



F4. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Sinus, cosinus : les mathématiques de l'onde

TABLE DES MATIÈRES

1. LE CERCLE RETROUVÉ	2	3.2. Dériver les ondes composées	10
1.1. L'enroulement et le radian	2	3.3. Variations et tangente remarquable.	11
1.2. Sinus et cosinus, coordonnées du point enroulé	3	4. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS SUR $[-\pi; \pi]$	12
1.3. Deux symétries et une répétition	4	4.1. Les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$	12
1.4. Les deux courbes	5	4.2. Les inéquations : colorier un arc.	14
2. LA LIMITE FONDAMENTALE	6	4.3. Les équations composées, et la moisson des variations	15
2.1. Trois aires emboîtées	6	5. LE MONDE OSCILLE	16
2.2. La limite, et le piège qui l'entoure.	7	5.1. La sinusoïde générale	16
2.3. Le radian, enfin justifié.	9	5.2. L'équation secrète : $y'' = -\omega^2 y$	16
3. DÉRIVER L'ONDE	9	5.3. La résonance, ou la promesse tenue	17
3.1. Les dérivées de sinus et cosinus	9	5.4. L'onde qui contient toutes les ondes ★	17
		6. LE LABORATOIRE	18
		6.1. Archimède, ou la limite fondamentale avant la lettre.	18
		6.2. Voir le théorème de Fourier.	19

PARCOURS DU CHAPITRE

■ **Essentiel** · Socle minimal : définitions, propriétés clés, méthode de base.

◆ **Approfondissement** · Démonstrations, exemples travaillés, exercices de synthèse.

★ **Excellence** · Extensions, liens inter-chapitres, DM et questions ouvertes.

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »

Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822

Le 12 avril 1831, un détachement de soixante-quatorze soldats du 60^e régiment de fusiliers traverse au pas cadencé le pont suspendu de Broughton, près de Manchester. Sous la cadence, le tablier se met à rebondir en mesure. Les hommes trouvent la chose amusante ; certains, raconte-t-on, appuient le pas pour « accompagner » le mouvement. Le rebond enfle, une chaîne cède, et le pont s'effondre dans la rivière avec une quarantaine de soldats. L'eau était basse : aucun mort, mais une leçon durable. L'armée britannique ordonne depuis lors de **rompre le pas** sur les ponts.

Pourquoi un pont de pierre et de fer se soucie-t-il du *rythme* d'une troupe ? La réponse attendra la fin du chapitre. Mais elle tient tout entière dans deux fonctions que vous connaissez depuis la première sans les avoir jamais vues ainsi : sinus et cosinus. Jusqu'ici, elles mesuraient des angles. Dans ce chapitre, elles deviennent des **fonctions de la variable réelle** : on les dérive, on étudie leurs variations, on résout leurs équations. Et ce faisant, on met la main sur l'outil qui décrit tout ce qui vibre : une corde de guitare, le courant de la prise murale, la marée, la lumière, et le tablier d'un pont qu'une troupe imprudente met en mouvement.

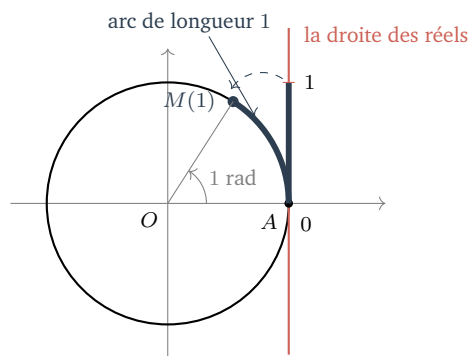
L'ordre de rompre le pas est toujours en vigueur dans la plupart des armées du monde. La consigne a un nom mathématique : éviter la résonance.

Broughton, 1831

1. LE CERCLE RETROUVÉ

1.1. L'enroulement et le radian

Tout commence par un geste : enrouler la droite des réels autour d'un cercle. Considérons le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$: centre O , rayon 1, muni du sens direct (le sens inverse des aiguilles d'une montre). Imaginez la droite des réels comme un fil gradué, tangent au cercle au point $A(1; 0)$, le zéro du fil posé sur A . En enroulant le fil sur le cercle (vers le haut pour les réels positifs, vers le bas pour les négatifs), chaque réel x vient se poser sur un point $M(x)$ du cercle.



OBJECTIFS

- ▷ Mesurer en radians
- ▷ Lire $\cos x$ et $\sin x$ sur le cercle
- ▷ Exploiter parité et périodicité

DÉFINITION – RADIAN

Le **radian** est la mesure d'angle définie par l'enroulement : un angle mesure x radians lorsqu'il intercepte, sur le cercle de rayon 1, un arc de longueur $|x|$. Le tour complet, de circonférence 2π , mesure ainsi

2π radians :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Les conversions s'en déduisent par proportionnalité : $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Mais pourquoi abandonner les degrés, hérités des astronomes babyloniens ? Patience : la section 2 apportera une réponse qui n'a rien d'une coquetterie. Le radian est la seule unité dans laquelle le calcul différentiel accepte de rester simple.

Radian : De radius, le rayon. Le concept est de Roger Cotes (1714) ; le mot n'apparaît qu'en 1873, dans un sujet d'examen de James Thomson, frère du physicien lord Kelvin.

Attention

Dans tout ce chapitre, et dans toute l'analyse désormais, les angles sont en **radians**. Vérifiez le mode de votre calculatrice : un mode degré non détecté est la première cause d'absurdités numériques du chapitre ($\sin 1 \approx 0,841$ en radians, $0,017$ en degrés).

