



DM 1 · F4. LA LUMIÈRE QUI CALCULE

De Héron d'Alexandrie à Fermat : le principe du moindre temps

LE PLAN DE L'ÉDIFICE

PARTIE	NIVEAUX	S'APPUIE SUR
0. Prologue et préliminaires	△	
I. Le miroir de Héron	△▲	R2 et R3
II. Le calcul que Fermat redoutait	△▲◆	R1 et R2 ; indépendante de la partie I
III. La loi des sinus	△▲	la partie II
IV. Frontières : là où la lumière rebrousse	▲◆	la partie III et la récurrence (A0)

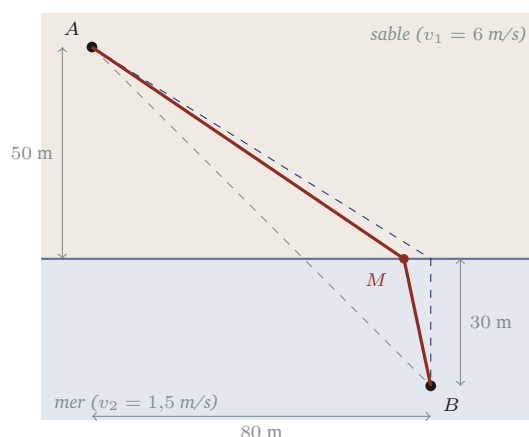
Facultatif, et pour longtemps. Tout travail sincère, même partiel, est valorisé ; un travail bâclé ne l'est jamais. Ce document peut vous accompagner plusieurs années : certaines questions vous attendront en prépa ou à l'université. Horizon raisonnable : 3 à 4 semaines. Et si vous bloquez, écrivez : dire où l'on bloque et pourquoi est déjà du travail mathématique, souvent le plus formateur. Vérifiez toujours les hypothèses d'un résultat avant de l'utiliser.

△ fondations : accessible avec le cours · ▲ construction : recul et autonomie · ◆ sommet : défis, ou invitations pour plus tard

PROLOGUE

Un nageur en détresse

UN maître-nageur est posté sur la plage, à cinquante mètres du bord de l'eau. Un nageur appelle à l'aide, au large, à trente mètres du rivage ; le long du bord, quatre-vingts mètres les séparent. Sur le sable, le sauveteur court à six mètres par seconde ; dans l'eau, il nage à un mètre et demi par seconde. Chaque seconde compte. L'instinct crie : « fonce en ligne droite ». L'instinct a tort, et ce devoir raconte pourquoi : le meilleur trajet est une ligne *brisée*, et l'angle exact de la brisure obéit à une loi que la lumière connaît depuis toujours. Trois hommes jalonnent cette histoire : un ingénieur grec du premier siècle, un géomètre de Bagdad du dixième, et un magistrat toulousain qui, un premier janvier, fit le calcul qu'il redoutait et y trouva ce qu'il n'attendait pas. À la fin du voyage, vous saurez pourquoi les fibres optiques gardent la lumière prisonnière et pourquoi les mirages ne se montrent qu'au ras de la route, toujours loin devant.



En gris : la ligne droite. En bleu : tout par la plage, puis droit vers le large. En rouge : le trajet gagnant, qui casse en M ... mais où placer M ?

Q1. Trois chronos. On admet pour l'instant les deux trajets « naïfs » de la figure, et l'on convient que chaque trajet est parcouru en ligne droite dans chaque milieu.

- $\triangle$ La ligne droite de A à B coupe le bord de l'eau au point d'abscisse 50 m (on l'admet ici ; la figure le suggère, et le théorème de Thalès le confirmerait). Calculer sa durée totale : 70,71 m de sable puis 42,43 m d'eau, à arrondir au centième de seconde.
- $\triangle$ Calculer la durée du trajet « tout par la plage » : courir de A au point du bord situé face à B , puis nager droit vers B . Comparer au a) : l'instinct de la ligne droite fait-il bien son travail ?

ALEXANDRIE, I^{ER} SIÈCLE

Héron d'Alexandrie est l'ingénieur le plus inventif de son temps : machines à vapeur de démonstration, portes de temple automatiques, distributeurs d'eau lustrale à pièce. Dans sa *Catoptrique*, il démontre que le rayon lumineux qui rebondit sur un miroir suit, parmi tous les chemins possibles, le *plus court*. La lumière allant (croyait-on) à vitesse constante, plus court chemin et moindre durée ne font qu'un : sans le savoir, Héron venait de semer la graine d'un principe qui, dix-sept siècles plus tard, porterait toute la physique. La partie I refait sa démonstration ; le reste du devoir la dépasse.

