



EXERCICES • F4. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Trente exercices pour apprivoiser l'onde

PROGRAMME D'ENTRAÎNEMENT

PARTIE	EXERCICES	DIFFICULTÉ	PARCOURS	S'APPUIE SUR
I. Le cercle retrouvé	Ex. 1–6	★ à ★★★★★	■ ♦	cours F4, § 1
II. La limite fondamentale	Ex. 7–10	★★ à ★★★★★	■ ♦ ★	cours F4, § 2
III. Dériver l'onde	Ex. 11–16	★ à ★★★★★	■ ♦ ★	cours F4, § 3
IV. Équations et inéquations	Ex. 17–21	★ à ★★★★★	■ ♦	cours F4, § 4
V. Le monde oscille	Ex. 22–25	★★ à ★★★★★	■ ♦ ★	cours F4, § 3–5
VI. Histoires et belles mathématiques	Ex. 26–30	★★★★ à ★★★★★	♦ ★	tout le chapitre

AUTOMATISMES EN PARALLÈLE

Cahier de calcul de Terminale Spécialité : fiches 6 (Fonctions trigonométriques) et 7 (Dérivation trigonométrique) ; en révision, fiches 23 et 24 du cahier de Première (Trigonométrie). Cahiers complets et corrigés sur le compagnon numérique.

APL application · THE théorie · SYN synthèse · APR approfondissement ★ difficulté de 1 à 6

⌚ ≈ 10 min · ⌚ ≈ 20 min · ⌚ ≈ 30 min · ⌚ 45 min et plus

I. LE CERCLE RETROUVÉ

↔ s'appuie sur COURS F4, § 1 · l'enroulement, les angles associés, parité et périodicité

EXERCICE 1 · APL-F4-01



Premiers tours

Sans calculatrice, donner la valeur exacte de $\cos x$ et $\sin x$ pour chacun des réels suivants (un cercle esquissé à main levée est le meilleur des brouillons).

1. $x = \frac{2\pi}{3};$

2. $x = -\frac{\pi}{6};$

3. $x = \frac{3\pi}{4};$

4. $x = \frac{7\pi}{6};$

5. $x = -\frac{5\pi}{3};$

6. $x = \frac{31\pi}{6}.$

EXERCICE 2 · APL-F4-02



Les angles associés

1. Exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$: $\cos(\pi - x)$; $\sin(x + \pi)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\sin(2\pi - x)$.
2. Simplifier, pour tout réel x : $S(x) = \cos(\pi - x) + \cos(-x)$ et $T(x) = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x)$.
3. En déduire, sans calculatrice, la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 3 · APL-F4-03



L'identité du cercle

1. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\sin x$.
2. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\sin x = -\frac{3}{5}$. Calculer la valeur exacte de $\cos x$.
3. Existe-t-il un réel x tel que $\cos x = 0,8$ et $\sin x = 0,7$? Justifier.

EXERCICE 4 · THE-F4-04



Parité et période d'assemblages

Pour chaque fonction, déterminer si elle est paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre, puis si elle est périodique ; le cas échéant, proposer une période et la vérifier par un calcul quantifié.

1. $f : x \mapsto \sin x \cos x$;
2. $g : x \mapsto \sin^2 x$;
3. $h : x \mapsto x + \sin x$;
4. $k : x \mapsto 1 + \sin x$.

Coup de pouce

Pour f et g , une formule de duplication transforme l'assemblage en une seule onde, dont la période se lit alors sans effort.

Vrai ou faux · le cercle

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier d'une phrase (un calcul, un contre-exemple ou un argument du cours).

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
2. Il existe un réel x tel que $\cos x = 1,2$.
3. La fonction cosinus est périodique de période π .
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq x$.
5. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est paire.

Sinus n'est pas un polynôme

La courbe du sinus ondule si sagement qu'on pourrait la croire tracée par une fonction polynôme bien choisie. Montrons qu'aucun polynôme, de quelque degré que ce soit, ne produira jamais cette onde.

RAPPEL – ADMIS

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines réelles (le cas $n = 2$ est celui du second degré de première).