1.2. Sinus et cosinus, coordonnées du point enroulé

DÉFINITION – FONCTIONS COSINUS ET SINUS

Pour tout réel x , on note $M(x)$ le point du cercle trigonométrique obtenu par enroulement du réel x . Le **cosinus** et le **sinus** de x sont les coordonnées de ce point :

$$M(x) = (\cos x ; \sin x).$$

Les fonctions $\cos : x \mapsto \cos x$ et $\sin : x \mapsto \sin x$ sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En première, $\cos$ et $\sin$ mesuraient des angles de vecteurs. L'enroulement en fait des fonctions d'une variable réelle : c'est le changement de regard de tout ce chapitre.

PROPRIÉTÉ – PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Pour tout réel x :

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration.

Le point $M(x)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 : ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1 , et le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de côtés $|\cos x|$ et $|\sin x|$ et d'hypoténuse $OM = 1$ donne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (les cas où $\cos x = 0$ ou $\sin x = 0$, où le triangle dégénère, se vérifient directement sur le cercle). ■

Les valeurs remarquables, lues sur le cercle en première, restent le socle de tous les calculs du chapitre :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

1.3. Deux symétries et une répétition

L'enroulement a deux conséquences géométriques immédiates, qui font gagner la moitié du travail dans toutes les études à venir.

PROPRIÉTÉ – PARITÉ

La fonction cosinus est **paire**, la fonction sinus est **impaire** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Graphiquement : la courbe de $\cos$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle de $\sin$ par rapport à l'origine.

Démonstration.

Les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont obtenus en enroulant la même longueur $|x|$, l'un vers le haut, l'autre vers le bas : ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Deux points symétriques par rapport à cet axe ont même abscisse ($\cos(-x) = \cos x$) et des ordonnées opposées ($\sin(-x) = -\sin x$). ■

PROPRIÉTÉ – PÉRIODICITÉ

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Démonstration.

Enrouler $x + 2\pi$, c'est enrouler x puis faire un tour complet de plus : les points $M(x + 2\pi)$ et $M(x)$ sont confondus, donc leurs coordonnées sont égales. ■

Remarque – Le contrat de travail des fonctions périodiques

La périodicité est une promesse d'économie : tout ce que font $\sin$ et $\cos$ sur un intervalle de longueur 2π , elles le répètent à l'identique partout ailleurs. Il suffira donc de les étudier sur $[-\pi ; \pi]$, intervalle que le programme privilégie, puis de translater. C'est exactement le rôle que jouait la parité en première : réduire le domaine de travail.

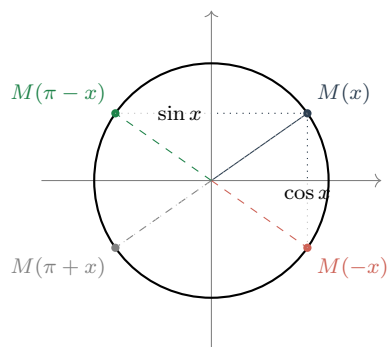
Le cercle offre d'autres symétries que celle de l'axe des abscisses. Les angles associés s'y lisent d'un coup d'œil, et il faut les lire ainsi, jamais les réciter :

La trigonométrie est née du ciel.

Vers 140 av. J.-C., l'astronome grec Hipparque dresse la première table trigonométrique connue : une table de cordes, pour prédire les positions des astres. Ptolémée l'étendra dans l'Almageste (II^e siècle) : les cordes de demi-degré en demi-degré.

Hipparque, v. 140 av. J.-C.

Sinus : Le mot vient du latin *sinus*, le repli d'une toge. Comment un pli de vêtement a-t-il pu nommer une fonction ? L'histoire, rocambolesque, passe par l'Inde et Bagdad : elle vous attend dans les Couloirs du chapitre.



PROPRIÉTÉ – ANGLES ASSOCIÉS

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x.\end{aligned}$$

MÉTHODE – RETROUVER UN ANGLE ASSOCIÉ EN CINQ SECONDES

- ▷ 1. Placer $M(x)$ sur un cercle esquissé à main levée, dans le premier quadrant.
- ▷ 2. Placer le point demandé : $M(\pi - x)$ est son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, $M(\pi + x)$ par rapport à O , $M(-x)$ par rapport à l'axe des abscisses.
- ▷ 3. Lire les coordonnées du nouveau point en fonction de celles de $M(x)$.

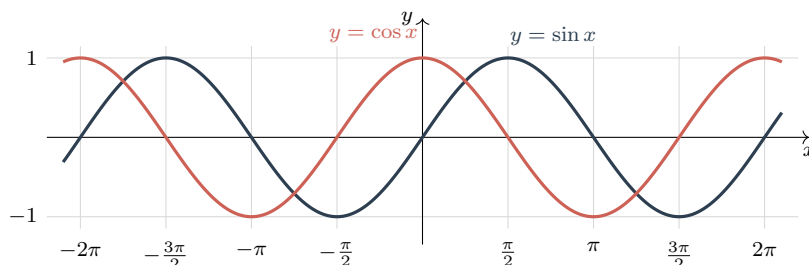
Exemple – Calculer $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Pour la première valeur : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour la seconde : par imparité du sinus, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.4. Les deux courbes

Nous pouvons enfin tracer. En dépliant les valeurs du cercle le long de l'axe des abscisses, chaque fonction dessine une vague : la **sinusoïde**.



Regardez bien : les deux vagues sont *la même*, décalée. C'est l'angle associé $\frac{\pi}{2} - x$ qui le dit, ou plus directement :

Jusqu'au XVIII^e siècle, sinus et cosinus sont des segments attachés à un cercle. C'est Euler, dans l'Introduction in analysin infinitorum (1748), qui pose le rayon égal à 1 et en fait des fonctions de la variable réelle. Notre chapitre commence conceptuellement dans ce livre.