Notations et outils. Le plan est muni d'un repère orthonormé, l'unité est le mètre. Les résultats R1 à R4 peuvent être cités partout. Les angles d'optique se mesurent traditionnellement en *degrés* : nous suivrons cet usage dans les parties III et IV, en le signalant ; le facteur de conversion est $180^\circ = \pi \text{ rad}$, et aucune dérivée ne sera jamais prise sur un angle en degrés.

R1 – TEMPS DE PARCOURS

Un mobile qui parcourt une distance ℓ à vitesse constante v met un temps $\frac{\ell}{v}$. Un trajet en plusieurs tronçons dure la somme des durées de ses tronçons. (*Admis : physique.*)

R2 – DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Dans un repère orthonormé, la distance entre $P(x_P; y_P)$ et $Q(x_Q; y_Q)$ vaut

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

(Vu en seconde.)

R3 – INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Pour tous points A, M, B du plan : $AM + MB \geq AB$, avec égalité si et seulement si M appartient au segment $[AB]$. (*Admise.*)

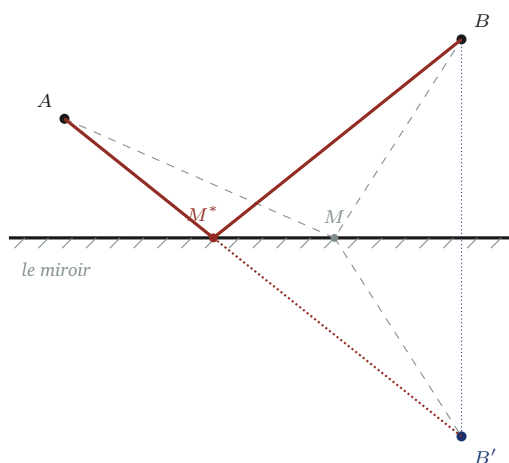
PARTIE I

s'appuie sur R2 et R3

Le miroir de Héron

Avant la plage, le miroir : un seul milieu, une seule vitesse, et le problème du plus court chemin à rebond. Vous avez déjà rencontré, à l'Atelier, un maximum conquis sans aucune dérivée (le problème de Regiomontanus) : voici, quatorze siècles avant lui, un minimum conquis par pure symétrie.

Un rayon part de $A(0; 3)$, touche le miroir (l'axe des abscisses) en un point $M(x; 0)$, et repart vers $B(10; 5)$. Tous les points sont au-dessus du miroir ; x décrit $\mathbb{R}$.



Le miroir de Héron : le détour par le symétrique B' déplie le rebond en un chemin tendu. Le trajet gris, plié en M , se compare au trajet rouge, aligné avec B' en M^* .

Q2. Le pliage.

- △ Exprimer, à l'aide de R2, la longueur $\ell(x) = AM + MB$ du trajet en fonction de x .
- △ Soit $B'(10; -5)$ le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses. Justifier que $MB = MB'$ pour tout point M de l'axe (on pourra utiliser R2, ou remarquer que la symétrie conserve les distances).
- ▲ En déduire, avec R3, que $\ell(x) \geq AB'$ pour tout x , avec égalité si et seulement si M appartient au segment $[AB']$: le trajet minimal est unique, et son rebond M^* est le point où $[AB']$ perche le miroir. Calculer AB' : c'est la longueur du meilleur trajet.

Q3. L'angle égal.

- △ Les triangles rectangles formés par A, M^* et leurs projetés donnent, par alignement de A, M^* et B' (théorème de Thalès) : $\frac{x^*}{3} = \frac{10 - x^*}{5}$. En déduire x^* , puis vérifier que la longueur trouvée en Q2c vaut bien $\sqrt{10^2 + 8^2} \approx 12,81$.
- ▲ On note i et r les angles que font $[M^*A]$ et $[M^*B]$ avec la normale au miroir (la verticale en M^*). Exprimer $\tan i$ et $\tan r$ à l'aide des coordonnées, calculer les deux valeurs, et conclure : le plus court chemin rebondit à angles égaux. C'est la loi de la réflexion, déduite et non constatée.

Le calcul que Fermat redoutait

Retour à la plage du prologue. Cette fois la vitesse *change* au bord de l'eau, et l'astuce du symétrique est désarmée : déplier le trajet ne conserve plus la durée, puisque les deux tronçons ne se parcourent pas au même train. Là où la symétrie abdique, l'analyse commence ; voici le calcul, et c'est celui que Fermat repoussa pendant cinq ans, le jugeant trop lourd. Vos outils de terminale le rendent honnête.

On repère le bord de l'eau par l'axe des abscisses. Le sauveteur part de $A(0; 50)$, le nageur est en $B(80; -30)$; le sauveteur entre dans l'eau au point $M(x; 0)$, avec $x \in [0; 80]$; les vitesses sont $v_1 = 6$ m/s sur le sable et $v_2 = 1,5$ m/s dans l'eau. Plus généralement, on pose $a = 50$, $b = 30$, $d = 80$, et l'on gardera les lettres le plus longtemps possible : le résultat final les mérite.

