R2 s'applique après avoir justifié $m' - m > 0$.

Q4c. Le comma est $\frac{(3/2)^{12}}{2^7}$: par les règles du a), $c((3/2)^{12}) = 12 c(\frac{3}{2})$ et $c(2^7) = 7 \times 1200 = 8400$; soustraire.

Q5a. $2^{p/n} = \frac{3}{2} \iff \log_2(2^{p/n}) = \log_2 \frac{3}{2}$ (bijectivité de $\log_2$), et le membre de gauche vaut $\frac{p}{n}$ par R1.

Q7c. L'algorithme s'arrête quand un reste est nul, donc quand le grand intervalle est un multiple entier du petit : en remontant la cascade, 1200 et $c(3/2)$ seraient tous deux des multiples entiers d'une même mesure commune μ , et leur rapport $\frac{1200}{c(3/2)} = \frac{1}{\log_2(3/2)}$ serait rationnel.

Q8b. $x_1 = \frac{1}{\log_2 3 - 1} = \frac{1}{\log_2(3/2)}$, et $c(3/2) = 1200 \log_2 \frac{3}{2}$: diviser haut et bas par 1200. Ensuite $[1200/701,955] = 1$ car $701,955 \leq 1200 < 2 \times 701,955$.

Q10b. $\log_2(2^{7/12}) = \frac{7}{12}$ par R1, puis multiplier par 1200.

Q10c. Partir du membre de droite : $c(\frac{3^{12}}{2^{19}}) = c((\frac{3}{2})^{12} / 2^7) = 12 c(\frac{3}{2}) - 7 \times 1200$, puis diviser par 12.

Q11c. Encadrer $\frac{53 \times 386,314}{1200}$ entre deux entiers consécutifs, ou tester $p = 17$ et ses voisins.

Q13a. $q_1 = a_1 \geq 1 = q_0$; pour $k \geq 2$, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} > q_{k-1}$ dès que $q_{k-2} > 0$.

Q13b. $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_1a_0 + 1) - a_0a_1 = 1$. Pour l'hérédité, développer $p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1}$ avec R4 : les termes en a_{k+1} s'annulent, et il reste l'opposé du déterminant précédent.

Q14a. Par R5, x et $\frac{p_k}{q_k}$ sont du même côté : $\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right|$, et Q13c donne la valeur du membre de droite.

Q15a. Le système linéaire $\alpha p_k + \beta p_{k+1} = p$, $\alpha q_k + \beta q_{k+1} = q$ a pour déterminant $p_kq_{k+1} - p_{k+1}q_k = \pm 1$: les formules de Cramer donnent $\alpha = \pm(pq_{k+1} - q p_{k+1})$ et $\beta = \pm(q p_k - p q_k)$, qui sont des entiers.

Q15b. Si α et β étaient de même signe (tous deux positifs, ou tous deux négatifs), la somme $q = \alpha q_k + \beta q_{k+1}$ vérifierait $q \geq q_{k+1}$ ou $q < 0$: contradiction avec $1 \leq q < q_{k+1}$. Pour $|q_k x - p_k| > 0$: x est irrationnel, donc $q_k x - p_k \neq 0$.

Q15c. Multiplier l'encadrement de R5 par $q_k > 0$: $q_k x - p_k$ a le signe de $x - \frac{p_k}{q_k}$; même geste au rang $k + 1$. Produit de deux nombres de signes contraires par deux coefficients de signes contraires : les produits sont de même signe, et la valeur absolue d'une somme de nombres de même signe est la somme des valeurs absolues.

Q15d. $1200 |nx - p| = |c((3/2)^n) - 1200p|$ par les règles de Q4a : c'est l'écart en cents entre n quintes empilées et p octaves. Pour $n = 12$, $p = 7$, on retrouve les 23,460 cents du comma.

Q16c. Comparer ce que chaque mesure récompense : l'erreur par quinte se dilue quand n grandit (on divise par n), la fermeture du cycle non. Le prix d'une gamme, lui, se paie en touches.

Annexe B · Le laboratoire des gammes

Deux scripts courts, une ligne à compléter chacun. Le premier déroule l'algorithme de la partie III sur $\log_2 3$; le second organise le tournoi complet de la question Q12.

Fraction continue et réduites (pour vérifier Q8 et Q9) :

```

1  import math
2
3  x = math.log(3, 2)
4  quotients = []
5  y = x
6  for i in range(8):
7      a = int(y)                # partie entiere (y > 0 ici)
8      quotients.append(a)
9      y = ...                  # a completer : l'etape suivante
10 print(quotients)
11
12 p0, q0 = 1, 0
13 p1, q1 = quotients[0], 1
14 for a in quotients[1:]:
15     p0, q0, p1, q1 = p1, q1, a*p1 + p0, a*q1 + q0
16     print(p1, "/", q1, " erreur :", abs(x - p1/q1))

```

Le tournoi des gammes (pour la question Q12 ; le script affiche chaque gamme qui bat toutes les précédentes) :

```

1  import math
2
3  x = math.log(3/2, 2)          # la quinte, mesuree en octaves
4  record = 10**9
5  for n in range(1, 1001):
6      p = round(n * x)          # le degre le plus proche de la quinte
7      erreur = ...              # a completer : l'erreur en cents
8      if erreur < record:

```

```
9      record = erreur
10     print(n, p, round(erreur, 4))
```

Valeurs de contrôle : le premier script affiche $[1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5]$ puis, à partir de $\frac{2}{1}$, les réduites de Q9a, prolongées de $\frac{84}{53}$ et $\frac{485}{306}$; le second couronne successivement $n = 1, 2, 3, 5, 7, 12, 29, 41, 53$, puis quelques géants au-delà de 53 que la question Q12a vous demande de relever.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Le récit complet des accordeurs (le boulier de Zhu Zaiyu, les tuyaux de Jing Fang, l'harmonium de Bosanquet), les deux scripts prêts à exécuter et les pistes des questions ouvertes de la fin vous attendent sur le compagnon numérique.