PROPRIÉTÉ – UNE SEULE ONDE

Pour tout réel x , $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$: la courbe de cosinus est l'image de celle de sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

2. LA LIMITE FONDAMENTALE

Dériver sinus, c'est, par définition du nombre dérivé, faire tendre h vers 0 dans le taux d'accroissement $\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$. Le cas $a = 0$ contient déjà toute la difficulté :

$$\frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}.$$

Quand $h \rightarrow 0$, numérateur et dénominateur tendent vers 0 : c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, comme le chapitre F1 vous a appris à les redouter. Toute la section est consacrée à la lever, et la récompense sera considérable : cette seule limite débloquent toutes les dérivées du chapitre.

2.1. Trois aires emboîtées

L'outil est un encadrement géométrique, d'une élégance qui a traversé les siècles.

PROPRIÉTÉ – ENCADREMENT FONDAMENTAL

Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Démonstration.

Sur le cercle trigonométrique, plaçons $A(1; 0)$ et $M(\cos x; \sin x)$ avec $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, puis T le point de la droite (OM) situé sur la tangente au cercle en A : $T = (1; \frac{\sin x}{\cos x})$, bien défini car $\cos x \neq 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. Trois régions s'emboîtent alors strictement :

ÉCHO EXO

EXO-F4 · Ex. 1–6 ★★

Le cercle en batterie : premiers tours, angles associés, l'identité et le tri par quadrant, parités et périodes d'assemblages, et la preuve que sinus n'est pas un polynôme. ■ ◆

Je sais placer un réel sur le cercle, lire ses lignes trigonométriques, et utiliser parité, périodicité et angles associés.

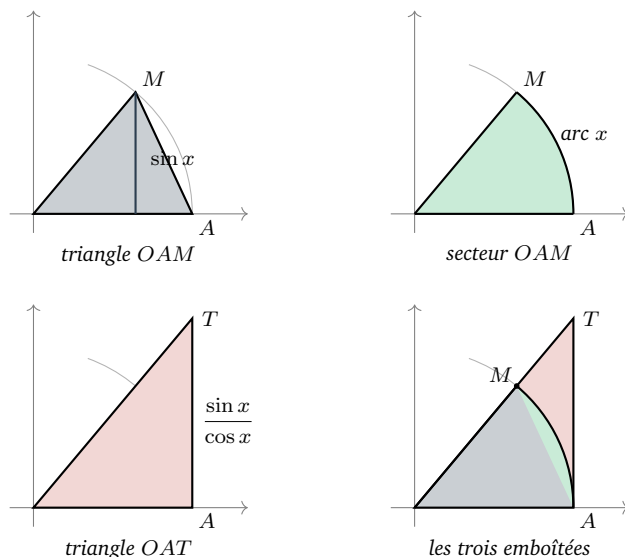
OBJECTIFS

- ▷ Encadrer $\sin x$ entre $x \cos x$ et x
- ▷ Établir $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$
- ▷ Comprendre le rôle du radian

← PRÉREQUIS

F1 · Limites de fonctions et continuité

Le théorème des gendarmes est l'outil central de cette section.



Le triangle OAM est contenu dans le secteur circulaire OAM , lui-même contenu dans le triangle OAT . Calculons les trois aires. Le triangle OAM a pour base $OA = 1$ et pour hauteur $\sin x$: aire $\frac{\sin x}{2}$. Le secteur d'angle x occupe la fraction $\frac{x}{2\pi}$ du disque d'aire π (résultat admis, seule brique extérieure de cette démonstration) : aire $\frac{x}{2}$. Le triangle rectangle OAT a pour base 1 et pour hauteur $AT = \frac{\sin x}{\cos x}$: aire $\frac{\sin x}{2 \cos x}$. Les inclusions étant strictes, il vient :

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2 \cos x},$$

et en multipliant par 2 : $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$. ■

L'aire du secteur est proportionnelle à son angle : c'est la définition même du radian qui rend la formule $\frac{x}{2}$ si propre. En degrés, elle serait $\frac{\pi x}{360}$, et toute la suite en serait défigurée.

2.2. La limite, et le piège qui l'entoure

THÉORÈME – LIMITE FONDAMENTALE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Démonstration.

Soit $h \in]0; \frac{\pi}{2}[$. L'encadrement fondamental donne deux informations. D'une part $\sin h < h$, donc, en divisant par $h > 0$:

$$\frac{\sin h}{h} < 1.$$

D'autre part $h < \frac{\sin h}{\cos h}$; comme $\cos h > 0$ sur cet intervalle, multiplier par $\frac{\cos h}{h} > 0$ conserve l'inégalité :

$$\cos h < \frac{\sin h}{h}.$$

Ainsi, pour tout $h \in]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1.$$

Il reste à contrôler $\cos h$ quand $h \rightarrow 0^+$. La formule de duplication de première donne $1 - \cos h = 2 \sin^2 \frac{h}{2}$; comme $h \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\frac{h}{2} \in]0; \frac{\pi}{4}[\subset]0; \frac{\pi}{2}[$: l'encadrement fondamental s'applique donc à $\frac{h}{2}$ et donne, avec la positivité du sinus sur cet intervalle, $0 < \sin \frac{h}{2} < \frac{h}{2}$. Ainsi $1 - \frac{h^2}{2} \leq \cos h \leq 1$, et le théorème des gendarmes (chapitre F1) donne $\cos h \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0^+$, puis, appliqué à l'encadrement ci-dessus :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Enfin, la fonction $h \mapsto \frac{\sin h}{h}$ est **paire** : pour tout $h \neq 0$, $\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h}$ par **imparité du sinus**. Pour $h \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$, on a donc $\frac{\sin h}{h} = \frac{\sin(-h)}{-h}$ avec $-h \rightarrow 0^+$: la limite à gauche en 0 vaut la limite à droite. Les deux limites latérales étant égales à 1, la limite en 0 existe et vaut 1. ■

Attention

Le piège du raisonnement circulaire. Pourquoi tant d'efforts géométriques, alors qu'il serait si tentant d'écrire « $\frac{\sin h}{h} = \frac{\sin h - \sin 0}{h - 0} \rightarrow \sin'(0)$, or $\sin' = \cos$, donc la limite vaut $\cos 0 = 1$ » ? Parce que ce raisonnement utilise la dérivée du sinus... qui repose précisément sur la limite que l'on cherche à établir (section 3). C'est un **cercle vicieux** : dans l'esprit du chapitre A0, une preuve ne peut pas s'appuyer sur sa propre conclusion. La démonstration par les aires est la voie honnête ; c'est elle qui porte tout le reste.