Q4. La fonction durée.

- a) $\triangle$ Justifier, avec R1 et R2, que la durée totale du trajet vaut, pour tout $x \in [0; d]$:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

- b) $\triangle$ Compléter la table (valeurs en secondes, arrondies au centième ; quatre valeurs sont déjà données, dont deux viennent du prologue) :

x	0	20	40	50	60	70	75	80
$t(x)$	65,29	...	...	40,07	...	35,42	...	35,72

- c) $\triangle$ Où le minimum semble-t-il se cacher ? Donner un encadrement de largeur 10 lu dans la table, en justifiant la lecture en une phrase.

Q5. Le permis de dériver. L'Atelier vous a appris (exercice 12, « le permis de dériver la racine ») qu'avant de dériver une racine, on vérifie que la quantité sous le radical ne s'annule jamais ; on refait ici le geste, on ne refait pas la théorie.

- a) $\blacktriangle$ Justifier que, pour tout $x \in [0; d]$, $a^2 + x^2 \geq a^2 > 0$ et $(d-x)^2 + b^2 \geq b^2 > 0$: les deux racines sont composées de fonctions dérivables à valeurs strictement positives, donc t est dérivable sur $[0; d]$. Où l'hypothèse $a > 0$ et $b > 0$ vient-elle d'être utilisée ? (Imaginer $a = 0$: que devient le trajet, et pourquoi la formule de dérivée ci-dessous perdrait-elle son sens en $x = 0$?)
- b) $\blacktriangle$ Établir :

$$\forall x \in [0; d], \quad t'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}}.$$

Q6. La fonction auxiliaire. Le signe de t' n'est pas lisible à l'œil nu : les deux morceaux bougent en sens contraires. On introduit, pour $c > 0$ fixé, la fonction

$$g_c : u \mapsto \frac{u}{\sqrt{c^2 + u^2}}, \quad \text{définie sur } \mathbb{R}.$$

- a) $\blacktriangle$ Démontrer que g_c est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g'_c(u) = \frac{c^2}{(c^2 + u^2)^{3/2}} > 0 :$$

g_c est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (Soyons honnêtes sur la manœuvre : dériver g_c , c'est calculer la dérivée seconde de t sans le dire ; l'auxiliaire ne fait que ranger le calcul.)

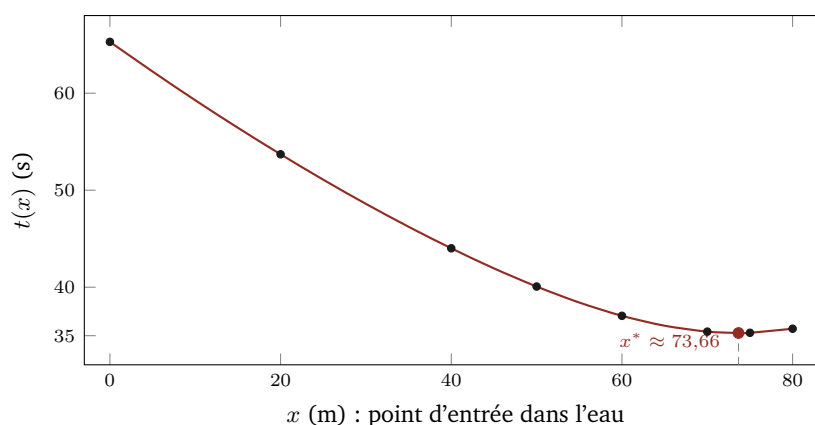
b) ▲ Vérifier que

$$\forall x \in [0; d], \quad t'(x) = \frac{1}{v_1} g_a(x) - \frac{1}{v_2} g_b(d-x),$$

puis démontrer que t' est strictement croissante sur $[0; d]$ (on décomposera le second terme : $x \mapsto d-x$ décroît strictement, g_b croît strictement).

Q7. L'unique minimum.

- a) △ Calculer $t'(0)$ et $t'(d)$ avec les valeurs numériques du sauvetage, à 10^{-3} près, et vérifier : $t'(0) \approx -0,624 < 0$ et $t'(80) \approx 0,141 > 0$.
- b) ▲ La fonction t' est continue sur $[0; 80]$ (composées et quotients de fonctions continues, dénominateurs jamais nuls), strictement croissante (Q6b), et change de signe entre les bornes. Énoncer avec toutes ses hypothèses le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone, chapitre F1), et en déduire qu'il existe un unique $x^* \in]0; 80[$ tel que $t'(x^*) = 0$. (ce résultat peut être admis pour la suite)
- c) ▲ Dresser le tableau de variations de t sur $[0; 80]$ (le signe de t' de part et d'autre de x^* découle de sa stricte croissance), et conclure : le trajet de durée minimale existe et il est unique.
- d) △ Calculer $t'(73)$ et $t'(74)$ à 10^{-3} près, et en déduire l'encadrement $73 < x^* < 74$. (La machine de l'annexe B affinera : $x^* \approx 73,66$ m, pour une durée de 35,28 s : presque 5 secondes de mieux que la ligne droite du prologue.)