1. Résoudre $\sin x = 0$ dans $\mathbb{R}$ (la périodicité fait tout le travail). Combien l'équation a-t-elle de solutions ?
2. En raisonnant par l'absurde à l'aide du rappel, en déduire que la fonction sinus n'est pas une fonction polynôme.

DÉFI

Autre chemin : montrer qu'une fonction polynôme non constante n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, et en tirer une seconde démonstration. Laquelle des deux preuves fonctionne aussi pour la fonction $x \mapsto \cos x + 2$?

II. LA LIMITE FONDAMENTALE

↔ s'appuie sur COURS F4, § 2 · l'encadrement par les aires, les gendarmes et la limite $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$

EXERCICE 7 · APL-F4-07



Les gendarmes en l'infini

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$.
3. Le même quotient $\frac{\sin x}{x}$ a été étudié au cours quand x tend vers 0. Rappeler sa limite, et expliquer en une phrase pourquoi les deux résultats ne se contredisent pas.

EXERCICE 8 · APL-F4-08



La limite fondamentale composée

Déterminer les limites suivantes en 0, en se ramenant à la limite fondamentale par un changement de variable ou une écriture adaptée, que l'on précisera.

1. $\frac{\sin(3x)}{x}$;
2. $\frac{x}{\sin x}$;
3. $\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}$;
4. $\frac{\sin(x^2)}{x}$.

EXERCICE 9 · THE-F4-09



Le second lemme, en plus fort

Le cours a établi que $\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Ce quotient cache en réalité une limite plus précise.

1. Justifier que, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2.$$

2. En déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2}$.
3. Retrouver alors, en une ligne, le lemme du cours.

EXERCICE 10 · SYN-F4-10



Aux deux bouts

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x > 0, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (un changement de variable ramène à une vieille connaissance).
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq x$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

3. La fonction f se prolonge donc par continuité en 0 ; on pose $f(0) = 0$. *Défi* ★ : le taux d'accroissement $\frac{f(h) - f(0)}{h}$ admet-il une limite quand $h \rightarrow 0^+$? (Regarder les valeurs prises en $h = \frac{1}{2n\pi}$ puis en $h = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.) Qu'en conclure sur ce prolongement ?

III. DÉRIVER L'ONDE

↔ s'appuie sur COURS F4, § 3 · les dérivées de sinus, cosinus et de leurs composées

EXERCICE 11 · APL-F4-11

★ ■ ⌚

Dérivées directes

Justifier que chaque fonction est dérivable sur l'ensemble indiqué, puis calculer sa dérivée.

1. $f_1(x) = x \sin x$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f_2(x) = \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f_3(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0; +\infty[$;
4. $f_4(x) = (2x + 1) \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 12 · APL-F4-12

★★ ■ ⌚

Dérivées composées

Même consigne.

1. $g_1(x) = \sin(3x - 1)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $g_2(x) = \cos(x^2)$ sur $\mathbb{R}$;
3. $g_3(x) = \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$;
4. $g_4(x) = \sqrt{2 + \cos x}$ sur $\mathbb{R}$.

Coup de pouce

Pour g_4 : avant de dériver, dire pourquoi la quantité sous la racine ne s'annule jamais ; c'est ce qui donne le permis de dériver sur $\mathbb{R}$ tout entier.

EXERCICE 13 · APL-F4-13

★★ ■ ♦ ⌚

Tangentes

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de sinus au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de cosinus au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
3. En quels points de $[-\pi; \pi]$ la courbe de sinus admet-elle une tangente horizontale ?

La dérivée 2026^e

On note $\sin^{(n)}$ la dérivée n -ième de la fonction sinus.

1. Calculer $\sin^{(1)}$, $\sin^{(2)}$, $\sin^{(3)}$ et $\sin^{(4)}$. Que constate-t-on ?
2. En déduire $\sin^{(2026)}$, en justifiant soigneusement.
3. Même question pour la dérivée 2025^e de cosinus.

DÉFI

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$: le cycle des dérivées n'est qu'une rotation d'un quart de tour.

L'onde déguisée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos x$.

