



EXERCICES • F3. FONCTION LOGARITHME

Trente exercices pour apprivoiser la machine à produits

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Gammes	Ex. 1–5	★ à ★★★	■ ◆	cours F3, § 1–2
II. L'outil à seuils	Ex. 6–9	★★ à ★★★★★	■ ◆	cours F3, § 3
III. Études type bac	Ex. 10–16	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F3, § 4–5
IV. Les démonstrations promises	Ex. 17–22	★★ à ★★★★★	■ ◆	cours F3, § 2–7
V. Histoires et belles mathématiques	Ex. 23–28	★★ à ★★★★★★	■ ◆ ★	tout le chapitre
VI. Python, le laboratoire	Ex. 29–31	★★ à ★★★★★	■ ◆ ★	cours F3, § 7–8

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Terminale Spécialité : fiches 3 et 4 (Propriétés algébriques du logarithme I et II) et 5 (Dérivée).

Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. GAMMES

↔ s'appuie sur COURS F3, § 1–2 · la réciprocity et la famille algébrique

EXERCICE 1 · APL-F3-01

★ ■ ⌚

Les allers-retours

Simplifier sans calculatrice.

1. $e^{\ln 5}$;

2. $\ln(e^{-3})$;

3. $e^{-3 \ln 2}$;

4. $\ln \sqrt{e}$;

5. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$;

6. $e^{3 \ln 2 - \ln 4}$;

7. $\ln(e \times e^{-5})$;

8. $\exp(1 + \ln 7)$.

EXERCICE 2 · APL-F3-02



Tout en $\ln 2$ et $\ln 3$

Exprimer chaque nombre en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ seulement, ou expliquer en une phrase pourquoi les propriétés du chapitre n'y donnent pas accès.

1. $\ln 96;$

2. $\ln \frac{16}{27};$

3. $\ln \sqrt{27};$

4. $\ln 0,75;$

5. $\ln 1,5 + \ln 6;$

6. $\ln 5.$

EXERCICE 3 · APL-F3-03



Le permis de logarithme

Déterminer le domaine de définition de chaque fonction (aucune dérivée n'est demandée : seul le permis compte).

1. $f_1(x) = \ln(2x - 6);$

2. $f_2(x) = \ln(x^2 - 1);$

3. $f_3(x) = \ln \frac{x+1}{3-x};$

4. $f_4(x) = \ln(x^2 + x + 1);$

5. $f_5(x) = \ln(1 - e^x);$

6. $f_6(x) = \sqrt{\ln x}.$

EXERCICE 4 · APL-F3-04



Équations éclair

Résoudre dans le domaine que l'on précisera.

1. $\ln x = 4;$

2. $e^{3x} = 5;$

3. $\ln(x+3) = \ln(2x-1);$

4. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6.$

Coup de pouce

Question 4 : l'équation transformée produit deux candidats. Le domaine n'en garde qu'un, et ce tri fait partie de la réponse.

EXERCICE 5 · APL-F3-05



Sans calculatrice

Comparer les nombres suivants, tous calculs interdits à la machine, toutes justifications exigées sur la copie.

1. $3 \ln 2$ et $2 \ln 3$;
2. $\ln 100$ et 5 ;
3. $\frac{\ln 5}{5}$ et $\frac{\ln 3}{3}$ (on pourra attendre d'avoir traité l'exercice 11, ou trouver un chemin direct) ;
4. $\ln 10$ et $\frac{7}{3}$.

Coup de pouce

Questions 2 et 4 : ramener chaque comparaison à un encadrement d'une puissance de e , en se contentant de $e > 2,7$.
La valeur approchée du cours ne vaut pas démonstration.

II. L'OUTIL À SEUILS

↔ s'appuie sur COURS F3, § 3 · équations, inéquations et le signe de $\ln q$

EXERCICE 6 · APL-F3-06



Seuils en batterie

Déterminer, pour chaque inéquation, le plus petit entier n qui la vérifie, en surveillant le sens de chaque division.