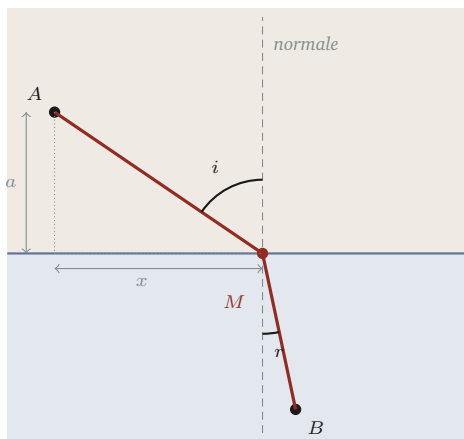
La fonction durée : les points noirs sont ceux de la table de Q4b, la vallée est celle que Q7 vient de certifier unique.

Remarquer l'asymétrie : se tromper de dix mètres à gauche coûte bien plus cher qu'à droite, car on paie l'erreur au tarif de l'eau.

◆ **Q8. Défi : la croissance sans la dérivée.** Démontrer la stricte croissance de g_c sur $\mathbb{R}$ sans aucune dérivée. (Traiter trois cas : sur $]0; +\infty[$, écrire $g_c(u) = \frac{1}{\sqrt{c^2/u^2 + 1}}$ et suivre le sens de variation de chaque étage de la composition ; puis recoller $u = 0$ et les $u < 0$ par le signe et l'imparité de g_c .)

La loi des sinus

Le zéro de t' n'est pas un nombre : c'est une *géométrie*. La figure ci-dessous reprend le sauvetage et marque les deux angles que le trajet optimal fait avec la *normale* au rivage (la perpendiculaire au bord de l'eau) : i côté sable, r côté mer. C'est ici que le devoir bascule des plages vers la lumière.



L'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r se mesurent depuis la normale. Dans le triangle rectangle gris, le côté opposé à i est horizontal, de longueur x , et l'hypoténuse est le tronçon AM : le sinus est un quotient de longueurs du trajet.

Q9. Lire le zéro de t' .

- a) $\triangle$ Sur la figure, justifier que, pour tout $x \in [0; d]$:

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{et} \quad \sin r = \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}.$$

(Dans chaque triangle rectangle : côté opposé sur hypoténuse.)

- b) $\blacktriangle$ En déduire que la condition $t'(x^*) = 0$ de la partie II s'écrit exactement :

$$\boxed{\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}}$$

Le trajet le plus rapide est celui dont les sinus sont proportionnels aux vitesses : voilà ce que le calcul de Fermat a trouvé au bout de la plume.

- c) $\triangle$ Pour le sauvetage : à l'aide de $x^* \approx 73,66$, calculer $\sin i$ et $\sin r$ à 10^{-3} près, vérifier que leur rapport vaut environ $\frac{v_1}{v_2} = 4$ (l'écart résiduel est un pur effet d'arrondi), et donner i et r au dixième de degré (la calculatrice fournit l'angle ; son unicité dans $[0^\circ; 90^\circ]$ est garantie par la stricte croissance du sinus sur cet intervalle, vue au cours).

TOULOUSE, 1^{ER} JANVIER 1662

Pierre de Fermat, magistrat au parlement de Toulouse, conteste depuis des années l'explication cartésienne de la réfraction. En 1657, son ami Cureau de la Chambre lui souffle une idée : et si la nature choisissait le chemin de moindre *temps* ? Fermat repousse le calcul, qu'il juge épineux ; il s'y résout enfin et, le premier janvier 1662, envoie son « Analyse des réfractions ». Stupeur : son principe redonne *exactement* la loi des sinus publiée par Descartes, qu'il combattait. L'adversaire confirme la formule, par le chemin opposé : Descartes supposait la lumière *plus rapide* dans l'eau, Fermat la prend *plus lente*, et les deux mécanismes contraires mènent à la même loi. Le cartésien Clerselier riposte en mai : « Le principe que vous prenez pour fondement de votre démonstration,

à savoir que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples, n'est qu'un principe moral et non point physique, qui n'est point et qui ne peut être la cause d'aucun effet de la nature. » Il faudra attendre 1850 pour que Léon Foucault mesure la vitesse de la lumière dans l'eau et rende son verdict ; la question Q15 vous le laisse découvrir.

Q10. La lumière entre en scène.