1. À l'aide d'une formule d'addition, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$, et les abscisses de $[-\pi; \pi]$ où ils sont atteints.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[-\pi; \pi]$ sans étudier le signe de f' .
4. Résoudre sur $[-\pi; \pi]$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

DÉFI

Généraliser : pour a et b réels non tous deux nuls, montrer que la fonction $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ a pour amplitude $\sqrt{a^2 + b^2}$, c'est-à-dire que ses valeurs remplissent exactement $[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$.

La machine à inégalités, un cran de plus

Le cours a fait tourner sa « machine à inégalités » jusqu'à $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ sur $\mathbb{R}_+$ (§ 3.3). Tournons la manivelle un cran de plus : l'étage suivant de la tenaille, celui qui referme le sinus par au-dessus.

1. Soit $g : x \mapsto x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$.
2. Reconnaître dans le signe de g'' sur $[0; +\infty[$ une inégalité du cours, puis en déduire les variations de g' et de g sur cet intervalle, et conclure :

$$\forall x \geq 0, \quad \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

3. En combinant avec l'encadrement du cours, encadrer $\sin(0,5)$ entre deux nombres décimaux, et donner l'amplitude de l'encadrement obtenu.

Coup de pouce

Question 2 : $g''(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$, au signe près de l'ordre des termes ; c'est très exactement la moitié inférieure de la tenaille du cours.

IV. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

↔ s'appuie sur COURS F4, § 4 · la méthode du cercle, les arcs coloriés, le transport d'intervalle

EXERCICE 17 · APL-F4-17



Équations élémentaires

Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$, cercle à l'appui.

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3. $\cos x = -1$;

4. $\sin x = 1$;

5. $2 \cos x + 1 = 0$;

6. $\sin x = 2$.

EXERCICE 18 · APL-F4-18



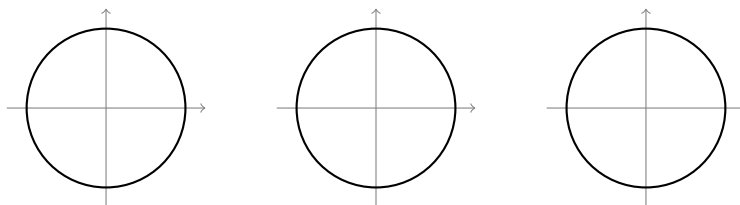
Arcs coloriés

Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$, en coloriant l'arc solution sur les cercles fournis.

1. $\cos x > \frac{1}{2}$;

2. $2 \sin x + \sqrt{3} \leq 0$;

3. $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



EXERCICE 19 · APL-F4-19



Le transport d'intervalle

Résoudre sur $[-\pi; \pi]$, en transportant soigneusement l'intervalle de la nouvelle variable.

1. $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$;
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;
3. $\sin(3x) = 1$.

Coup de pouce

Question 3 : quand x parcourt $[-\pi; \pi]$, la variable $3x$ parcourt trois tours de cercle ; il serait étonnant de ne trouver qu'une solution.

EXERCICE 20 · SYN-F4-20



Le second degré caché

1. Résoudre sur $[-\pi; \pi]$ l'équation $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ (on posera $X = \cos x$).
2. Résoudre sur $[-\pi; \pi]$ l'équation $\sin(2x) = \sin x$, à l'aide d'une formule de duplication et d'une factorisation.
3. Camille a résolu la question 2 en divisant les deux membres par $\sin x$, et n'a trouvé que deux solutions. Quelles solutions a-t-elle perdues, et quelle règle d'algèbre a-t-elle enfreinte ?

EXERCICE 21 · THE-F4-21



Vrai ou faux · compter les solutions

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse (un dessin du cercle est un argument recevable, un contre-exemple aussi).

1. Pour tout $a \in]-1; 1[$, l'équation $\cos x = a$ admet exactement deux solutions sur $[-\pi; \pi]$.
2. Pour tout $a \in [-1; 1]$, l'équation $\cos x = a$ admet exactement deux solutions sur $[-\pi; \pi]$.
3. L'équation $\sin x = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-\pi; \pi]$.
4. L'équation $\cos(2x) = 1$ admet exactement trois solutions sur $[-\pi; \pi]$.
5. L'équation $\sin x = \frac{x}{10}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

V. LE MONDE OSCILLE

↔ s'appuie sur COURS F4, § 3–5 · études de fonctions, signaux et oscillateurs

EXERCICE 22 · APL-F4-22

★★ ■ ⌚

Le diapason

La membrane d'un diapason qui donne le la vibre selon

$$u(t) = 0,1 \sin(880\pi t),$$

où t est en secondes et $u(t)$, l'écart à la position de repos, en millimètres.