Un second lemme, cadeau de la même méthode, servira dès la section suivante :

PROPRIÉTÉ – LEMME DU COSINUS

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Démonstration.

Pour $h \neq 0$, la duplication $\cos h - 1 = -2 \sin^2 \frac{h}{2}$ permet d'écrire :

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{-2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\sin \frac{h}{2} \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Quand $h \rightarrow 0$: le premier facteur tend vers 0 (pour h proche de 0, $|\sin \frac{h}{2}| < |\frac{h}{2}|$ par l'encadrement fondamental et l'imparité du sinus, puis gendarmes), le second vers 1 (limite fondamentale). Par produit, la limite vaut $0 \times 1 = 0$. ■

Un mot de baptême pour finir : la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ainsi apprivoisée

s'appelle le **sinus cardinal**, et son étude complète (une onde qui s'éteint en oscillant) vous attend à l'Atelier.

2.3. Le radian, enfin justifié

Voici la promesse de la section 1 tenue. Si l'on mesurait les angles en degrés, la fonction « sinus en degrés » serait $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$, et le même calcul donnerait :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi h}{180}\right)}{h} = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175.$$

Toutes les dérivées du chapitre traîneraient ce facteur parasite, comme un mauvais taux de change qu'il faudrait payer à chaque calcul. **Le radian est l'unité pour laquelle la limite vaut exactement 1** : c'est l'unité naturelle du calcul différentiel, et la vraie raison pour laquelle les mathématiciens l'ont adoptée.

3. DÉRIVER L'ONDE

3.1. Les dérivées de sinus et cosinus

Les formules d'addition, démontrées en première à l'aide du produit scalaire, sont l'autre ingrédient du calcul. Nous les rappelons sans les redémontrer :

Remarque – Bagages de première : formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a, \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

THÉORÈME – DÉRIVÉES DES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin x$$

Démonstration.

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé et $h \neq 0$. La formule d'addition du sinus décompose le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} \\ &= \sin a \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

ÉCHO EXO

EXO-F4 · Ex. 7–10 ★★

La limite fondamentale à l'ouvrage : gendarmes en l'infini, changements de variable en cascade, le second lemme en plus fort, et un prolongement continu qui refuse d'être dérivable. ■ ♦ ★

JALON

Je sais retrouver l'encadrement par les aires et en déduire la limite fondamentale au moyen des gendarmes.

OBJECTIFS

▷ Connaître $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$

▷ Dériver $\sin(u)$ et $\cos(u)$

▷ Dresser les variations sur $[-\pi; \pi]$

← PRÉREQUIS

F2 · Compléments de dérivation et convexité

La dérivée de composée $(v \circ u)' = (v' \circ u) \cdot u'$ sert pour $\sin(u)$ et $\cos(u)$.

Quand $h \rightarrow 0$, la section 2 a tout préparé : le premier quotient tend vers 0 (lemme du cosinus), le second vers 1 (limite fondamentale). Le taux d'accroissement tend donc vers $\sin a \times 0 + \cos a \times 1 = \cos a$: la fonction sinus est dérivable en a , de nombre dérivé $\cos a$. Ceci vaut pour tout réel a , d'où $\sin' = \cos$.

Le même calcul, mené avec la formule d'addition du cosinus, donne :

$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \cos a \times \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \times \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin a.$$



Remarque – Le cycle des dérivées ♦

Dérivons en chaîne : $\sin \rightarrow \cos \rightarrow -\sin \rightarrow -\cos \rightarrow \sin$. En quatre dérivations, chaque fonction revient à elle-même ; en deux, elle revient à son opposée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin''(x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos''(x) = -\cos x.$$

Retenez cette petite musique : $y'' = -y$. Elle est l'ADN commun de sinus et cosinus, et la section 5 lui donnera son vrai nom physique.

Plus de deux siècles avant Newton, l'école indienne du Kerala fondée par Madhava (v. 1340-1425) manipulait déjà les développements en série de $\sin$ et $\cos$. En Europe, la dérivée du sinus apparaît chez Roger Cotes (publication posthume, 1722), l'homme du radian avant le mot.

Madhava, v. 1400

3.2. Dériver les ondes composées

Dans la nature, l'onde pure $\sin x$ est rare : la tension du secteur oscille cinquante fois par seconde, un la de diapason quatre cent quarante fois. Les fonctions utiles sont des *composées*, et le chapitre F2 a déjà fourni l'outil.

PROPRIÉTÉ – DÉRIVÉES DE $\sin(u)$ ET $\cos(u)$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(\sin(u))'(x) = u'(x) \cos(u(x)),$$

$$(\cos(u))'(x) = -u'(x) \sin(u(x)).$$

En particulier, pour tous réels ω et φ , la fonction $x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ a pour dérivée $x \mapsto \omega \cos(\omega x + \varphi)$.

Démonstration.

C'est la formule de dérivation d'une composée du chapitre F2, $(v \circ u)' = (v' \circ u) \cdot u'$, appliquée à $v = \sin$ puis $v = \cos$, dont les dérivées viennent d'être établies. ■

PORTAIL ACT

ACT-F4 · Phases 1–4 ★

La pente de l'onde : huit tangentes au crayon, une courbe cachée, et l'obstacle du quotient $\frac{\sin h}{h}$: l'enquête menée à la maison que ce paragraphe couronne. ■

Exemple – Trois dérivées types

Justifions puis calculons, sur $\mathbb{R}$ dans les trois cas.