DÉFINITION – INDICE DE RÉFRACTION

La lumière file dans le vide à la vitesse $c \approx 3,00 \cdot 10^8$ m/s ; dans un milieu transparent, elle ralentit à une vitesse $v < c$. L'indice du milieu est le rapport $n = \frac{c}{v} \geq 1$: l'air a un indice $n \approx 1,0003$, l'eau $n = \frac{4}{3}$, le verre courant $n \approx 1,5$. Un milieu d'indice plus grand est dit *plus réfringent* : la lumière y va plus lentement.

- a) $\triangle$ Un rayon passe d'un milieu d'indice n_1 (vitesse v_1) à un milieu d'indice n_2 (vitesse v_2). Montrer que la loi de Q9b se réécrit :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

C'est la loi de Snell-Descartes des cours de physique, ici *démontrée* à partir du moindre temps.

- b) $\triangle$ Un rayon passe de l'air (on prendra $n_1 = 1$) à l'eau ($n_2 = \frac{4}{3}$). Compléter la table au centième de degré (même remarque qu'en Q9c : l'angle lu à la calculatrice est unique par stricte croissance du sinus sur $[0^\circ ; 90^\circ]$) :

i	30°	45°	60°
$\sin r$	0,375	...	...
r	$22,02^\circ$	...	...

- c) $\blacktriangle$ Démontrer que si $n_2 > n_1$, alors $r < i$ pour tout $i \in]0^\circ ; 90^\circ[$: en entrant dans un milieu plus lent, le rayon se *approche* de la normale. (Comparer $\sin r$ et $\sin i$, puis invoquer la stricte croissance du sinus sur $[0^\circ ; 90^\circ]$: c'est elle qui transforme une inégalité de sinus en inégalité d'angles.)

BAGDAD, LEYDE, PARIS

La loi des sinus a trois naissances. Vers 984, à Bagdad, Ibn Sahl étudie les « miroirs et lentilles ardents » qui concentrent la lumière ; ses constructions de lentilles parfaites utilisent très exactement la relation des sinus, six siècles et demi avant sa publication européenne : ses manuscrits, oubliés, n'ont été relus qu'en 1990, par l'historien Roshdi Rashed. En 1621, à Leyde, Willebrord Snell retrouve la relation ; il meurt sans la publier, et c'est en dépouillant ses papiers qu'on accusera plus tard Descartes de plagiat (à tort, semble-t-il). En 1637 enfin, Descartes publie la loi dans *La Dioptrique* et lui laisse son nom français. Trois découvertes, trois routes : il ne manquait que la raison profonde, celle que Fermat apporta.

Frontières : là où la lumière rebrousse

Une loi ne montre sa force qu'aux frontières. Que se passe-t-il quand l'équation $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ n'a pas de solution ? La réponse enferme la lumière dans les fibres optiques, fait flotter des lacs fantômes sur les routes d'été, et vous donnera l'occasion d'employer, pour finir, l'arme favorite du chapitre A0 : la récurrence.

Q11. La réflexion totale. Un rayon tente de sortir d'un milieu lent vers un milieu rapide : $n_1 > n_2$ (de l'eau vers l'air, par exemple).

- a) ▲ D'après la loi, $\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i$. Or un sinus d'angle ne dépasse jamais 1 (identité du cercle, ou lecture directe) : montrer qu'aucun angle r ne peut exister dès que $\sin i > \frac{n_2}{n_1}$. Le rayon ne peut plus sortir : il se réfléchit intégralement, comme sur un miroir parfait. L'angle limite i_c , dit *critique*, vérifie $\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$ (à l'angle critique exactement, le rayon réfracté rase la surface : on convient dans la suite de ranger ce cas limite avec la réflexion totale).
- b) △ Calculer i_c au centième de degré pour la sortie eau $\rightarrow$ air ($\frac{4}{3} \rightarrow 1$) puis verre $\rightarrow$ air ($1,5 \rightarrow 1$). Vue du fond d'une piscine, toute la voûte du ciel se comprime ainsi dans un cône de demi-angle i_c : les plongeurs l'appellent la fenêtre de Snell, et son bord est un miroir.

Q12. La fibre optique. Une fibre optique est un fil de verre à deux étages : un cœur d'indice $n_1 = 1,50$ gainé d'un verre légèrement moins réfringent, $n_2 = 1,48$. Un rayon qui voyage dans le cœur frappe la paroi sous l'angle θ (mesuré depuis la normale à la paroi).



Angles fortement exagérés : à l'angle critique réel, un rebond consomme une longueur six fois supérieure à l'épaisseur du cœur. Le rayon rebondit sur la frontière cœur-gaine sans jamais la franchir : c'est la réflexion totale de Q11.