1. $0,85^n \leq 0,01$;
2. $1,03^n \geq 3$;
3. $1 - 0,6^n \geq 0,999$.

EXERCICE 7 · APL-F3-07



Le bilan du second degré

Résoudre dans le domaine que l'on précisera, en posant l'inconnue auxiliaire qui s'impose.

1. $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$;
2. $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$;
3. $(\ln x)^2 \leq \ln(x^2)$.

Coup de pouce

Question 2 : l'une des deux racines de l'équation auxiliaire n'est la valeur de e^x pour aucun réel x . Dire pourquoi vaut autant de points que calculer.

EXERCICE 8 · APL-F3-08



Inéquations complètes

Résoudre dans le domaine que l'on précisera.

1. $\ln(3 - x) \geq 2 \ln x$;
2. $\ln x + \ln(x + 2) < \ln 3$;
3. $(e^x - 1)(\ln x + 1) \geq 0$ (sur le domaine, l'un des deux facteurs garde un signe constant : le remarquer est la moitié de la réponse).

EXERCICE 9 · SYN-F3-09



La règle des 72

Les banquiers estiment de tête le temps de doublement d'un capital placé à t % par an : ils divisent 72 par t . À 8 %, la règle annonce $72/8 = 9$ ans.

1. Justifier que, dans le modèle à croissance continue, le temps de doublement vaut $T(t) = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{t}{100})}$, et le calculer à 10^{-2} près pour $t = 2$, $t = 8$ et $t = 12$.
2. Comparer aux prédictions de la règle. Pour quelles valeurs de t la règle est-elle la plus fiable ?
3. Pour t petit, on admet l'approximation $\ln(1 + \frac{t}{100}) \approx \frac{t}{100}$ (c'est la tangente en 1 du cours, § 4). Quelle règle exacte cette approximation suggère-t-elle, et pourquoi les banquiers ont-ils préféré 72 à ce nombre ? Regardez ses diviseurs.

III. ÉTUDES TYPE BAC

↔ s'appuie sur COURS F3, § 4–5 · la dérivée, les limites et les croissances comparées

EXERCICE 10 · APL-F3-10



La première étude

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

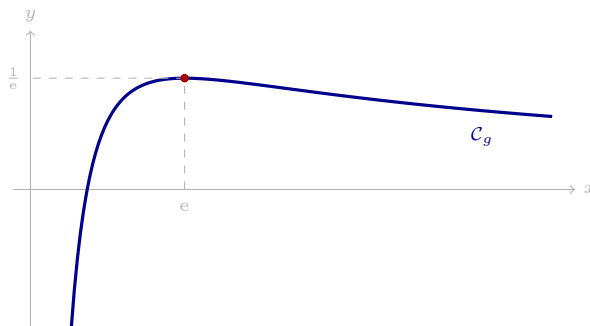
1. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine (l'une des deux réclame une factorisation par le terme dominant).
2. Justifier la dérivabilité de f , calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet.
3. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}$. Quand y a-t-il égalité ?
4. Étudier la convexité de f .

EXERCICE 11 · SYN-F3-11



La bosse

Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \frac{\ln x}{x}$. Sa courbe est représentée ci-dessous ; l'exercice la reconstruit, et les exercices 25 et 26 la mettront au travail.



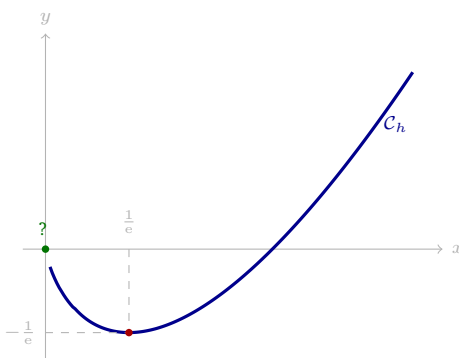
1. Déterminer les limites de g aux bornes, en citant le théorème du cours qui donne celle de $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de g et vérifier la cohérence avec la figure : coordonnées exactes du maximum.
3. Résoudre graphiquement puis retrouver par le calcul : pour quels x a-t-on $g(x) = 0$? $g(x) < 0$?
4. Combien l'équation $g(x) = \frac{1}{4}$ possède-t-elle de solutions ? On le justifiera par le tableau, sans les calculer.