- $f : x \mapsto \sin(3x)$: composée de $x \mapsto 3x$ (dérivable sur $\mathbb{R}$) par $\sin$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3 \cos(3x)$.
- $g : x \mapsto \cos(x^2)$: composée de $x \mapsto x^2$ par $\cos$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2x \sin(x^2)$.
- $h : x \mapsto \sin^2 x$: produit $\sin x \times \sin x$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$, en reconnaissant la formule de duplication.

3.3. Variations et tangente remarquable

Armés des dérivées, dressons les tableaux sur l'intervalle de référence $[-\pi; \pi]$. Le signe de $\cos x$ se lit sur le cercle : l'abscisse du point $M(x)$ est dans le demi-plan droit, c'est-à-dire, sur $[-\pi; \pi]$, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Le théorème reliant signe de la dérivée et sens de variation fait le reste : une dérivée strictement positive sur l'intérieur d'un intervalle y garantit la stricte croissance, bornes comprises.

PROPRIÉTÉ – VARIATIONS DE SINUS SUR $[-\pi; \pi]$

La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$\sin'(x) = \cos x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\sin$	0	-1	1	0	

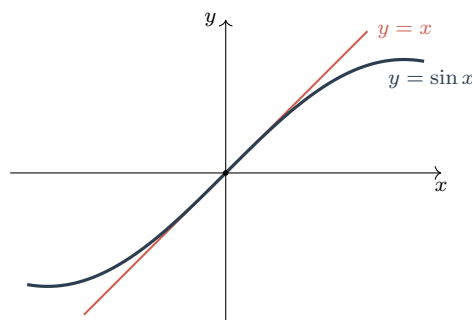
PROPRIÉTÉ – VARIATIONS DE COSINUS SUR $[-\pi; \pi]$

La fonction cosinus est strictement croissante sur $[-\pi; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; \pi]$ (le signe de $\cos'(x) = -\sin x$ se lit de même sur le cercle).

x	$-\pi$	0	π
$\cos'(x) = -\sin x$	$+$	0	$-$
$\cos$	-1	1	-1

Un mot enfin sur le point 0, où se joue quelque chose de précieux. Le nombre dérivé de sinus en 0 vaut $\sin'(0) = \cos 0 = 1$: la tangente à la courbe en l'origine est la droite $y = x$. Ce n'est pas une coïncidence, c'est

la limite fondamentale *relue géométriquement* : dire que $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$, c'est dire que la courbe du sinus colle à cette droite près de l'origine.



Remarque – La machine à inégalités ★

La tangente en 0 dit mieux qu'une approximation : elle donne des *inégalités*. Nous savons déjà que, pour tout $x \geq 0$, $\sin x \leq x$ (sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ c'est l'encadrement fondamental ; au-delà, $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$; en 0, égalité). Le procédé du chapitre F3 ($\ln x \leq x - 1$ par étude de fonction) se recycle : posez $g : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont, et dérivez deux fois : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ et $g''(x) = x - \sin x$. Sur $\mathbb{R}_+$, $g''(x) \geq 0$, donc g' est croissante ; or $g'(0) = 0$, donc $g' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc g est croissante ; or $g(0) = 0$. Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

En itérant, on fabrique des polynômes qui épousent le sinus d'aussi près qu'on veut : ce sont les séries que Madhava manipulait vers 1400, et que vous retrouverez en prépa sous le nom de Taylor.

Les physiciens exploitent cette tangente sans vergogne : pour un pendule aux petites oscillations, remplacer $\sin x$ par x transforme un problème insoluble en Terminale en une équation que la section 5 vous montrera. L'approximation est excellente : pour $x = 0,1$ rad, l'erreur est inférieure à 0,0002.

ÉCHO EXO

EXO-F4 · Ex. 11–16 ★★

Dériver l'onde en gammes : composées et permis de dériver, tangentes, la dérivée 2026°, l'onde déguisée étudiée sans signe de dérivée, et la machine à inégalités poussée d'un cran. ■ ♦ ★

4. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS SUR $[-\pi; \pi]$

Résoudre $\cos x = a$, ce n'est pas fouiller sa mémoire : c'est **dessiner**. Toute la section tient dans un réflexe : le cosinus se lit sur l'axe des abscisses, le sinus sur l'axe des ordonnées, et une équation trigonométrique est l'intersection d'un cercle et d'une droite.

4.1. Les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$

MÉTHODE – RÉSOUDRE $\cos x = a$ OU $\sin x = a$ SUR $[-\pi; \pi]$

- ▷ 1. Si $a \notin [-1; 1]$: aucune solution (les lignes trigonométriques restent entre -1 et 1).
- ▷ 2. Tracer le cercle et la droite : verticale $x = a$ pour un cosinus, horizontale $y = a$ pour un sinus.

OBJECTIFS

- ▷ Résoudre $\cos x = a$ et $\sin x = a$
- ▷ Résoudre des inéquations par lecture d'arcs
- ▷ Traiter les équations composées

- ▷ 3. Marquer les points d'intersection (deux en général) et identifier leurs réels associés à l'aide des valeurs remarquables et des angles associés.
- ▷ 4. Conclure par l'ensemble des solutions, en vérifiant qu'elles appartiennent bien à $[-\pi; \pi]$.

PROPRIÉTÉ – STRUCTURE DES SOLUTIONS

Soit $a \in [-1; 1]$.