- a) ▲ À quelle condition sur θ le rayon reste-t-il prisonnier du cœur, rebond après rebond ? Calculer l'angle critique au centième de degré, et commenter : pourquoi dit-on que la lumière est guidée ?
- b) ◆ Le rayon entre dans la fibre par sa face avant, depuis l'air (d'indice 1), sous l'angle α (depuis la normale à cette face) ; il se réfracte en un angle r , puis frappe la paroi latérale sous $\theta = 90^\circ - r$ (la normale à la paroi est perpendiculaire à la normale à la face). Démontrer que le rayon reste guidé si et seulement si

$$\sin \alpha \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2},$$

en enchaînant : la loi de l'entrée ($\sin \alpha = n_1 \sin r$), l'angle associé ($\sin \theta = \sin(90^\circ - r) = \cos r$), la condition du a), et l'identité du cercle pour passer de $\cos r$ à $\sin r$. Calculer la valeur numérique de $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (l'ouverture numérique des opticiens) et l'angle maximal d'entrée : le cône d'acceptance de la fibre. (ce résultat peut être admis pour la suite)

Q13. L'invariant. La plage n'avait que deux milieux ; la nature en empile volontiers davantage. Traversons N couches horizontales d'indices $n_1, n_2, \dots, n_N$: le trajet le plus rapide est une ligne brisée qui casse à chaque interface, et l'on note i_k l'angle (depuis la verticale) dans la couche k .

R4 – EXISTENCE DU MEILLEUR TRAJET

Parmi toutes les lignes brisées joignant le point de départ au point d'arrivée en cassant aux interfaces, il en existe une de durée minimale. (*Admis : c'est le seul emprunt du devoir à des mathématiques supérieures.*)

- a) ♦ *La perturbation locale.* On fige tous les points de passage du trajet optimal, sauf un : celui de l'interface entre les couches k et $k+1$, qu'on laisse glisser. Justifier que la durée totale s'écrit alors : une constante, plus la durée d'un trajet à deux milieux entre deux points fixés, et que si le trajet global est minimal, ce sous-trajet l'est aussi (sinon, l'améliorer améliorerait le tout). En déduire, par la partie III :

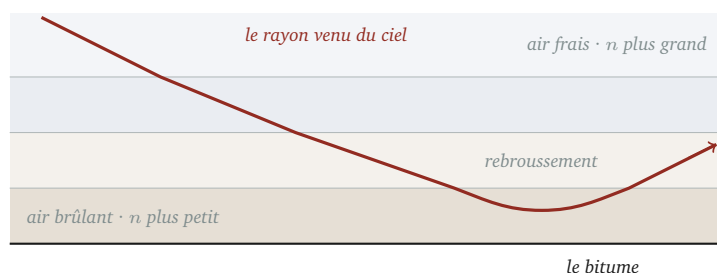
$$n_k \sin i_k = n_{k+1} \sin i_{k+1}.$$

- b) ▲ Démontrer par récurrence sur k que

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad n_k \sin i_k = n_1 \sin i_1 :$$

la quantité $n \sin i$ est un *invariant* du rayon, sa carte d'identité, conservée de couche en couche quel que soit l'empilement. (*ce résultat peut être admis pour la suite*)

Q14. Le mirage. Sur une route d'été, l'air surchauffé au ras du bitume est moins dense, donc moins réfringent, que l'air plus frais au-dessus : l'indice décroît vers le bas. Un rayon qui descend du ciel traverse ces couches de plus en plus rapides, et Q13 le suit à la trace.



Angles très exagérés : en réalité, tout se joue à moins d'un degré de l'horizontale. La « flaque » sur la route est un morceau de ciel arrivé par en dessous.

- a) ▲ D'après Q13b, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $\sin i_k = \frac{n_1 \sin i_1}{n_k}$: quand n_k diminue, $\sin i_k$ augmente, et le rayon s'aplatit. Justifier que la descente s'arrête (le rayon devient horizontal puis rebrousse, par le mécanisme de la réflexion totale de Q11) dès qu'une couche vérifie

$$n_k \leq n_1 \sin i_1.$$

- b) ♦ Faisons les comptes, pour savoir si le phénomène est plausible. On prend $n_1 = 1,000\,293$ (air à 20°C) et l'on admet la loi physique suivante : à pression fixée, la quantité $(n-1) \times T$ est constante, où T est la température absolue en kelvins ($T = 293\text{ K}$ à 20°C). Calculer $n_1 \sin i_1$ pour un rayon presque rasant, $i_1 = 89,9^\circ$, puis la température de l'air qui suffirait au rebroussement, et constater : un ou deux degrés Celsius d'écart suffisent. Refaire le calcul pour $i_1 = 89,5^\circ$ (l'air au ras d'un bitume d'été, autour de 64°C, y parvient) puis pour $i_1 = 89^\circ$: quelle température faudrait-il ? Conclure en une phrase : pourquoi le mirage n'apparaît-il qu'en incidence rasante, c'est-à-dire toujours *loin devant*, et recule-t-il quand on avance ?