EXERCICE 12 · SYN-F3-12



Prolonger l'impossible

Soit h définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) = x \ln x$.

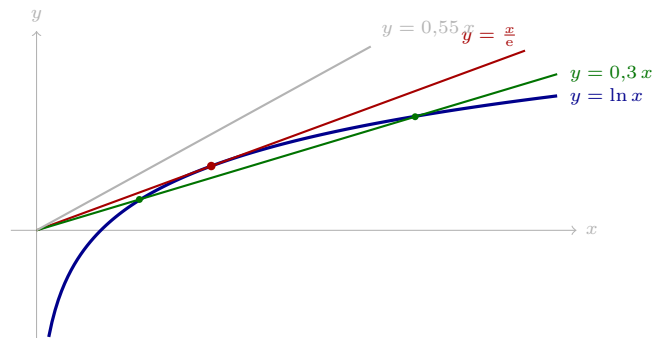


1. Que vaut la limite de h en 0^+ ? Citer précisément le résultat du cours utilisé : c'est lui qui autorise le point vert de la figure.
2. Dresser le tableau de variations complet de h .
3. Déterminer l'équation de la tangente à C_h au point d'abscisse 1, puis étudier la convexité de h et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. ♦ On complète h en posant $h(0) = 0$. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ? On étudiera la limite du taux d'accroissement.

La famille à un paramètre

Pour $k \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au nombre de solutions dans $]0; +\infty[$ de l'équation

$$(E_k) : \ln x = kx.$$



1. Traiter d'abord le cas expédié en une phrase : montrer que pour $k \leq 0$, (E_k) possède exactement une solution.
2. On suppose désormais $k > 0$. Montrer que x est solution de (E_k) si et seulement si $\frac{\ln x}{x} = k$, et conclure sur le nombre de solutions de (E_k) selon k , à l'aide du tableau de l'exercice 11.
3. Interpréter chaque cas sur la figure : que se passe-t-il de remarquable pour $k = \frac{1}{e}$, et en quel point ?
4. ☆ Retrouver la valeur critique $k = \frac{1}{e}$ sans l'exercice 11 : chercher pour quel k la droite $y = kx$ est tangente à la courbe de $\ln$.

L'équation sans formule

On s'intéresse à l'équation $\ln x = \frac{1}{x}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.

1. Montrer que la fonction d définie par : $\forall x \in]0; +\infty[, d(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ est strictement croissante.
2. Démontrer que l'équation possède une unique solution x^* , et que $x^* \in]1; e[$.
3. Donner un encadrement de x^* d'amplitude 10^{-2} (la calculatrice est ici l'outil légitime ; on indiquera la méthode).
4. Justifier sans nouveau calcul : x^* est aussi l'unique solution de $x \ln x = 1$.

La suite au point fixe

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

1. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
2. À l'aide de l'inégalité de la tangente du cours ($\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$), montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ , et justifier que $\ell = 1 + \ln \ell$.
4. Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation $x = 1 + \ln x$ sur $[1; +\infty[$, et conclure. Où, dans ce raisonnement, le cas d'égalité de l'inégalité de la tangente joue-t-il un rôle décisif ?
5. ★ La convergence est lente : $u_{10} \approx 1,17$ encore. En comparant $u_{n+1} - 1$ à $u_n - 1$ près de 1 (autrement dit $\ln u_n$ à $u_n - 1$), expliquer qualitativement pourquoi ce point fixe freine si peu.