— Si $\alpha \in [0; \pi]$ vérifie $\cos \alpha = a$, alors, sur $[-\pi; \pi]$:

$$\cos x = a \iff x = \alpha \quad \text{ou} \quad x = -\alpha.$$

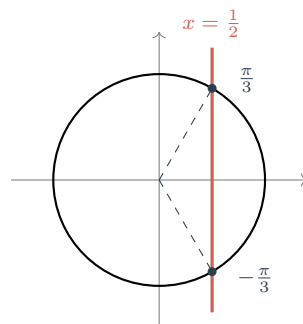
— Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vérifie $\sin \alpha = a$, alors les solutions sont α et $\pi - \alpha$ à un tour près : sur $[-\pi; \pi]$, la seconde solution s'écrit $\pi - \alpha$ si $\alpha \geq 0$, et $-\pi - \alpha$ si $\alpha < 0$.

Les deux points d'intersection se confondent lorsque la droite est tangente au cercle ($a = \pm 1$). Les deux réels solutions se confondent alors aussi, sauf pour $\cos x = -1$: le point de tangence $(-1; 0)$ est atteint deux fois sur l'intervalle fermé, en $x = \pi$ et en $x = -\pi$. Même effet de bord pour $\sin x = 0$: aux solutions 0 et π s'ajoute $-\pi$, les deux bornes de $[-\pi; \pi]$ désignant le même point du cercle.

Exemple – $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$

La droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses. La valeur remarquable $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ identifie le point du haut, la parité donne celui du bas :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}.$$



Exemple – $\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$

La droite horizontale d'ordonnée $-\frac{1}{2}$ coupe le cercle en deux points du demi-plan inférieur, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Le premier est $-\frac{\pi}{6}$ (imparité de la valeur remarquable $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$); le

Ne retenez pas la casuistique du sinus : le cercle la gère seul. Les deux points d'intersection d'une horizontale sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, et leurs réels se lisent directement.

second est son symétrique, atteint en enroulant vers le bas au-delà de $-\frac{\pi}{2}$:

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right\}.$$

Remarquez que la formule brute $\pi - \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ sort de l'intervalle : c'est son représentant à un tour près, $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$, qui convient. Le cercle, lui, ne se trompe jamais d'intervalle.

Attention

L'oubli de la **seconde solution** est l'erreur reine du chapitre. Une droite qui coupe un cercle le coupe presque toujours en *deux* points : une équation $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ avec $-1 < a < 1$ a exactement deux solutions sur un intervalle de longueur 2π semi-ouvert ; sur l'intervalle fermé $[-\pi; \pi]$, seul $\sin x = 0$ en fait apparaître une troisième, ses deux bornes désignant le même point du cercle. Une réponse à une seule solution doit vous alerter immédiatement.

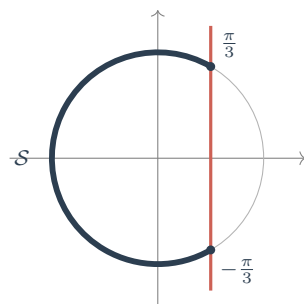
4.2. Les inéquations : colorier un arc

Une inéquation trigonométrique se résout par le même dessin, en *coloriant* : les solutions de $\cos x \leq a$ forment le ou les arcs du cercle situés du bon côté de la droite.

Exemple $-\cos x \leq \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$

Les points du cercle d'abscisse inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ forment l'arc situé à gauche de la droite $x = \frac{1}{2}$, délimité par les deux solutions de l'équation associée, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. En parcourant cet arc, les réels décrivent :

$$S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi \right].$$



L'écriture en *réunion* de deux intervalles vient du point de découpe π : l'arc solution est d'un seul tenant sur le cercle, mais l'intervalle $[-\pi; \pi]$ le déroule en deux morceaux. C'est un artefact du déroulement, pas de la géométrie.

Exemple – $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$

Les points d'ordonnée supérieure ou égale à $-\frac{1}{2}$ forment le grand arc situé au-dessus de la droite $y = -\frac{1}{2}$, délimité par $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. En déroulant :

$$\mathcal{S} = \left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; \pi\right].$$

4.3. Les équations composées, et la moisson des variations

Quand l'inconnue se cache dans une composée, un changement de variable ramène au cas connu, à condition de **transporter l'intervalle**.

Exemple – $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$

Posons $X = 2x$. Quand x parcourt $[-\pi; \pi]$, X parcourt $[-2\pi; 2\pi]$: deux tours de cercle, donc deux fois plus de solutions. Sur un tour, $\cos X = \frac{1}{2}$ donne $X = \pm\frac{\pi}{3}$; sur $[-2\pi; 2\pi]$, il faut leur adjoindre leurs translatés d'un tour :

$$X \in \left\{-\frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Cette technique est la clé des études de fonctions du chapitre : le signe d'une dérivée en $\cos(\omega x)$ ou $\sin(\omega x)$ se ramène toujours à une inéquation trigonométrique. Faisons la synthèse sur un exemple complet.

Exemple – Étude de $f : x \mapsto \sin(2x)$ sur $[-\pi; \pi]$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \cos(2x)$.

Étudions le signe de f' sur $[-\pi; \pi]$. Avec $X = 2x \in [-2\pi; 2\pi]$: $\cos X > 0$ lorsque X est dans le demi-plan droit du cercle, soit $X \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ à un tour près. En revenant à x (division par 2) : $f'(x) > 0$ sur $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$, ainsi que sur $]-\pi; -\frac{3\pi}{4}[$ et $]\frac{3\pi}{4}; \pi[$ (les translatés d'un tour complet en X , soit d'un demi-tour en x).

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f		0	1	-1	1	-1

La courbe fait deux vagues complètes là où le sinus n'en faisait qu'une : f est périodique de période π , car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$. Doubler le coefficient de x , c'est doubler la fréquence de l'onde ; un musicien dirait : monter d'une octave.