Le voyage s'achève ici, et il vaut la peine d'être contemplé d'un seul regard. Une plage, une dérivée, un théorème du chapitre F1 : et voilà expliqués, d'un même mouvement, le sauveteur qui casse sa course,

la loi que trois civilisations ont cherchée, la lumière prisonnière des fibres qui portent cette page jusqu'à vous, et les lacs fantômes des étés. Clerselier voyait dans le moindre temps un « principe moral » indigne de la physique ; la mécanique tout entière s'est reconstruite, depuis, sur des principes de ce type, dits variationnels. La nature, décidément, calcule ; et vous savez désormais refaire son calcul.

Q15. Pour continuer le voyage (questions ouvertes, à explorer librement).

- a) ♦ Descartes supposait la lumière plus *rapide* dans l'eau que dans l'air, Fermat plus *lente*, et les deux retrouvaient la même loi des sinus. Les deux modèles s'accordent donc sur la *valeur* du rapport $\frac{\sin i}{\sin r}$, mais ils l'identifient à des rapports de *vitesse*s inverses l'un de l'autre : expliquer pourquoi l'expérience de Léon Foucault (1850), qui compara les vitesses de la lumière dans l'air et dans l'eau, permettait de départager les deux camps, et chercher quel fut le verdict.
- b) ♦ En 1696, Jean Bernoulli défie l'Europe savante : parmi tous les toboggans joignant deux points, lequel offre la descente la plus rapide ? Sa propre solution découpe la chute en fines couches horizontales où la vitesse, dictée par la hauteur de chute, est presque constante, et applique à la bille *exactement* l'invariant de Q13. Chercher le nom de la courbe obtenue, et méditer : Bernoulli a résolu un problème de mécanique en faisant *comme si* la bille était un rayon de lumière.
- c) ♦ Question libre : inventer votre propre problème de moindre temps (deux milieux, trois milieux, un obstacle...), le mettre en équation comme en partie II, et le confier au script de l'annexe B.

LE RÉCIT DE LA GOUTTE D'EAU

Il manque un personnage à cette histoire : l'arc-en-ciel. Dans *Les Météores* (1637 encore), Descartes suit un rayon de soleil dans une goutte d'eau sphérique : une réfraction en entrant, une réflexion au fond, une réfraction en sortant. La déviation totale dépend de l'angle d'attaque du rayon, et elle passe par un *minimum* : autour de ce minimum, les rayons s'accumulent, et cette concentration fait la lumière de l'arc. Le calcul du minimum (Descartes le mena par tabulation, comme votre Q4b !) place l'arc à 42° du point du ciel opposé au Soleil : c'est pourquoi tous les arcs-en-ciel du monde ont le même rayon apparent. Sa mise en équation demande une fonction réciproque du sinus qui dépasse la boîte à outils de ce devoir : la courbe complète de déviation, et le 42° qui en tombe, vous attendent sur le compagnon numérique.

ANNEXE • COUPS DE POUCE

À consulter librement : un coup de pouce n'est pas une solution, et y recourir n'enlève rien à la valeur du travail.

Q1a. R1, deux tronçons : $\frac{70,71}{6} + \frac{42,43}{1,5}$.

Q2b. $M(x; 0)$, $B(10; 5)$, $B'(10; -5)$: les deux distances données par R2 ont le même carré.

Q2c. $\ell(x) = AM + MB' \geq AB'$ par R3 ; l'égalité exige $M \in [AB']$, et ce segment ne perce l'axe qu'en un point.

Q3b. Dans le triangle A , $(0; 0)$, M^* , l'angle en A vaut i (alternes-internes avec la normale, toutes deux verticales) : côté opposé x^* , côté adjacent 3, donc $\tan i = \frac{x^*}{3}$; de même $\tan r = \frac{10-x^*}{5}$; Q3a a précisément établi l'égalité de ces deux quotients.

Q5a. Si $a = 0$, le point A est au bord de l'eau : en $x = 0$, la première racine vaut $\sqrt{x^2} = |x|$, dont le taux de variation en 0 n'a pas de limite (pentes -1 et $+1$ de part et d'autre).

Q5b. Dériver chaque racine comme composée : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u(x) = a^2 + x^2$ puis $u(x) = (d-x)^2 + b^2$; simplifier les facteurs 2.

Q6a. Quotient : $g'_c(u) = \frac{\sqrt{c^2+u^2}-u \cdot \frac{u}{\sqrt{c^2+u^2}}}{c^2+u^2}$; réduire le numérateur au même dénominateur $\sqrt{c^2+u^2}$: il reste c^2 en haut.