1. Déterminer l'amplitude, la période et la fréquence de ce signal. Retrouver le « la 440 », et dire combien de fois cette période est plus brève que celle du courant du secteur, rencontrée au cours.
2. Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(t)$: c'est la vitesse de la membrane.
3. Montrer que cette vitesse est maximale au passage par la position de repos, et calculer sa valeur en millimètres par seconde, puis en centimètres par seconde.

EXERCICE 23 · SYN-F4-23

★★★★ ■ ⌚

Étude complète

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par : $\forall x \in [0; \pi], f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$.

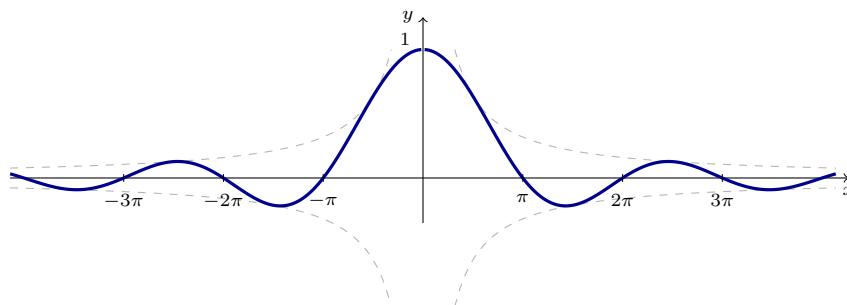
1. Justifier que f est dérivable sur $[0; \pi]$ et calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0; \pi]$, puis étudier le signe de f' .
3. Dresser le tableau de variations de f (valeurs exactes aux bornes et à l'extremum).
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[0; \pi]$, dont l'une est évidente (le théorème utilisé sera cité avec toutes ses hypothèses ; il vient du chapitre F1).

EXERCICE 24 · APR-F4-24

★★★★★ ■ ⌚

Le sinus cardinal

La promesse du cours : l'étude complète de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, l'onde qui s'éteint.



1. Étudier la parité de f .
2. Résoudre $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$: l'encadrement de la figure, en pointillés, est celui de l'exercice 7, à reprendre et conclure.
4. Quelle valeur donner à $f(0)$ pour prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}$? Citer le résultat du cours qui le justifie.
5. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $|f(x)| < 1$: le maximum du prolongement est atteint en 0, et nulle part ailleurs.

Coup de pouce

Question 5 : l'inégalité stricte $|\sin x| < |x|$ pour $x \neq 0$ se recompose en deux morceaux : sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, l'encadrement fondamental du cours (§ 2.1) est déjà strict ; au-delà, comparer $|\sin x|$ à 1, puis 1 à $|x|$. L'imparité fait le reste.

DÉFI

Le prolongement est-il dérivable en 0 ? Étudier le taux $\frac{f(h) - 1}{h} = \frac{\sin h - h}{h^2}$ à l'aide de l'encadrement $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ établi au cours (§ 3.3), et conclure.

EXERCICE 25 · THE-F4-25



L'oscillateur habillé

Soit $x : t \mapsto 3 \cos(2t) - 4 \sin(2t)$.

1. Justifier que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}, x''(t) = -4x(t)$. De quel objet du cours cette équation est-elle la signature ?
2. Développer $5 \cos(2t + \varphi)$ à l'aide d'une formule d'addition, et montrer que $x(t) = 5 \cos(2t + \varphi)$ pour un réel φ vérifiant $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ et $\sin \varphi = \frac{4}{5}$.
3. En déduire l'amplitude et la période de cet oscillateur, et les valeurs extrêmes atteintes par x .