ÉCHO EXO

EXO-F4 · Ex. 17–21 ★★

Équations et inéquations au cercle : arcs coloriés, transport d'intervalle, le second degré caché où diviser est interdit, et le vrai-faux qui compte les solutions. ■ ◆

CIBLE DA

DM-F4.1 · Parties I–IV ★★★

La lumière qui calcule : de Héron d'Alexandrie à Fermat, le trajet le plus rapide du sauveteur, la loi des sinus conquise par la dérivée, et les mirages des routes d'été. ◆

5. LE MONDE OSCILLE

5.1. La sinusoïde générale

Une fois la vague pure comprise, la nature se décrit avec trois boutons de réglage : la hauteur de la vague, sa vitesse et son point de départ.

DÉFINITION – SIGNAL SINUSOÏDAL

Soient $A > 0$, $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. La fonction

$$t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$$

est le **signal sinusoïdal** d'**amplitude** A , de **pulsation** ω et de **phase** φ . Elle est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, et sa **fréquence** $\frac{1}{T}$ compte le nombre d'oscillations par unité de temps.

Démonstration.

La périodicité se vérifie en une ligne : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

JALON

Je sais résoudre équations et inéquations trigonométriques par le cercle, y compris après changement de variable, et réinvestir dans une étude de fonction.

OBJECTIFS

- ▷ Lire amplitude, période et phase
- ▷ Vérifier $x'' = -\omega^2 x$
- ▷ Comprendre la résonance (et le pont)

Exemple – La prise murale

La tension du secteur européen est $u(t) = 230\sqrt{2} \sin(100\pi t)$ (t en secondes, u en volts). Lecture directe : amplitude $230\sqrt{2} \approx 325$ V (la valeur 230 V annoncée est la valeur *efficace* : l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$), pulsation $\omega = 100\pi$, période $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02$ s, fréquence 50 Hz : le courant s'inverse cent fois par seconde, et rien de ce qui est branché ne s'en aperçoit.

5.2. L'équation secrète : $y'' = -\omega^2 y$

Le cycle des dérivées de la section 3 ($y'' = -y$ pour sin et cos) se transporte à toutes les sinusoïdes.

PROPRIÉTÉ – L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

Soient A, ω, φ des réels et $x : t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) = -\omega^2 x(t).$$

Pourquoi le courant est-il sinusoïdal ? Parce qu'une bobine tournant dans un champ magnétique projette un mouvement circulaire uniforme sur un axe : la définition même du sinus. La « guerre des courants » (Edison pour le continu, Tesla et Westinghouse pour l'alternatif) s'achève en 1896, quand les chutes du Niagara éclairent Buffalo en courant alternatif.

Niagara, 1896

Démonstration.

La fonction x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions qui le sont. Dérivons deux fois, avec la formule $(\cos(\omega t + \varphi))' = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$:

$$x'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad x''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t).$$



Lisez cette équation comme une loi physique : le rappel est proportionnel à l'écart. Écartez une masse suspendue à un ressort de sa position d'équilibre : le ressort la rappelle d'autant plus fort qu'elle est loin, c'est exactement $x'' = -\omega^2 x$, et la solution est une sinusoïde. Le pendule aux petites oscillations obéit à la même loi, précisément parce que $\sin x \approx x$ près de 0 (la tangente remarquable de la section 3). Ce mouvement porte un nom : l'**oscillateur harmonique**, et son équation est sans doute l'équation différentielle la plus résolue de toute la physique.

5.3. La résonance, ou la promesse tenue

Revenons au pont de Broughton. Tout système oscillant (un pont suspendu, une corde, un verre de cristal) possède une ou plusieurs **fréquences propres** : les fréquences auxquelles il oscille naturellement quand on l'écarte de l'équilibre, dictées par son équation $y'' = -\omega^2 y$. Tant qu'on le sollicite à une autre cadence, les impulsions arrivent tantôt dans le sens du mouvement, tantôt à contretemps : leurs effets se compensent en partie. Mais si la cadence extérieure s'accorde à la fréquence propre, chaque impulsion arrive *exactement* au bon moment, comme une main qui pousse une balançoire à l'instant juste : les amplitudes s'additionnent, tour après tour. C'est la **résonance**.

Soixante-quatorze paires de bottes frappant le tablier en mesure, à une cadence proche de la fréquence propre du pont : chaque pas nourrissait l'oscillation que les pas précédents avaient créée. Le rebond qui amusait les soldats était la somme géométrique de leurs impulsions ; les chaînes, elles, n'ont pas ri. Rompre le pas, c'est désynchroniser les impulsions pour qu'aucune fréquence ne soit servie deux fois de suite : une consigne de sécurité écrite dans le langage de $\sin(\omega t)$.

5.4. L'onde qui contient toutes les ondes ★

Une dernière porte, entrouverte. Les signaux de la nature sont rarement des sinusoïdes pures : la corde de guitare vibre selon sa fréquence fondamentale et ses harmoniques (les multiples de celle-ci), et c'est leur dosage qui fait qu'un la de guitare ne sonne pas comme un la de piano. Dès 1807, Joseph Fourier soumet à l'Académie une affirmation qui scandalise ses rapporteurs, Lagrange en tête, et qu'il publie en 1822 dans la *Théorie analytique de la chaleur* : **tout signal périodique**, même anguleux, même discontinu, **est une somme de sinusoïdes**. Telle quelle, l'affirmation était

SUITE →

F5 · Primitives et équations différentielles

Le prochain chapitre apprend à résoudre les équations du type $y' = ay + b$: vos premières équations différentielles.

Nous venons de vérifier que les sinusoïdes satisfont $y'' = -\omega^2 y$, pas de démontrer que ce sont les seules solutions. Ce sont bien les seules ; la preuve attend la prépa. ★

ÉCHO EXO

EXO-F4 · Ex. 22–25 ★★

Le monde oscille à l'Atelier : le diapason chronométré, une étude complète menée au corollaire, le sinus cardinal promis, et l'oscillateur habillé. ■ ♦ ★

La résonance ne date pas des ponts : en 1850, le pont de la Basse-Chaîne à Angers s'effondre sous un bataillon pris dans la tempête (plus de deux cents morts) : vent, corrosion déjà critique et pas cadencé s'additionnent, aucune cause ne suffisant seule. Et en 2000, le Millennium Bridge de Londres tanguait sous les pas involontairement synchronisés des piétons : fermé deux jours après l'inauguration, corrigé par des amortisseurs.