La meilleure constante

Dans tout l'exercice, k désigne un réel strictement positif, et f_k la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f_k(x) = x - k \ln x.$$

Le cours a étudié le cas $k = 1$ et en a tiré l'inégalité $\ln x < x$; cet exercice fait travailler la famille entière, et cherche jusqu'où cette inégalité peut être améliorée.

Partie A · Portrait de famille.

1. Déterminer les limites de f_k en 0^+ et en $+\infty$ (pour la seconde, factoriser par x et invoquer le théorème du cours qui conclut).
2. Justifier que f_k est dérivable sur $]0; +\infty[$, calculer $f'_k(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f_k ; on exprimera le minimum en fonction de k .
3. Étudier la convexité de f_k . Que peut-on en déduire sur la position de la courbe de f_k par rapport à ses tangentes (chapitre F2) ?

Partie B · Le nombre de solutions de $f_k(x) = 0$.

4. Étudier le signe du minimum $k(1 - \ln k)$ selon les valeurs de k .
5. En déduire, selon k , le nombre de solutions de l'équation $f_k(x) = 0$ dans $]0; +\infty[$; l'existence de chaque solution sera justifiée par le théorème adapté, cité avec toutes ses hypothèses.
6. Vérifier la cohérence avec l'exercice 13 : l'équation $f_k(x) = 0$ s'écrit aussi $\ln x = \frac{x}{k}$, et la figure de l'exercice 13 fait apparaître les droites concernées. Retrouver la discussion précédente sur cette figure.

Partie C · La récolte.

7. Déduire de la partie B : $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq \frac{x}{e}$, avec égalité si et seulement si $x = e$. En quoi est-ce une amélioration de l'inégalité $\ln x < x$ du cours, et pourquoi la constante $\frac{1}{e}$ est-elle la meilleure possible ?

8. Montrer que la droite d'équation $y = \frac{x}{e}$ est la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse e : la question 4 de l'exercice 13 est démontrée.
9. Retrouver en une ligne, à partir de la question 7, le verdict de l'exercice 25 : $e^\pi > \pi^e$.
10. ★ On suppose $k > e$ et on note a_k la plus petite des deux solutions de $f_k(x) = 0$. Démontrer que $a_k \in]1; e[$, puis que $a_k \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow +\infty$ (encadrer $\ln a_k$ et conclure par composition).

IV. LES DÉMONSTRATIONS PROMISES

↔ s'appuie sur COURS F3, § 2–7 · les six preuves que le cours vous a déléguées

EXERCICE 17 · THE-F3-17

★★ ■ ♦ ⌚

La propriété fondamentale

Le cours a affirmé, preuve à votre charge : $\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

1. Calculer $e^{\ln(ab)}$ puis $e^{\ln a + \ln b}$ et conclure, en citant la propriété de l'exponentielle qui autorise le dernier pas.
2. En déduire, sans nouvelle idée : $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$, puis $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ (on précisera à chaque fois pour quels réels).

EXERCICE 18 · THE-F3-18

★★★★ ■ ♦ ⌚

La puissance, par récurrence

1. Démontrer par récurrence : $\forall a \in]0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln a$.
2. Étendre la formule à tout $n \in \mathbb{Z}$, à l'aide de l'exercice 17.
3. En déduire : $\forall a \in]0; +\infty[, \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ (aucune récurrence : une seule bonne idée).

EXERCICE 19 · THE-F3-19

★★★★ ■ ♦ ⌚

Les deux moyennes

Le chapitre F2 l'avait annoncée, le cours F3 l'a énoncée : $\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

1. Le cours (§ 4) n'a fait qu'esquisser la preuve en deux gestes. Rédiger la démonstration complète et quantifiée, en citant la propriété des milieux du chapitre F2 à l'endroit exact où elle sert, et la propriété de $\exp$ qui transporte l'inégalité.
2. Traiter le cas d'égalité : pour quels couples (a, b) a-t-on $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$, et pourquoi ?
3. ♦ Redémontrer l'inégalité sans aucun logarithme, en une ligne. Chacune des deux preuves s'étend-elle à trois nombres ? Préciser ce que chaque extension exigerait.