Q6b. Si $x < y$ dans $[0; d]$: $g_a(x) < g_a(y)$ (croissance stricte de g_a) et $d - x > d - y$ donc $g_b(d - x) > g_b(d - y)$, donc $-\frac{1}{v_2}g_b(d - x) < -\frac{1}{v_2}g_b(d - y)$; sommer les deux inégalités strictes.

Q7b. Les hypothèses à réciter : t' continue sur $[0; 80]$, strictement croissante, $t'(0) < 0 < t'(80)$, et 0 compris entre $t'(0)$ et $t'(80)$.

Q7d. $t'(73)$ et $t'(74)$ sont de signes contraires, et t' ne s'annule qu'en x^* : le zéro est entre les deux.

Q8. Pour $0 < u < u' : \frac{c^2}{u^2} > \frac{c^2}{u'^2}$, donc $\sqrt{\frac{c^2}{u^2} + 1} > \sqrt{\frac{c^2}{u'^2} + 1}$ (la racine est croissante), donc les inverses se rangent dans l'autre sens. Puis $g_c(0) = 0 < g_c(u)$ pour $u > 0$, et $g_c(-u) = -g_c(u)$ règle les couples de négatifs; comme g_c a le signe de u , tout couple $u < 0 < u'$ est réglé d'office.

Q9a. Dans le triangle gris de la figure : l'angle en A égale i (angles alternes-internes avec la normale, toutes deux verticales), son côté opposé est le segment horizontal de longueur x , l'hypoténuse est $AM = \sqrt{a^2 + x^2}$. Côté mer, même argument dans le triangle $M, (d; 0), B$.

Q10a. Remplacer $v_1 = \frac{c}{n_1}$ et $v_2 = \frac{c}{n_2}$ dans Q9b, puis multiplier les deux membres par c .

Q10c. $\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i < \sin i$ car $\frac{n_1}{n_2} < 1$ et $\sin i > 0$; si l'on avait $r \geq i$, la croissance stricte du sinus sur $[0^\circ; 90^\circ]$ donnerait $\sin r \geq \sin i$: contradiction.

Q12a. Le rayon reste guidé quand l'angle sur la paroi dépasse l'angle critique : $\sin \theta \geq \frac{n_2}{n_1}$.

Q12b. Chaîne : $\sin \theta = \cos r \geq \frac{n_2}{n_1} \iff \cos^2 r \geq \frac{n_2^2}{n_1^2} \iff \sin^2 r \leq 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}$ (identité du cercle; tous les angles sont dans $[0^\circ; 90^\circ]$, où sinus et cosinus sont positifs, ce qui autorise les carrés). Terminer avec $\sin \alpha = n_1 \sin r$.

Q13a. La durée des tronçons figés ne dépend pas du point mobile; le morceau qui en dépend est exactement un $t(x)$ de la partie II, dont le minimum vérifie la loi des sinus de Q9b, écrite avec les indices (Q10a).

Q13b. Initialisation $k = 1$ immédiate; l'hérédité est Q13a appliquée à l'interface k .

Q14b. Le rebroussement demande $n - 1 \leq n_1 \sin i_1 - 1$; la loi admise donne $T' = T \times \frac{n_1 - 1}{n_{\text{requis}} - 1}$ avec $T = 293 \text{ K}$; convertir en Celsius en retranchant 273.

Annexe B · Le laboratoire du sauveteur

Un script court, deux lignes à compléter. Il tabule la fonction t de la partie II, puis resserre le zéro de t' par dichotomie : la machine refait Q4b et prolonge Q7d.

```

1  import math
2
3  a, b, d = 50, 30, 80
4  v1, v2 = 6, 1.5
5
6  def t(x):
7      return ...          # a compléter : la formule de Q4a
8
9  def tp(x):               # la dérivée de Q5b
10     return x/(v1*math.sqrt(a*a + x*x)) \
11         - (d - x)/(v2*math.sqrt((d - x)**2 + b*b))
12
13 for x in [0, 20, 40, 50, 60, 70, 75, 80]:
14     print(x, round(t(x), 2))
15
16 lo, hi = 0, d            # dichotomie : t' < 0 a gauche, > 0 a droite
17 for _ in range(50):
18     m = (lo + hi)/2
19     if tp(m) < 0:
20         lo = m
21     else:
22         hi = ...          # a compléter
23 print("x* =", round(m, 3), " t(x*) =", round(t(m), 4))

```

Valeurs de contrôle : la table redonne les huit valeurs de Q4b, et la dichotomie affiche $x^* \approx 73,657$ pour une durée minimale de 35,2796 s. En modifiant a, b, d, v_1, v_2 , le script devient le banc d'essai de la question libre Q15c.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

La courbe de déviation de l'arc-en-ciel et son minimum à 42° , le verdict de Foucault dans le duel Descartes-Fermat, la courbe la plus rapide de Bernoulli résolue par l'optique, et les scripts complétés : la suite du voyage vous attend sur le compagne numérique.