Angers 1850, Londres 2000

trop belle : il a fallu Dirichlet, en 1829, pour préciser à quelles conditions elle est vraie, et ce qui se passe exactement aux points de saut. Un exemple spectaculaire : le signal carré (qui saute brutalement de -1 à 1) s'écrit

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \dots \right),$$

somme infinie d'ondes parfaitement lisses. Le laboratoire ci-dessous vous le fera voir. L'idée de Fourier est devenue l'outil de travail du son numérique, des images compressées et de l'IRM : chaque fois qu'un signal est analysé, c'est en sinusoides qu'on le décompose.

L'idée couvait depuis la « querelle des cordes vibrantes » (1747-1829) : d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli s'y déchirèrent sur la nature d'une fonction, à propos de la musique d'une corde. Bernoulli tenait pour les sommes de sinus ; il avait raison avant tout le monde.

d'Alembert, Euler, Bernoulli

6. LE LABORATOIRE

6.1. Archimède, ou la limite fondamentale avant la lettre

Inscrivez un polygone régulier à n côtés dans le cercle de rayon 1 : chaque côté est une corde sous-tendant l'angle $\frac{2\pi}{n}$, donc de longueur $2 \sin \frac{\pi}{n}$, et le demi-périmètre vaut $n \sin \frac{\pi}{n}$. Quand n grandit, le polygone épouse le cercle : le demi-périmètre tend vers π . Or, en posant $h = \frac{\pi}{n}$:

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \pi \times \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi \times 1 = \pi.$$

La convergence de la méthode d'Archimède, c'est *exactement* notre limite fondamentale. Le programme suivant part de l'hexagone ($n = 6$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$) et double le nombre de côtés à chaque étape, grâce à la formule de l'angle moitié $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{2}}$ (valable pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, où $\cos \theta \geq 0$), sans jamais utiliser la valeur de π :

```
1 from math import sqrt
2
3 s, n = 0.5, 6 # hexagone : sin(pi/6) = 1/2
4 for etape in range(15):
5     print(n, "cotes :", n * s)
6     s = sqrt((1 - sqrt(1 - s * s)) / 2) # angle
7     n = 2 * n
```

Douze étapes suffisent pour six décimales de π . Archimède, au III^e siècle avant notre ère, s'était arrêté au polygone à 96 côtés, obtenant l'encadrement $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$: la cinquième ligne d'affichage est précisément son polygone à 96 côtés, et sa valeur, 3,14103, tombe bien dans son encadrement.

JALON

Je sais lire les paramètres d'un signal sinusoidal, vérifier l'équation de l'oscillateur, et expliquer la résonance avec mes mots.

OBJECTIFS

- ▷ Approcher π à la manière d'Archimède
- ▷ Visualiser les sommes de Fourier

Regardez la fin du tableau : les trois dernières valeurs affichées sont identiques, le programme cesse de progresser dès la treizième ligne. Poussez la boucle à `range(30)` : vers la vingt-cinquième étape, la soustraction $1 - \sqrt{1 - s^2}$ retranche deux nombres presque égaux et tout s'effondre. Vous l'aviez déjà constaté avec la méthode de Briggs au chapitre F3 : machine et mathématiques ne défont pas aux mêmes endroits.

Le piège des flottants

6.2. Voir le théorème de Fourier

Sommons les premières sinusoïdes du signal carré de la section 5, et regardons la somme se raidir :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 t = np.linspace(-np.pi, np.pi, 1000)
5 for N in [1, 3, 15]:
6     S = sum(4 / np.pi * np.sin((2 * k + 1) * t) / (2
7             * k + 1)
8             for k in range(N))
9     plt.plot(t, S, label=f"{N} sinusoïde(s)")
10 plt.legend()
plt.show()
```

Avec une sinusoïde, une vague ; avec trois, un plateau qui s'esquisse ; avec quinze, un créneau presque net, aux angles près : le petit dépassement accroché aux sauts ne disparaît jamais tout à fait, les mathématiciens l'appellent phénomène de Gibbs. Chaque terme ajouté est une onde parfaitement lisse, et pourtant leur somme fabrique des angles droits : c'est le tour de force qui laissait Lagrange incrédule dès 1807.

L'ONDE CONTINUE

Faites le bilan du chemin : un cercle, un enroulement, deux coordonnées ; une limite conquise par trois aires emboîtées ; deux dérivées qui se répondent en cycle ; des équations qui se dessinent plus qu'elles ne se calculent ; et au bout, la résonance d'un pont, le courant d'une prise et le théorème de Fourier. Les fonctions sinus et cosinus sont le pont le plus court entre la géométrie la plus ancienne (Hipparque dressait ses tables il y a vingt-deux siècles) et la physique la plus quotidienne.

Elles reviendront vite : le chapitre F5 (primitives et équations différentielles) leur donnera un rôle de premier plan, puisque dériver $\sin$ et $\cos$ en cycle, c'est aussi les *primitiver* en cycle ; et le chapitre F6 (calcul intégral) mesurera l'aire sous une arche de sinusoïde, dont vous découvrirez qu'elle vaut exactement 2. L'onde, elle, ne s'arrête jamais tout à fait.

ÉCHO EXO

EXO-F4 · Ex. 26–30 ★★★★★

Histoires et belles mathématiques : la formule oubliée de Bhāskara, la loi de Morrie, le quadrilatère de Ptolémée, le problème de Regiomontanus et la formule de Viète. ♦ ★

Fin du chapitre

[ACT-F4] [EXO-F4] [DM-F4.1] [EVAL-F4]