EXERCICE 20 · THE-F3-20



Les croissances comparées, à la carte

Le cours a démontré $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ et vous a délégué le reste.

1. Démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par le changement de variable $X = \ln x$, en citant le résultat du chapitre F1 qui conclut.
2. Adapter le même geste pour démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (promis au § 5 : c'est la figure de la course perdue).
3. Démontrer enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, par encadrement à partir de la question 1 (aucun nouveau changement de variable n'est nécessaire).

EXERCICE 21 · THE-F3-21



Le changement de base

Pour $a > 0, a \neq 1$, le cours a posé : $\forall x \in]0; +\infty[, \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

1. Vérifier, à partir de cette définition, que $\log_a$ transforme les produits en sommes et que $\log_a(a^n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Démontrer la formule du changement de base : pour toutes bases licites a et $b, \forall x \in]0; +\infty[, \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.
3. L'activité du chapitre a construit une fonction E vérifiant : $\forall x \in]0; +\infty[, 2^{E(x)} = x$, et son défi comparait $E(x)$ à la touche $\log$ de la calculatrice. Démontrer la relation observée : $\forall x \in]0; +\infty[, \log x = E(x) \times \log 2$.

EXERCICE 22 · THE-F3-22



Le compteur de chiffres

Le cours a affirmé qu'un entier $N \geq 1$ possède exactement $\lfloor \log N \rfloor + 1$ chiffres en écriture décimale.

1. Justifier qu'un entier $N \geq 1$ possède exactement d chiffres ($d \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $10^{d-1} \leq N < 10^d$.
2. En déduire la formule annoncée, en encadrant $\log N$.
3. Applications : combien de chiffres pour 2^{100} ? Pour 7^{7^2} , c'est-à-dire 7^{49} ? (On donne $\log 2 \approx 0,30103$ et $\log 7 \approx 0,84510$.)

V. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

↔ s'appuie sur TOUT LE CHAPITRE · et le fond documentaire qui le nourrit

EXERCICE 23 · APR-F3-23



La table de Stifel (1544)

Soixante-dix ans avant les logarithmes, l'*Arithmetica Integra* de Michael Stifel imprime cette double ligne, exposants négatifs compris, et note qu'elle transforme les multiplications en additions :

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128

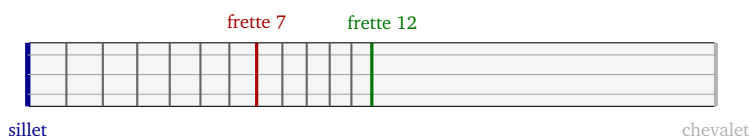
1. L'activité du chapitre a multiplié avec la partie droite de la table. Que permettent de plus les exposants négatifs ? Effectuer ainsi $64 \div 128$ et $\frac{1}{8} \times 32$.
2. Stifel affirme que sa table extrait aussi certaines racines. Lesquelles, et comment ? Calculer ainsi $\sqrt{64}$ et $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, et exhiber un nombre de la table dont la racine carrée lui échappe.
3. En langage moderne : quelles propriétés de $\log_2$ la table de Stifel met-elle en scène ? Les énoncer avec les quantificateurs.

EXERCICE 24 · APR-F3-24



Le comma du guitariste

Sur une guitare, la corde à vide mesure 65 cm et sonne à une hauteur donnée ; presser la frette k raccourcit la corde d'un facteur $2^{-k/12}$, et la douzième frette, à mi-corde, sonne l'octave.