VI. HISTOIRES ET BELLES MATHÉMATIQUES

$\leftrightarrow$ s'appuie sur TOUT LE CHAPITRE · cinq trésors, du VII^e siècle à 1593 ; récits complets sur le compagnon

EXERCICE 26 · SYN-F4-26



La formule oubliée de Bhāskara

Au VII^e siècle, l'astronome indien Bhāskara I^{er} donne, dans le *Mahābhāskarīya*, une recette stupéfiante : pour $x \in [0; \pi]$,

$$\sin x \approx B(x) = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}.$$

Une fraction rationnelle, sans cercle ni table ; nul ne sait comment il l'a trouvée, et son traité ne la justifie pas d'un mot.

1. Vérifier que $B(0) = \sin 0$ et $B(\pi) = \sin \pi$.
2. Montrer, par un calcul de fractions exact, que $B\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ puis que $B\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$: la formule est *exacte* en ces points.
3. Calculer $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sous forme de fraction irréductible (π disparaît en route), puis en donner une valeur approchée à 10^{-5} près et l'erreur commise par rapport à $\sin \frac{\pi}{4}$.
4. Le polynôme $x - \frac{x^3}{6}$ du cours commet en $\frac{\pi}{4}$ une erreur d'environ $2,5 \cdot 10^{-3}$. Qui, de Bhāskara ou du polynôme, approche le mieux en ce point ?

N.B. L'erreur maximale de B sur $[0; \pi]$ vaut environ 0,0016 : les courbes de $\sin$ et de B sont indiscernables à l'échelle d'une feuille. Treize siècles avant les calculatrices, l'Inde savait mettre le sinus en cage rationnelle.

EXERCICE 27 · THE-F4-27



La loi de Morrie

Enfant, le futur prix Nobel Richard Feynman apprit d'un camarade, Morrie Jacobs, dans l'atelier de maroquinerie du père de celui-ci, une identité qu'il retint toute sa vie et dégainait volontiers :

$$\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

On note P le produit de gauche.

1. Justifier que $\sin \frac{\pi}{9} \neq 0$, puis exprimer $\sin \frac{\pi}{9} \times P$ à l'aide de la formule de duplication appliquée trois fois en cascade.
2. Justifier que $\sin \frac{8\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$, et conclure.

DÉFI

Généraliser la cascade : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a tel que $\sin a \neq 0$, montrer que $\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k a) = \frac{\sin(2^n a)}{2^n \sin a}$ (le symbole $\prod$ est au produit ce que $\sum$ est à la somme), et retrouver la loi de Morrie comme cas particulier.

EXERCICE 28 · APR-F4-28

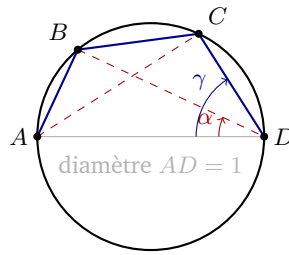


Le quadrilatère de Ptolémée

Comment l'*Almageste* calculait-il sa table, corde après corde ? Avec un théorème de géométrie pure, que voici, et qui cache nos formules d'addition. Les « formules de première » ont dix-neuf siècles.

RAPPEL – THÉORÈME DE PTOLÉMÉE (ADMIS)

Dans un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle, le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés : $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.



Dans toute la suite, AD est un *diamètre*, de longueur 1, et l'on pose $\alpha = \widehat{ADB}$ et $\gamma = \widehat{ADC}$, avec $0 < \alpha < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

1. Justifier que le triangle ABD est rectangle en B , et en déduire $AB = \sin \alpha$ et $BD = \cos \alpha$.
2. Établir de même $AC = \sin \gamma$ et $CD = \cos \gamma$.
3. Observer que $\widehat{BDC} = \gamma - \alpha$ (simple soustraction d'angles : la demi-droite $[DB]$ est entre $[DA]$ et $[DC]$), et admettre que la corde BC vaut alors $\sin(\gamma - \alpha)$: c'est le théorème de l'angle inscrit, par le même argument qu'aux questions 1 et 2 appliqué à un diamètre issu de B . Écrire alors le théorème de Ptolémée pour $ABCD$, et en déduire :

$$\sin(\gamma - \alpha) = \sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha.$$