1. Vérifier l'affirmation de la douzième frette, puis situer la frette k : à quelle distance du sillet se trouve-t-elle ? Vérifier pour la frette 7 (valeur attendue : 21,62 cm).
2. La quinte *juste* des physiciens multiplie la fréquence par $\frac{3}{2}$; la frette 7 la multiplie par $2^{7/12}$. Comparer ces deux nombres à 10^{-3} près : la guitare est-elle juste ?
3. Empiler douze quintes justes revient à multiplier la fréquence par $(\frac{3}{2})^{12}$; empiler sept octaves la multiplie par 2^7 . Calculer le rapport des deux (le *comma* des musiciens) et l'écrire sous la forme e^c : que vaut c en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$?
4. ★ Montrer que le désaccord est incurable : il n'existe aucun couple d'entiers naturels non nuls (p, q) tel que $(\frac{3}{2})^p = 2^q$. Quel énoncé du chapitre cette impossibilité prolonge-t-elle ?

EXERCICE 25 · APR-F3-25



e^π ou π^e ?

Les deux nombres valent environ 23,14 et 22,46 : la calculatrice sait lequel est le plus grand, mais elle ne sait pas *pourquoi*. Vous, si.

1. Montrer que comparer e^π et π^e revient à comparer $\frac{\ln \pi}{\pi}$ et $\frac{\ln e}{e}$.
2. Conclure à l'aide de l'exercice 11, en rédigeant l'argument complet (position de π par rapport à e , sens de variation invoqué).
3. ★ Généraliser : montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, x \neq e \implies e^x > x^e$. Le nombre e est donc l'unique champion de ce tournoi : commenter en une phrase.

EXERCICE 26 · APR-F3-26



Le couple unique

On a $2^4 = 4^2 = 16$: deux entiers distincts qui s'échangent en exposant sans changer le résultat. Ce couple est-il un accident ?

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, $x^y = y^x$ équivaut à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ (on rappelle que x^y désigne $e^{y \ln x}$).
2. À l'aide du tableau de l'exercice 11, expliquer pourquoi une solution avec $x \neq y$ exige que x et y encadrent e , l'un strictement entre 1 et e , l'autre au-delà.
3. En déduire que $(2; 4)$ est, à l'échange près, le *seul* couple d'entiers distincts vérifiant $x^y = y^x$.
4. ★ Le couple se voit sur la figure de l'exercice 11 : comment ? Et que dit la même figure du nombre de couples de réels distincts solutions ?

EXERCICE 27 · APR-F3-27



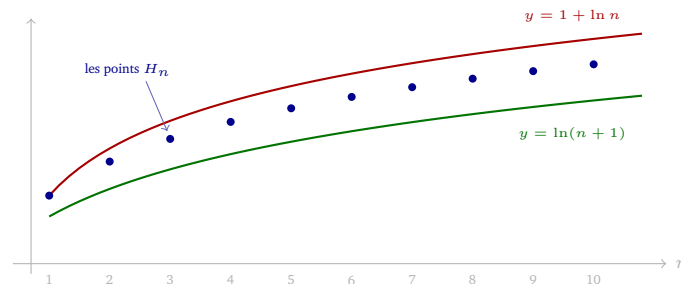
Aucune fraction

Les Coulisses du chapitre ont posé en défi l'irrationalité de $\log 2$, et s'en sont servies sans la démontrer. Cet exercice la démontre et la généralise.

1. Démontrer que $\log_2 3$ est irrationnel (supposer $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et regarder la parité).
2. Pour quels entiers n tels que $1 \leq n \leq 10$ le nombre $\log n$ est-il rationnel ? Démontrer la réponse complète (on pourra écrire $n^q = 10^p$ et regarder le chiffre des unités de n^q , qui ne dépend que de celui de n).
3. Que dit la question 1 pour le guitariste de l'exercice 24 ?

La marche harmonique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Depuis le chapitre A1, vous savez que la question de sa limite se pose ; la voici tranchée, avec les seuls outils de ce chapitre.



1. Justifier, à partir de l'inégalité de la tangente du cours : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (chaque inégalité demande un choix de x différent).
3. Sommer la majoration pour k allant de 1 à n , et la minoration pour k allant de 1 à $n-1$ (le cas $n=1$ se vérifiant à part), puis conclure par télescopage : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
4. Conclure : $H_n \rightarrow +\infty$, mais au rythme de $\ln n$. Combien de termes faut-il, environ, pour que H_n dépasse 20 ? Commenter.
5. ☆ (★★★★★) Soit $v_n = H_n - \ln n$. Montrer, avec les encadrements de la question 2, que (v_n) est décroissante et que $(H_n - \ln(n+1))$ est croissante, puis que les deux sont convergentes, de même limite $\gamma \in [0; 1]$. Vous venez d'établir l'existence de la constante d'Euler des Coulisses, dont la rationalité reste, elle, un problème ouvert.

VI. PYTHON, LE LABORATOIRE

↔ s'appuie sur COURS F3, § 7–8 · la dichotomie comptée et les mantisses

Le compteur prophétique

Le cours prédit qu'une dichotomie sur un intervalle de longueur L atteint la précision ε en $\lceil \log_2(L/\varepsilon) \rceil$ étapes.

1. Modifier la fonction `ln_dichotomie` du cours pour qu'elle retourne aussi le nombre de tours de boucle effectués.
2. Avant toute exécution, prédire ce nombre pour le calcul de $\ln 5$ à 10^{-8} près (l'intervalle de départ du cours est $[0; y-1]$).
3. Exécuter, comparer, et expliquer un éventuel écart d'une unité : que compte exactement la formule, et que compte la boucle ?

Les deux routes, chronométrées

Les Coulisses racontent que la série $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ converge misérablement, et qu'un changement de variable la transforme en fusée. Cet exercice le mesure.

1. Écrire une fonction `serie_alternee(N)` qui retourne la somme des N premiers termes de la série alternée, et *mesurer* le nombre de termes nécessaires pour que l'écart à $\ln 2$ passe sous 10^{-3} , puis sous 10^{-6} . Le défi des Coulisses majorait l'erreur par $\frac{1}{N+1}$: comparer vos mesures à ce majorant, et expliquer le facteur observé (regarder deux sommes partielles consécutives, qui encadrent la cible).
2. Écrire de même `serie_acceleree(N)` pour $2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$ en $x = \frac{1}{3}$, et répondre aux mêmes questions.
3. Présenter les résultats en un tableau de deux lignes, et conclure d'une phrase digne de l'exergue des Coulisses.

Le premier chiffre du géant

Le § 7 du cours compte les chiffres d'un nombre sans l'écrire ; les Coulisses lisent son premier chiffre dans la partie fractionnaire de son logarithme décimal. Python fait les deux.

1. Justifier : si $\log N = m + f$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $f \in [0; 1[$, alors l'écriture décimale de N commence par le chiffre $\lfloor 10^f \rfloor$.
2. Écrire une fonction `tete(a, n)` qui retourne le nombre de chiffres et le premier chiffre de a^n , sans jamais calculer a^n (le module `math` fournit `log10` et `floor`).
3. Vérifier sur $2^{136\,279\,841}$ les valeurs du chapitre (41 024 320 chiffres, premier chiffre 8), puis déterminer celles de 3^{1000} . Contrôler ce dernier cas par un calcul exact (Python manipule les grands entiers sans broncher).
4. ★ Pourquoi la méthode de la question 2 peut-elle se tromper pour des exposants gigantesques, là où le calcul exact de la question 3 ne le peut pas ? Le mot flottant a sa place dans la réponse.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, les réponses aux défis étoilés, le duel chronométré des deux séries, la table de Stifel complète et le premier chiffre de 2^n pour tous les n que vous voudrez : tout vous attend sur le compagnon numérique du chapitre.