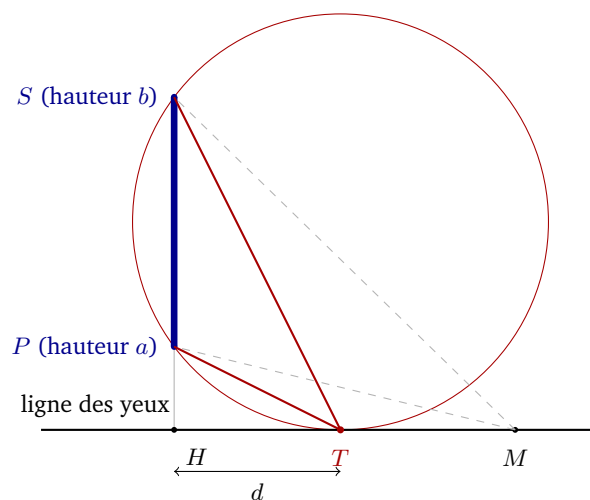
4. En remplaçant α par $-\alpha$ et à l'aide de la parité, retrouver la formule d'addition $\sin(\gamma + \alpha) = \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha$.

EXERCICE 29 · APR-F4-29



Le problème de Regiomontanus (1471)

En 1471, l'astronome Regiomontanus pose à un correspondant ce qui est considéré comme le premier problème d'optimisation depuis l'Antiquité : une statue domine une place ; de trop près, on la voit écrasée ; de trop loin, minuscule. Où se placer pour la voir sous l'angle maximal ? Et le plus beau : il se résout sans aucune dérivée.



Le pied P de la statue est à la hauteur a au-dessus de la ligne des yeux, son sommet S à la hauteur b , avec $0 < a < b$. On admet le théorème de l'angle inscrit sous la forme suivante : tous les points d'un même arc

de cercle voient la corde $[PS]$ sous le même angle, et tout point situé du même côté de la droite (PS) mais extérieur au cercle la voit sous un angle strictement plus petit.

1. Il existe un unique cercle passant par P et S , situé du côté droit de la statue, et *tangent* à la ligne des yeux, en un point noté T . En admettant son existence, expliquer en quelques lignes pourquoi T est le meilleur poste d'observation de toute la demi-droite des yeux située de ce côté.
2. Justifier que le centre de ce cercle a pour hauteur $\frac{a+b}{2}$ au-dessus de la ligne des yeux, et que son rayon vaut aussi $\frac{a+b}{2}$ (c'est la tangence).
3. À l'aide du théorème de Pythagore, montrer que la distance $d = TH$, où H est le pied de la verticale de la statue, vérifie $d^2 = ab$, et conclure : $d = \sqrt{ab}$.
4. La statue de la place mesure 6 mètres, et son pied domine vos yeux de 2 mètres. À quelle distance vous placerez-vous ?

EXERCICE 30 · APR-F4-30

★★★★★ * ⌛

La formule de Viète (1593)

En 1593, François Viète écrit le premier *produit infini* de l'histoire des mathématiques :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \dots$$

Des racines carrées emboîtées à l'infini, et π au bout. Démontrons-le avec les seuls outils du chapitre.

1. Montrer par récurrence (chapitre A0) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}.$$

2. Appliquer en $x = \frac{\pi}{2}$, et en déduire :

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}.$$

3. À l'aide de la limite fondamentale, montrer que $2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $n \rightarrow +\infty$, et conclure que le produit tend vers $\frac{2}{\pi}$.
4. Montrer que, pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$, et en déduire les trois premiers facteurs de Viète sous leur forme en radicaux emboîtés.
5. À la calculatrice, calculer le produit des quatre premiers facteurs (le quatrième est $\cos \frac{\pi}{32}$) et l'écart à $\frac{2}{\pi} \approx 0,63662$.

N.B. Ce produit convergeait trop lentement pour calculer π en pratique ; sa gloire est ailleurs : c'était la première fois qu'une écriture infinie exacte entrait en mathématiques, trois siècles avant que la notion de limite ne soit rigoureusement fondée.

LA SUITE SUR LE COMPAGNON NUMÉRIQUE

Les corrigés détaillés, les réponses aux défis étoilés, la courbe de Bhāskara superposée au vrai sinus, la cascade de Morrie pas à pas et la chasse numérique de Viète poussée à vingt facteurs : tout vous attend sur le compagnon numérique du chapitre.